Přednáška 8

Limita a spojitost zobrazení

V této přednášce se zabývat zobrazením $\mathbf{f} : X \to Y$, kde $X \subset \mathbb{R}^n$ a $Y \subset \mathbb{R}^k$, které budeme často psát jako $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Pomocí souřadnic budeme toto zobrazení zapisovat jako

$$y_r = f_r(\mathbf{x}) = f_r(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \qquad r = 1,\, 2,\, \ldots,\, k\,,$$

kde $f_r(\mathbf{x}) = f_r(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jsou funkce na množině X, tj. $f_r : X \to \mathbb{R}$.

Definice limity tohoto zobrazení je stejná jako obecná definice limity pomocí okolí bodu, tj.

Definice. Nechť je $\mathbf{f} : X \to Y$, $\mathbf{a}$ hromadný bod množiny X a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^k$. Když

$$\forall U(\mathbf{A})\ \exists P(\mathbf{a})\ ;\ \forall \mathbf{x} \in P(\mathbf{a}) \cap X \ \text{ je } \ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in U(\mathbf{A})\,, \tag{1}$$

tj. ke každému okolí bodu $\mathbf{A}$ v $\mathbb{R}^k$ existuje prstencové okolí bodu $\mathbf{a}$ v $\mathbb{R}^n$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in P(\mathbf{a}) \cap X$ patří $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ do $U(\mathbf{A})$, řekneme, že zobrazení $\mathbf{f}$ má v bodě $\mathbf{a}$ *limitu* $\mathbf{A}$. Tento výrok zapisujeme jako $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$.

Protože okolí definujeme pomocí vzdálenosti bodů, lze tuto definice zapsat pomocí ε a δ jako

Definice. Nechť je $\mathbf{f} : X \to Y$, $\mathbf{a}$ hromadný bod množiny X a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^k$. Když

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ ;\ \forall \mathbf{x} \in X\ ,\ 0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta \ \text{ je } \ d(\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{A}\big) < \varepsilon\,, \tag{2}$$

tj. ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in X$, pro které je $0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta$, platí $d\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{A}\big) < \varepsilon$, říkáme, že zobrazení $\mathbf{f}$ má v bodě $\mathbf{a}$ *limitu* $\mathbf{A}$. Tento výrok zapisujeme jako $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$.

Pokud píšeme $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \big(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_k(\mathbf{x})\big)$ a $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_k)$, platí následující věta.

Věta. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$ právě tehdy, když $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_r(\mathbf{x}) = A_r \in \mathbb{R}$ pro každé $r = 1,\, 2,\, \ldots,\, k$.

Z předchozí věty plyne, že abychom našli limitu zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$, stačí najít k limit funkcí $f_r(\mathbf{x})$ v tomto bodě. Proto se v předášce budeme zabývat hlavně limitami funkcí $f : X \to \mathbb{R}$, kde $X \subset \mathbb{R}^n$.

`Poznámka.` Pro funkce $f(\mathbf{x})$ jsme definovali také nevlastní limity $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \pm\infty$. Pokud počítáme limitu zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ do $\mathbb{R}^k$, kde $k \geq 1$, a aspoň jedna limita funkce $f_r(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ je nevlastní, limita zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ neexistuje.

Uvedeme některé základní věty, které se používají při výpočtu limit funkce více proměnných. Abychom neměli zbytečně složité předpoklady, budeme předpokládat, že všechny funkce jsou definovány na společné množině $X \subset \mathbb{R}^n$.

Věta. Pokud existují limity $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = A$ a $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = B$ a α, β jsou reálné konstanty, platí

1. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\big(\alpha f(\mathbf{x})+\beta g(\mathbf{x})\big)=\alpha A+\beta B;$
2. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\big(f(\mathbf{x})\cdot g(\mathbf{x})\big)=A\cdot B;$
3. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\dfrac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}=\dfrac{A}{B},$

pokud jsou výrazy na pravé straně definovány v $\mathbb{R}^*$.

Věta. Pokud v nějakém prstencovém okolí bodu $\mathbf{a}$ platí nerovnosti $f(\mathbf{x})\le g(\mathbf{x})\le h(\mathbf{x})$ a existují limity $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})=\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} h(\mathbf{x})=A$, existuje také limita $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})=A$.

Věta. Limita $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})=0$ právě tehdy, když $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\big|f(\mathbf{x})\big|=0$.

Limity, podobně jako v případě funkcí jedné reálné proměnné počítáme tak, že některé základní limity známe (najdeme je z definice) a složitější limity pak počítáme z uvedených vět.

Příklad. Najděte limitu

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]}\big(x+y\big)\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y}\,.$$

ŘEŠENÍ: Funkce, jejíž limitu počítáme je definována v celém $\mathbb{R}^2$ s výjimkou přímek $x=0$ a $y=0$. Bod $\mathbf{a}=[0,0]$ je tedy hromadný bod D_f. Protože platí nerovnost

$$0\le\left|\big(x+y\big)\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y}\right|\le|x+y|\le|x|+|y|\,,$$

je uvedená limita rovna nule, protože $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}|x|=\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}|y|=0$.

Při výpočtu neurčitých výrazů vznikají větší problémy než v případě limit funkcí jedné reálné proměnné. Tam totiž platila Cauchyova věta o střední hodnotě a z ní plynulo l'Hospitalovo pravidlo. Ale pro funkce více reálných proměnných analogická věta neplatí.

Další věta je užitečná v tom, že nám umožňuje použít při výpočtu limity l'Hospitalovo pravidlo, když víme, že limita existuje, nebo dokázat, že neexistuje. Nejprve budeme definovat limitu zobrazení vzhledem k množině $M\subset X=D_f$.

Definice. Nechť je $\mathbf{f}:X\to Y$, $M\subset X$, $\mathbf{a}$ hromadný bod množiny M a $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^k$. Jestliže

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ ;\ \forall\mathbf{x}\in M\ ,\ 0<d(\mathbf{x},\mathbf{a})<\delta\ \text{ je }\ d\big(\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{A}\big)<\varepsilon\,,\tag{3}$$

tj. ke každému $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ takové, že pro každé $\mathbf{x}\in M$, pro které je $0<d(\mathbf{x},\mathbf{a})<\delta$, platí $d\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{A}\big)<\varepsilon$, říkáme, že zobrazení $\mathbf{f}$ má v bodě $\mathbf{a}$ *vzhledem k množině M limitu* $\mathbf{A}$. Tento výrok zapisujeme jako $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in M}}\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{A}$.

`Poznámka.` Tato limita se liší od dříve uvedené limity tím, že při jejím výpočtu uvažujeme pouze $\mathbf{x}\in M$. Pokud je $M=X=D_f$, se sousloví "vzhledem k množině M"vynechává.

Věta. Jestliže existuje $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$, $M \subset X$ a $\mathbf{a}$ je hromadný bod množiny M, pak existuje $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in M}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$.

Tato věta se často používá k důkazu toho, že limita neexistuje. K tomu stačí najít dvě podmnožiny množiny X, vzhledem ke kterým má zobrazení různé limity. Za množiny M se velmi často vybírají přímky nebo polopřímky, které procházejí bodem $\mathbf{a}$.

Příklad. Ukažte, že limita $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ neexistuje.

Řešení: Když budeme počítat uvedenou limitu vzhledem k přímkám $x = 0$ a $y = 0$ dostaneme

$$\lim_{\substack{[x,y]\to[0,0]\\ x=0}} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{0+y^2} = 0\,,$$

$$\lim_{\substack{[x,y]\to[0,0]\\ y=0}} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+0} = 1 \neq 0\,.$$

Může se ovšem stát, že limity funkce jsou si rovny vzhledem ke všem přímkám, které procházejí bodem $\mathbf{a}$, ale limita přesto neexistuje.

Příklad. Uvažujme limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{\operatorname{arctg}(xy^2)}{x^2+y^4}$. Vzhledem k přímkám $x = 0$ a $y = 0$ je

$$\lim_{\substack{[x,y]\to[0,0]\\ x=0}} \frac{\operatorname{arctg}(xy^2)}{x^2+y^4} = \lim_{\substack{[x,y]\to[0,0]\\ y=0}} \frac{\operatorname{arctg}(xy^2)}{x^2+y^4} = 0\,.$$

Tedy pokud limita existuje, je rovna nule.

Každou další přímku, která prochází bodem $[0,0]$ lze zapsat jako $y = kx$, kde $k \neq 0$. Pro limitu vzhledem k přímce $y = kx$ dostaneme

$$\lim_{\substack{[x,y]\to[0,0]\\ y=kx}} \frac{\operatorname{arctg}(xy^2)}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(k^2x^3)}{x^2+k^4x^4}\,.$$

A protože se jedná o funkci jedné reálné proměnné x, a výraz v limitě je typu $\frac{0}{0}$, lze použít l'Hospitalovo pravidlo. To dává

$$\lim_{\substack{[x,y]\to[0,0]\\ y=kx}} \frac{\operatorname{arctg}(xy^2)}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{3k^2x^2}{\big(1+k^4x^6\big)\big(2x+4k^4x^3\big)} = \lim_{x\to 0} \frac{3k^2x}{2\big(1+k^4x^6\big)\big(1+2k^4x^2\big)} = 0\,.$$

Ale když budeme uvažovat parabolu $x = y^2$, dostaneme s použitím l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{\substack{[x,y]\to[0,0]\\ x=y^2}} \frac{\operatorname{arctg}(xy^2)}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(y^4)}{2y^4} = \frac{1}{2} \neq 0\,.$$

Uvedená limita tedy neexistuje.

`Poznámka.` Dokázat, že existuje limita neurčitého výrazu funkce více proměnných, je poměrně pracná úloha. Ukážeme důvody, proč tomu tak je, a aspoň principiálně metodu, jak existenci limity dokázat.

Vrátíme se k definici limity funkce $f : X \to \mathbb{R}$, kde $X \subset \mathbb{R}^n$. Vzdálenost bodu $\mathbf{x}$ od bodu $\mathbf{a}$ v prostoru $\mathbb{R}^n$ je definována jako

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2}\,.$$

Mnohdy je výhodné popsat bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ pomocí čísel $r > 0$ a směrem z bodu $\mathbf{a}$ do bodu $\mathbf{x}$, tj. jednotkovým vektorem $\mathbf{s}$, pomocí vztahu

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + r\mathbf{s}\,, \quad \text{kde} \quad r\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2} > 0\,, \quad \|\mathbf{s}\| = 1\,. \tag{4}$$

Například v rovnice je $x_1 = a_1 + r\cos\varphi$, $x_2 = a_2 + r\sin\varphi$, kde $r > 0$ a $0 \le \varphi < 2\pi$ jsou tzv. *polární souřadnice* s počátkem v bodě $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$.

Pak je

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2} = r\sqrt{\sum_{i=1}^{n} s_i^2} = r$$

a jestliže dosadíme za $\mathbf{x}$ do funkce $f(\mathbf{x})$ z rovnice (4), dostaneme funkci

$$F(r, \mathbf{s}) = f\big(\mathbf{a} + r\mathbf{s}\big)\,.$$

Podle definice limity musí platit

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\,;\ \forall r\,,\ 0 < r < \delta \ \text{ a } \ \forall \mathbf{s}\,,\ \|\mathbf{s}\| = 1 \ \text{ je } \ \big|F(\mathbf{x}) - A\big| = \big|F(r, \mathbf{s}) - A\big| < \varepsilon\,. \tag{5}$$

Každé polopřímce P, která vychází z bodu $\mathbf{a}$, odpovídá právě jeden směr $\mathbf{s}$. Taková polopřímka P má parametrickou rovnici $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r\mathbf{s}$, $r > 0$, kde $\mathbf{s}$ je pevně zvolený jednotkový vektor. Tvrzení, že limita funkce $f(\mathbf{x})$ je vzhledem ke každé polopřímce s počátkem v bodě $\mathbf{a}$ rovna $\mathbf{A}$ znamená, že

$$\forall \varepsilon > 0 \ \text{ a } \ \forall \mathbf{s}\,,\ \|\mathbf{s}\| = 1\ \exists \delta > 0\,;\ \forall r\,,\ 0 < r < \delta \ \text{ je } \ \big|F(r, \mathbf{s}) - A\big| < \varepsilon\,. \tag{6}$$

Tvrzení (5) a (6) se liší v tom, že v (6) hledáme $\delta > 0$ k danému $\varepsilon > 0$ a danému směru $\mathbf{s}$, a tedy $\delta = \delta(\varepsilon, \mathbf{s})$ a v tvrzení (5), hledáme $\delta > 0$ k danému $\varepsilon > 0$, tj. $\delta = \delta(\varepsilon)$, tj. δ je stejné pro všechny směry $\mathbf{s}$.

Limita podle definice (6) se nazývá *bodová limita* funkce $F(r, \mathbf{s})$ a limita podle definice (5) se nazývá *stejnoměrná limita* funkce $F(r, \mathbf{s})$ na množině $\|\mathbf{s}\| = 1$. Limita funkce více proměnných je právě tato limita.

Když pro každé $r > 0$ definujeme funkci

$$G(r) = \sup_{\|\mathbf{s}\|=1} \big|F(r, \mathbf{s}) - A\big|\,,$$

je $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = A$ právě tehdy, když je $\lim\limits_{r\to 0_+} G(r) = 0$.

Spojitá zobrazení

Nyní se budeme věnovat limitě složeného zobrazení. Je-li $\mathbf{f} : X \to Y$ a $\mathbf{g} : Y \to Z$, kde $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^k$ a $Z \subset \mathbb{R}^\ell$, lze definovat zobrazení $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f} : X \to Z$ předpisem

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \bigl(\mathbf{g} \circ \mathbf{f}\bigr)(\mathbf{x}) = \mathbf{g}\bigl(\mathbf{f}(\mathbf{x})\bigr) .$$

Nechť je $\mathbf{a}$ hromadný bod množiny X a limita $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$. Nechť je $\mathbf{A}$ hromadný bod množiny Y a platí $\lim\limits_{\mathbf{y}\to\mathbf{A}} \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{B}$. Bude nás zajímat, kdy můžeme tvrdit, že

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{g}\bigl(\mathbf{f}(\mathbf{x})\bigr) = \mathbf{B} . \tag{7}$$

Protože v definici limity zobrazení $\mathbf{g}(\mathbf{y})$ se vůbec nezajímáme o jeho hodnotu v bodě $\mathbf{A}$, je jedna z možností zaručit, že $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{A}$. To vede k následující větě.

Věta. Nechť je $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$ a $\lim\limits_{\mathbf{y}\to\mathbf{A}} \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{B}$. Jestliže existuje prstencové okolí $P(\mathbf{a})$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in P(\mathbf{a}) \cap X$ je $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{A}$, platí vztah (7).

Jiná možnost je předpokládat, že $\mathbf{g}(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$. To nás vede k definici spojitého zobrazení.

Definice. Zobrazení $\mathbf{f} : X \to Y$ se nazývá *spojité* v bodě $\mathbf{a} \in X$ právě tehdy, když

$$\forall U\bigl(\mathbf{f}(\mathbf{a})\bigr)\ \exists U(\mathbf{a})\, ;\ \forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{a}) \cap X \quad \text{je} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in U\bigl(\mathbf{f}(\mathbf{a})\bigr) ,$$

neboli ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $\mathbf{x}$, pro které je $d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta$, platí $d\bigl(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{a})\bigr) < \varepsilon$.

`Poznámka.` Poznamenejme, že zobrazení je spojité v bodě $\mathbf{a} \in X$ právě tehdy, když je $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a})$ nebo když je $\mathbf{a}$ izolovaný bod množiny X.

Věta. Nechť je $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$ a zobrazení $\mathbf{g}(\mathbf{y})$ je spojité v bodě $\mathbf{A}$. Pak platí

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{g}\bigl(\mathbf{f}(\mathbf{x})\bigr) = \mathbf{g}\bigl(\mathbf{f}(\mathbf{a})\bigr) = \mathbf{g}(\mathbf{A}) .$$

Definice. Zobrazení $\mathbf{f}$ se nazývá *spojité na množině* $M \subset X$ právě tehdy, když je spojité v každém bodě množiny M. Je-li $M = X$, říkáme, že zobrazení $\mathbf{f}$ je spojité.

Uvedeme ještě několik vět, které platí pro spojitá zobrazení.

Věta. Nechť jsou zobrazení $\mathbf{f} : X \to Y$ a $\mathbf{g} : Y \to Z$ spojitá. Pak je složené zobrazení $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f} : X \to Z$ spojité.

Věta. Zobrazení $\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}^k$ je spojité právě tehdy, když jsou všechny jeho složky $f_r : X \to \mathbb{R}$, $r = 1, 2, \ldots, k$, spojité funkce.

Další věta má zásadní význam při výpočtu maxima a minima spojité funkce. Abychom ji formulovali, zavedeme ještě dva pojmy.

Věta. (*Weierstrassova*) Jestliže je funkce $f(\mathbf{x})$ spojitá na kompaktní, tj. uzavřené a omezeně, množině $X \subset \mathbb{R}^n$, existují body $\mathbf{x}_m\,, \mathbf{x}_M \in X$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in X$ je

$$f\big(\mathbf{x}_m\big) \le f\big(\mathbf{x}\big) \le f\big(\mathbf{x}_M\big)\,.$$

`Poznámka.` Jiný slovy předcházející věta říká, že každá funkce $f(\mathbf{x})$ spojitá na kompaktní množině X má na množině X minimum a maximum.

Derivace funkce podle vektoru, parciální derivace a tečná rovina

Derivace funkce podle vektoru a parciální derivace

Nechť je $y = f(\mathbf{x})$ funkce definovaná na množině $X \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in X$ a $\mathbf{v}$ je vektor v $\mathbb{R}^n$. Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $|t| < \delta$ je bod $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{v}t \in X$. Pak je pro $|t| < \delta$ definována funkce

$$F(t) = f(\mathbf{a} + \mathbf{v}t) = f\big(a_1 + v_1 t, a_2 + v_2 t, \ldots, a_n + v_n t\big)\,. \tag{8}$$

Definice. Derivaci funkce $F(t)$, která je definovaná vztahem (8), v bodě $t = 0$, tj. $F'(0)$, nazýváme *derivace funkce* $f(\mathbf{x})$ *podle vektoru* $\mathbf{v}$ v bodě $\mathbf{a}$ a budeme ji značit

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a})\,.$$

Je-li $\|\mathbf{v}\|^2 = 1$, nazýváme $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$ *derivace funkce* $f(\mathbf{x})$ *ve směru* $\mathbf{v}$ v bodě $\mathbf{a}$.
Je-li $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$, kde $\mathbf{e}_i$ je jednotkový vektor ve směru osy x_i, nazývá se $f'_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{a})$ *parciální derivace funkce* $f(\mathbf{x})$ *podle proměnné* x_i v bodě $\mathbf{a}$ a budeme ji značit jako

$$f'_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{a}) = f'_{,i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})\,.$$

`Poznámka.` Jestliže interpretujeme funkci n proměnných $f(\mathbf{x})$ jako n-rozměrnou nadplochu $\mathcal{S}$ v prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$ se souřadnicemi $[\mathbf{x}, y]$, jsou parametrické rovnice této nadplochy

$$x_k = x_k\,, \quad k = 1,\,2,\,\ldots,\,n\,, \qquad y = f(\mathbf{x})\,.$$

Pro dané $\mathbf{a} \in D_f$ leží bod $\mathbf{A} = [\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$ v této nadploše. Pro daný nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sestrojíme dvourozměrnou nadplochu $\mathcal{P}_2$, tj. rovinu, která prochází bodem $\mathbf{A}$ a je rovnoběžná s vektory $\mathbf{V} = (\mathbf{v}, 0)$ a $\mathbf{e}_{n+1}$. Průnik roviny $\mathcal{P}_2$ s nadplochou $\mathcal{S}$ je křivka $\mathcal{C}$, která prochází bodem $\mathbf{A}$ a jejíž parametrické rovnice jsou

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{v}t\,, \quad y = f(\mathbf{a} + \mathbf{v}t) = F(t)\,, \qquad |t| < \delta\,.$$

Bodu $\mathbf{A} = \big[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})\big]$ odpovídá hodnota parametru $t = 0$ a tečný vektor ke křivce $\mathcal{C}$ v bodě $\mathbf{A}$ je

$$\mathbf{t} = \big(\mathbf{v}, f'_{\mathbf{v}}(a)\big)\,.$$

Protože křivka $\mathcal{C}$ leží v nadploše $\mathcal{S}$, musí být vektor $\mathbf{t}$ rovnoběžný s tečnou nadrovinou k nadploše $\mathcal{S}$ v bodě $\mathbf{A}$. Pokud ovšem tečná nadrovina existuje.

Příklad. Najděte derivaci funkce $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ podle vektoru $\mathbf{v} = (2, 1)$ v bodě $\mathbf{a} = [1, -1]$.

Řešení: Funkce $F(t)$ definovaná vztahem (8) je v tomto případě

$$F(t) = f(1 + 2t, -1 + t) = (1 + 2t)^2 - (1 + 2t)(-1 + t) + (-1 + t)^2 = 3 + 3t + 3t^2 .$$

Protože její derivace je $F'(t) = 3 + 6t$, je

$$f_{\mathbf{v}}(1, -1) = F'(0) = 3 .$$

`Poznámka.` Podle definice je

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{h} .$$

To znamená, že při výpočtu parciální derivace podle proměnné x_i položíme nejprve $x_k = a_k$ pro $k \neq i$. Tím získáme funkci jedné proměnné $F_i(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$, kterou derivujeme v bodě $x_i = a_i$.

Příklad. Najděte obě parciální derivace funkce

$$f(x, y) = x^2 y + (y - 1) \arcsin\left(\frac{2 - x}{3 + y}\right)^2$$

v bodě $\mathbf{a} = [2, 1]$.

Řešení. Při výpočtu $f'_{,x}(2, 1)$ sestrojíme nejprve funkci $F_1(x) = f(x, 1) = x^2$, jejíž derivace v bodě $x = 2$ je

$$f'_{,x}(2, 1) = \frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}x}(2) = 4 ,$$

a pro výpočet $f'_{,y}(2, 1)$ sestrojíme funkci $F_2(y) = f(2, y) = 4y$, jejíž derivace je

$$f'_{,y}(2, 1) = \frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}y}(1) = 4 .$$

Zatím jsme definovali derivaci podle vektoru a parciální derivaci funkce $y = f(\mathbf{x})$ v daném bodě $\mathbf{a}$. Následující definice definuje derivaci podle vektoru a parciální derivaci jako funkci na jisté množině $M \subset X$.

Definice. Nechť je $M \subset X$ množina všech $\mathbf{x} \in X$, pro která existuje derivace podle vektoru $\mathbf{v}$ v bodě $\mathbf{x}$. Funkce $f'_{\mathbf{v}} : M \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem $y = f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$, se nazývá *derivace podle vektoru* $\mathbf{v}$.

Je-li $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$, nazýváme funkci $f'_{,i}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ *parciální derivace podle proměnné* x_i.

`Poznámka.` Rozdíl mezi předchozími definicemi je v tom, že derivace v bodě $\mathbf{a}$ v první definici je číslo, kdežto druhá definice definuje funkci, jejíž hodnota v bodě $\mathbf{x}$ je rovna parciální derivaci podle x_i v bodě $\mathbf{x}$.

Protože derivace funkce $y = f(\mathbf{x})$ podle vektoru $\mathbf{v}$ a parciální derivace jsou definovány pomocí derivace funkce jedné reálné proměnné, platí pro ně věty o derivaci součtu, součinu a podílu, které jsou známy z prvního semestru. Navíc platí

Věta. Nechť je $y = f(\mathbf{x})$ a $c \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$ existuje také $f'_{c\mathbf{v}}(\mathbf{a})$ a platí

$$f'_{c\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = c f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})\,.$$

DŮKAZ: Pro výpočet derivace podle vektoru $\mathbf{v}$ sestrojíme funkce $F(f) = f(\mathbf{a}+t\mathbf{v})$ a pro výpočet derivace podle vektoru $c\mathbf{v}$ funkci

$$\widehat{F}(t) = f(\mathbf{a} + ct\mathbf{v}) = F(ct)\,.$$

Podle věty o derivaci složené funkce je $\widehat{F}'(t) = cF'(ct)$, a tedy v bodě $t = 0$ platí

$$f'_{c\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \widehat{F}'(0) = cF'(0) = c f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})\,.$$

Tečná nadrovina ke grafu funkce $y = f(\mathbf{x})$

Jak jsme se zmínili dříve, je pro každý bod $\mathbf{a} \in D_f$ a nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor

$$\mathbf{t} = \big(\mathbf{v}, f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})\big) = \mathbf{v} + f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})\,\mathbf{e}_{n+1}$$

tečný vektor v bodě $\mathbf{A} = \big[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})\big]$ k jisté křivce, která leží v n-rozměrné nadploše $\mathcal{S}$ dané rovnicí $y = f(\mathbf{x})$.

Předpokládejme, že v bodě $\mathbf{A} = \big[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})\big]$ existuje k nadploše $\mathcal{S}$ tečná nadrovina. Ta je určena bodem $\mathbf{A}$ a n lineárně nezávislými vektory $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$, $\dots$, $\mathbf{t}_n$ v $\mathbb{R}^{n+1}$, které leží v tečné nadrovině. Předpokládejme, že jsou to například vektory

$$\mathbf{t}_i = \big(\mathbf{e}_i, f'_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{a})\big) = \big(\mathbf{e}_i, f'_{,i}(\mathbf{a})\big) = \mathbf{e}_i + f'_{,i}(\mathbf{a})\,\mathbf{e}_{n+1}\,,$$

které jsou podle předchozího tečné k jistým křivkám, které leží v nadploše $\mathcal{S}$ a procházejí bodem $\big[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})\big] \in \mathcal{S}$. Přímým výpočtem se lze přesvědčit, že vektor

$$\mathbf{n} = \big(f'_{,1}(\mathbf{a}), f'_{,2}(\mathbf{a}), \dots, f'_{,n}(\mathbf{a}), -1\big) = \sum_{i=1}^{n} f'_{,i}(\mathbf{a})\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{n+1}$$

je kolmý na všechny vektory $\mathbf{t}_i$, a tedy je to vektor normály k tečné nadrovině. Proto je rovnice tečné nadroviny

$$\mathbf{n}\cdot\big(\mathbf{x}-\mathbf{a}, y - f(\mathbf{a})\big) = 0\,,\quad \text{tj.}\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})\cdot(x_i - a_i) - y + f(\mathbf{a}) = 0\,.$$

Tedy za předpokladu, že v bodě $\mathbf{a}$ existují parciální derivace funkce $y = f(\mathbf{x})$, a že v bodě $[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$ existuje tečná nadrovina k nadploše $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definované rovnicí $y = f(\mathbf{x})$, je její rovnice

$$y - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})\cdot(x_i - a_i)\,. \tag{9}$$

`Poznámka.` Nutná podmínka k existenci tečné nadroviny je, aby pro každé dva vektory $\mathbf{t}_1$ a $\mathbf{t}_2$, které leží v tečné nadrovině, v ní ležel také vektor $\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$ (obecněji každá lineární kombinace těchto vektorů). Protože pro každé vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ leží v tečné nadrovině vektory $\mathbf{t}_1 = \big(\mathbf{v}_1, f'_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{a})\big)$ a $\mathbf{t}_2 = \big(\mathbf{v}_2, f'_{\mathbf{v}_2}(\mathbf{a})\big)$. Tedy musí v ní ležet vektor

$$\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 = \big(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, f'_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{a}) + f'_{\mathbf{v}_2}(\mathbf{a})\big)\,.$$

Na druhou stranu v tečné nadrovině leží také vektor

$$\mathbf{t} = \big(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, f'_{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2}(\mathbf{a})\big)\,.$$

Jestliže srovnáme tyto dva vztahy, zjistíme, že nutná podmínka pro existenci tečné nadroviny ke grafu funkce $y = f(\mathbf{x})$ v bodě $[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$ je, aby pro každé $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ platilo

$$f'_{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2}(\mathbf{a}) = f'_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{a}) + f'_{\mathbf{v}_2}(\mathbf{a})\,. \tag{10}$$

Následující příklad ukazuje, že tato rovnost obecně neplatí.

Příklad. V bodě $\mathbf{a} = [0,0]$ najděte derivace funkce $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ podle vektorů $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ a $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = (1,1)$.

Řešení: Podle definice sestrojíme pro výpočet jednotlivých derivaci funkce

$$F_1(t) = f(t,0) = t\,, \qquad F_2(t) = f(0,t) = t\,, \qquad F_3(t) = f(t,t) = t\sqrt[3]{2}\,.$$

Z toho dostaneme

$$f'_{\mathbf{e}_1}(0,0) = f'_{\mathbf{e}_2}(0,0) = 1 \quad \text{a} \quad f'_{\mathbf{v}}(0,0) = \sqrt[3]{2} \neq f'_{\mathbf{e}_1}(0,0) + f'_{\mathbf{e}_2}(0,0) = 2\,.$$

Dokonce ani když platí (10) pro každé $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$, nemusí existovat tečná nadrovina a dokonce funkce $y = f(\mathbf{x})$ nemusí být v bodě $\mathbf{a}$ ani spojitá.

Příklad. Uvažujme funkci

$$f(x,y) = \frac{x^4y^2}{x^8+y^4} \quad \text{pro} \quad [x,y] \neq [0,0] \qquad \text{a} \quad f(0,0) = 0\,.$$

Nechť je $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \neq (0,0)$. Pak je

$$F(t) = f(v_1t, v_2t) = \frac{v_1^4v_2^2t^2}{v_2^4 + v_1^8t^4}$$

pro $t \neq 0$ a $F(0) = 0$. Podle definice je

$$F'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{v_1^4v_2^2t}{v_2^4 + v_1^8t^4} = 0$$

(Pro $v_2 = 0$ je funkce rovna nule a pro $v_2 \neq 0$ je to zřejmé).

Tedy pro každé $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ platí (10), ale protože

$$\lim_{\substack{[x,y]\to[0,0]\\ y=x^2}} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^8}{x^8+x^8} = \frac{1}{2} \neq 0\,,$$

není tato funkce v bodě $[0,0]$ ani spojitá.