Přednáška 9

Diferencovatelné funkce a jejich vlastnosti

Diferenciál funkce

Diferenciální počet je založen na tom, že graf dané funkce $y = f(\mathbf{x})$ nahrazujeme v okolí bodu $\mathbf{A} = [\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$ jednoduššími plochami, v prvním přiblížením tečnou nadrovinou. Proto jsou důležité funkce, pro jejichž graf existuje tečná nadrovina v libovolném bodě $[\mathbf{x}, f(\mathbf{x})]$, kde $\mathbf{x} \in X = D_f$.

Obecná n–rozměrná nadrovina v $\mathbb{R}^{n+1}$, která prochází bodem $[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$ a jejíž normála není kolmá na vektor $\mathbf{e}_{n+1}$, má rovnici

$$y - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - a_i)\,, \tag{1}$$

kde c_i jsou reálná čísla. Z těchto nadrovin budeme vybírat tu, která s jistém smyslu nejlépe nahrazuje graf funkce $y = f(\mathbf{x})$ v okolí bodu $[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$.

Rozdíl mezi hodnotou funkce $f(\mathbf{x})$ a hodnotou, kterou dostaneme v bodě $\mathbf{x}$, když nahradíme graf funkce nadrovinou (1), je

$$\eta = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - a_i)\,.$$

Jestliže přesuneme počátek souřadnic do bodu $[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$ a nové souřadnice ve směru os $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, označíme h_i a ve směru osy $\mathbf{e}_{n+1}$ jako Δy, tj. zavedeme proměnné

$$h_i = \Delta x_i = x_i - a_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \qquad \Delta y = y - f(\mathbf{a})\,,$$

je rovnice nadroviny (1)

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} c_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c_i h_i$$

a odchylka η je

$$\eta(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \sum_{i=1}^{n} c_i h_i = f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{c} \cdot \mathbf{h}\,, \tag{2}$$

kde $\mathbf{c} \cdot \mathbf{h}$ je skalární součin vektorů $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ a $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$.

Naše snaha bude zvolit vektor $\mathbf{c}$, tj. čísla c_i, tak, aby absolutní hodnota funkce $\eta(\mathbf{a}, \mathbf{h})$ byla pro malá $\|h\|$ co nejmenší.

Budeme postupovat analogicky jako v případě funkce jedné proměnné, tj. $n = 1$. Tam je $\mathbf{a} = a$, $\mathbf{h} = h$ a

$$\eta(a, h) = f(a + h) - f(a) - ch\,.$$

Z této rovnice plyne pro $h \neq 0$ vztah

$$\frac{\bigl|\eta(a, h)\bigr|}{|h|} = \Bigl|\frac{f(a + h) - f(a) - ch}{h}\Bigr| = \Bigl|\frac{f(a + h) - f(a)}{h} - c\Bigr|\,. \tag{3}$$

Aby byla přímka $\Delta y = ch$, tj. $y - f(a) = c(x-a)$, tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[a, f(a)]$ museli jsme zvolit

$$c = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,.$$

Ze vztahu (3) je vidět, že tento požadavek je ekvivalentní tomu, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{\bigl|\eta(a,h)\bigr|}{|h|} = 0\,.$$

Proto budeme pro funkci n proměnných po vektoru $\mathbf{c}$ požadovat, aby platilo

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{\bigl|\eta(\mathbf{a},\mathbf{h})\bigr|}{\|\mathbf{h}\|} = 0\,. \tag{4}$$

Definice. Nechť je dána funkce $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$, a bod $\mathbf{a} \in X^\circ$. Jestliže existují reálná čísla $c_1, c_2, \dots, c_n$ taková, že pro funkci $\eta(\mathbf{a},\mathbf{h})$ definovanou vztahem (2) platí (4), říkáme, že funkce $y = f(\mathbf{x})$ je *diferencovatelná* v bodě $\mathbf{a}$.

Je-li funkce $f = f(\mathbf{x})$ diferencovatelná v bodě $\mathbf{a}$ a $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ takové, že platí (4), nazýváme lineární funkci n proměnných $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, definovanou vztahem

$$\mathrm{d}f(\mathbf{a},\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} c_i h_i = \mathbf{c} \cdot \mathbf{h} \tag{5}$$

diferenciál funkce $y = f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$.

Definice. Jestliže má funkce $y = f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ diferenciál (5), nazývá se nadrovina s rovnicí

$$y - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - a_i) \tag{6}$$

tečná rovina ke grafu funkce $y = f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{A} = [\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$.

`Poznámka.` Diferenciál funkce se často používá k nahrazení funkce $y = f(\mathbf{x})$ v okolí bodu $\mathbf{a}$ lineární funkcí. Jestliže označíme $\Delta y = \Delta f = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})$ rozdíl (diferenci) hodnoty funkce v bodě $\mathbf{x}$ a v bodě $\mathbf{a}$ a $\Delta x_i = x_i - a_i$ rozdíl (diferenci) hodnot nezávisle proměnné, používá se, např. při odhadu chyby měření ve fyzice, pro konečné diference vztah

$$\Delta y = \Delta f \approx \sum_{i=1}^{n} c_i \Delta x_i\,,$$

kde c_i jsou reálá čísla v diferenciálu (5). Samotný diferenciál pak vzniká uvedeným limitním přechodem, ve kterém se formálně nahradí konečné diference Δy a Δx_i jejich infinitezimálními analogiemi $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}x_i$. Proto se často prožívá pro diferenciál funkce $y = f(\mathbf{x})$ značení

$$\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} c_i \,\mathrm{d}x_i\,.$$

Později uvidíme početní výhody tohoto značení.

`Poznámka.` Když srovnáme definici diferenciálu (5) a tečné nadroviny (6), vidíme, že se jedná o tytéž objekty. Vztah pro diferenciál je vlastně rovnice tečné nadroviny v souřadnicích $\mathrm{d}f = y - f(\mathbf{a})$ a $h_i = x_i - a_i$.

Podobně lze definovat diferenciál zobrazeni $\mathbf{F} : X \to \mathbb{R}^k$, kde $X \subset \mathbb{R}^n$. Je-li $\mathbf{a} \in X^\circ$ sestrojíme pro "malá" $\mathbf{h}$ zobrazeni

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \mathbf{C}\mathbf{h}\,,$$

kde $\mathbf{C}$ je matice typu $k \times n$. V souřadnicích lze tuto rovnici zapsat ve tvaru

$$\eta_i(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = F_i(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F_i(\mathbf{a}) - \sum_{j=1}^{n} C_{ij} h_j\,.$$

Definice. Jestliže existuje matice $\mathbf{C}$ taková, že

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{\|\boldsymbol{\eta}(\mathbf{a}, \mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0\,,$$

nazývá se zobrazení $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ *diferencovatelné* v bodě $\mathbf{a}$ a lineární zobrazení proměnné $\mathbf{h}$ definované vztahem

$$\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \mathbf{C}\mathbf{h}$$

diferenciál zobrazení $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$.

Věta. Zobrazení $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ je diferencovatelné v bodě $\mathbf{a}$ právě tehdy, když jsou všechny jeho složky diferencovatelné funkce v bodě $\mathbf{a}$ a platí

$$\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \big(\mathrm{d}F_1(\mathbf{a}, \mathbf{h}), \mathrm{d}F_2(\mathbf{a}, \mathbf{h}), \dots, \mathrm{d}F_k(\mathbf{a}, \mathbf{h})\big)\,.$$

`Poznámka.` Diferenciály, které jsme definovali výše, se nazývají *úplné* nebo *totální* diferenciály. To souvisí s tím, že jsme vektor $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, o který jsme se posouvali z daného bodu $\mathbf{a}$ zvolili tak, abychom dostali okolí $U(\mathbf{a})$ bodu $\mathbf{a} \in X^\circ$. Proto jsme měli n lineárně nezávislých posunutí. Je ale možné vybrat podprostor $V \subset \mathbb{R}^n$ dimenze r a požadovat, aby byl vektor $\mathbf{h} \in V$. Pak máme pouze r lineárně nezávislých posunutí a dostáváme tzv. *parciální* diferenciály.
Dále se definují diferenciály funkce vzhledem k množině $M \subset X$. Při jejich definici se požaduje, aby $\mathbf{a} \in M$ a uvažují se pouze takové posunutí $\mathbf{h}$, pro která je $\mathbf{a} + \mathbf{h} \in M$.

Následující věta ukazuje souvislost diferenciálu funkce $y = f(\mathbf{x})$ s derivacemi funkce podle vektoru, speciálně s parciálními derivacemi.

Věta. Je-li funkce $y = f(\mathbf{x})$ diferencovatelná v bodě $\mathbf{a}$, existuje její derivace v bodě $\mathbf{a}$ podle každého vektoru $\mathbf{v}$ a platí

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \mathrm{d}f(\mathbf{a}, \mathbf{v})\,. \tag{7}$$

DŮKAZ. Jestliže má funkce $y = f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ diferenciál $\mathrm{d}f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} c_i h_i$, je

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{\left| f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \sum_{i=1}^{n} c_i h_i \right|}{\|\mathbf{h}\|} = 0\,.$$

Pro $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ je tvrzení (7) triviální. Nechť je $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Pak je také limita vzhledem k množině $\mathbf{h} = t\mathbf{v}$

$$\lim_{\substack{\mathbf{h}\to\mathbf{0}\\ \mathbf{h}=t\mathbf{v}}} \frac{\left| f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \sum_{i=1}^{n} c_i h_i \right|}{\|\mathbf{h}\|} = \lim_{t\to 0} \frac{\left| f(\mathbf{a}+t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a}) - \sum_{i=1}^{n} c_i t v_i \right|}{|t|\|\mathbf{v}\|} = 0\,.$$

Tedy platí

$$\lim_{t\to 0} \left| \frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} - \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \right| = 0\,.$$

Ale to znamená, že

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i = \mathrm{d}f(\mathbf{a},\mathbf{v})\,.$$

Jestliže v této větě zvolíme $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$, dostaneme

$$f'_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{a}) = f'_{,i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = c_i\,.$$

Tedy pokud existuje diferenciál funkce $y = f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$, existují její parciální derivace v bodě $\mathbf{a}$ a platí

$$\mathrm{d}f(\mathbf{a},\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})\, h_i\,. \tag{8}$$

Speciálně rovnice tečné roviny jsou

$$y - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \cdot (x_i - a_i)\,.$$

Definice. Nechť je funkce $y = f(\mathbf{x})$ diferencovatelná v bodě $\mathbf{a}$. Pak vektor

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = \big(f'_{,1}(\mathbf{a}), f'_{,2}(\mathbf{a}), \ldots, f'_{,n}(\mathbf{a})\big) \tag{9}$$

nazýváme *gradient* funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$.

Pomocí gradientu lze diferenciál funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ zapsat jako skalární součin

$$\mathrm{d}f(\mathbf{a},\mathbf{h}) = \big(\operatorname{grad} f(\mathbf{a})\big) \cdot \mathbf{h}$$

a vztah (7) pro derivaci funkce $f(\mathbf{x})$ podle vektoru $\mathbf{v}$ v bodě $\mathbf{a}$ jako

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \big(\operatorname{grad} f(\mathbf{a})\big) \cdot \mathbf{v}\,.$$

`Poznámka.` Abych vysvětlil značení a názvosloví, které se v matematice obvykle používá, vrátím se na chvíli k funkci jedné reálné proměnné $y = f(x)$. Pro ni je diferenciál v bodě a definován jako lineární zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (graf je přímka, která prochází počátkem)

$$\mathrm{d}f(a,h) = ch\,,$$

kde pro reálné číslo c platí

$$\lim_{h\to 0} \frac{\bigl|f(a+h)-f(a)-ch\bigr|}{|h|} = 0\,.$$

Číslo c, pomocí kterého je lineární zobrazení $\mathrm{d}f(a,h)$ definováno, jsme nazvali derivace funkce $f(x)$ v bodě a a označili $f'(a)$, tj. psali jsme

$$\mathrm{d}f(a,h) = f'(a)h\,.$$

Pro zobrazení $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ jsme postupovali podobně. Nejprve jsme definovali diferenciál zobrazení $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ jako lineární zobrazení

$$\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{a},\mathbf{h}) = \mathbf{C}\mathbf{h}\,,$$

kde matice $\mathbf{C}$ má výše zmíněné vlastnosti a určuje toto lineární zobrazení. V analogii s funkcí jedné reálné proměnné se označí $\mathbf{C} = \mathbf{F}'(\mathbf{a})$, tj. diferenciál se zapíše ve tvaru

$$\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{a},\mathbf{h}) = \mathbf{F}'(\mathbf{a})\,\mathbf{h}$$

a matice $\mathbf{F}'(\mathbf{a})$ se nazve *derivace zobrazení* $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$.

Například derivace funkce n proměnných $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ je vektor

$$f'(a) = \bigl(f'_{,1}(\mathbf{a}), f'_{,2}(\mathbf{a}), \dots, f'_{,n}(\mathbf{a})\bigr) = \operatorname{grad} f(\mathbf{a})\,.$$

Pro zobrazení $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \bigl(F_1(\mathbf{x}), F_2,(\mathbf{x}), \dots, F_k(\mathbf{x})\bigr)$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je derivace $\mathbf{F}'(\mathbf{a})$ matice typu $k \times n$ se složkami

$$\bigl(\mathbf{F}'(\mathbf{a})\bigr)_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})\,, \qquad i = 1,\,2,\,\dots,\,k\,, \quad j = 1,\,2,\,\dots,\,n\,.$$

Zatím jsme definovali diferenciál funkce nebo zobrazení v bodě $\mathbf{a}$. Podobně jako pro derivace podle vektoru v bodech, kde existuje diferenciál, definuje zobrazení, které se také nazývá diferenciál.

Definice. Nechť je $f : X \to \mathbb{R}$ a $M \subset X \subset \mathbb{R}^n$. Jestliže je funkce $f(\mathbf{x})$ diferencovatelná v každém bodě množiny M, říkáme, že je *diferencovatelná na množině M*.

Vlastnosti diferencovatelných funkcí

Věta. Jestliže je funkce $y = f(\mathbf{x})$ diferencovatelná v bodě $\mathbf{a}$, je v tomto bodě spojitá.

DŮKAZ: Protože je funkce $y = f(\mathbf{x})$ diferencovatelná v bodě $\mathbf{a}$, existují konstanty $c_1, c_2, \dots, c_n$ takové, že

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \sum_{i=1}^{n} c_i h_i = \eta(\mathbf{a},\mathbf{h}) \quad \text{a} \quad \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\eta(\mathbf{a},\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0\,.$$

Pak je ale také $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \eta(\mathbf{a},\mathbf{h}) = 0$, a proto

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \Bigl(f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a})\Bigr) = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \Bigl(\sum_{i=1}^{n} c_i h_i + \eta(\mathbf{a},\mathbf{h})\Bigr) = 0\,.$$

To ale znamená, že funkce $y = f(\mathbf{x})$ je spojitá v bodě $\mathbf{a}$.

Důsledek. Je-li zobrazení $\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}^k$ diferencovatelné na množině $M \subset X \subset \mathbb{R}^n$, je na množině M spojité.

Pro algebraické operace mezi diferencovatelnými funkcemi platí podobné vztahy jako pro derivace funkce jedné reálné proměnné. Přesněji platí následující věta:

Věta. Nechť jsou funkce $f(\mathbf{x})$ a $g(\mathbf{x})$ diferencovatelné v bodě $\mathbf{a}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ je konstanta. Pak jsou v bodě $\mathbf{a}$ diferencovatelné funkce $\alpha f(\mathbf{x})$, $\big(f + g\big)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$, $\big(f \cdot g\big)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})$ a je-li $g(\mathbf{a}) \neq 0$ také funkce $\left(\dfrac{f}{g}\right)(\mathbf{x}) = \dfrac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$ a platí

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\big(\alpha f\big)(\mathbf{a},\mathbf{h}) &= \alpha\, \mathrm{d}f(\mathbf{a},\mathbf{h})\,, \\
\mathrm{d}\big(f + g\big)(\mathbf{a},\mathbf{h}) &= \mathrm{d}f(\mathbf{a},\mathbf{h}) + \mathrm{d}g(\mathbf{a},\mathbf{h})\,, \\
\mathrm{d}\big(f \cdot g\big)(\mathbf{a},\mathbf{h}) &= g(\mathbf{a}) \cdot \mathrm{d}f(\mathbf{a},\mathbf{h}) + f(\mathbf{a}) \cdot \mathrm{d}g(\mathbf{a},\mathbf{h})\,, \\
\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{a},\mathbf{h}) &= \frac{g(\mathbf{a}) \cdot \mathrm{d}f(\mathbf{a},\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \cdot \mathrm{d}g(\mathbf{a},\mathbf{h})}{g^2(\mathbf{a})}\,.
\end{aligned}$$

Jestliže rozepíšeme zápis zobrazení pomocí složek, plyne z tvrzení této věty:

Věta. Nechť jsou $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ a $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$ diferencovatelná v bodě $\mathbf{a}$ a $\alpha(\mathbf{x})$ je funkce diferencovatelná v bodě $\mathbf{a}$. Pak jsou v bodě $\mathbf{a}$ diferencovatelná zobrazení $\big(\alpha\mathbf{f}\big)(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\big(\mathbf{f} + \mathbf{g}\big)(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})$ a skalární součin zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ a $\mathbf{g}(\mathbf{x})$

$$\big(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}\big)(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^{k} f_r(\mathbf{x})\, g_r(\mathbf{x})$$

a platí

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\big(\alpha\,\mathbf{f}\big)(\mathbf{a},\mathbf{h}) &= \mathbf{f}(\mathbf{a})\,\mathrm{d}\alpha(\mathbf{a},\mathbf{h}) + \alpha(\mathbf{a})\,\mathrm{d}\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{h})\,, \\
\mathrm{d}\big(\mathbf{f} + \mathbf{g}\big)(\mathbf{a},\mathbf{h}) &= \mathrm{d}\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{h}) + \mathrm{d}\mathbf{g}(\mathbf{a},\mathbf{h})\,, \\
\mathrm{d}\big(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}\big)(\mathbf{a},\mathbf{h}) &= \big(\mathrm{d}\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{h})\big)\cdot\mathbf{g}(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \cdot \big(\mathrm{d}\mathbf{g}(\mathbf{a},\mathbf{h})\big)\,.
\end{aligned}$$

Pro diferencovatelné funkce více reálných proměnných platí některá (ne všechna) tvrzení, která jsou analogická větám o diferencovatelných funkcích jedné reálné proměnné. Uvedeme například větu, která je analogická Lagrangeově větě o střední hodnotě. K tomu budeme potřebovat definici tzv. konvexní množiny.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá *konvexní* právě tehdy, když pro každé dva body A a B z množiny M leží v M celá úsečka AB, tj.

$$\forall \mathbf{x},\, \mathbf{y} \in M \quad \text{a} \quad \forall t \in \langle 0, 1\rangle \quad \text{je} \quad \mathbf{z} = \mathbf{x} + \big(\mathbf{y} - \mathbf{x}\big)t = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in M\,.$$

Věta. Nechť je funkce $f(\mathbf{x})$ diferencovatelná na otevřené konvexní množině $M \subset \mathbb{R}^n$. Pak pro každé dva body $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in M$ existuje bod $\mathbf{c} \in M$ takový, že

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \mathrm{d}f\big(\mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{a}\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{c})\,(b_i - a_i)\,. \tag{10}$$

Důkaz. Protože je množina M konvexní, leží pro každé dva body $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in M$ celá úsečka $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a})t$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, v množině M. Protože je funkce $f(\mathbf{x})$ diferencovatelná v M, existuje pro každé $\mathbf{x} \in M$ derivace funkce $f(\mathbf{x})$ podle libovolného vektoru $\mathbf{v}$ a je rovna $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathrm{d}f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} f'_{,i}(\mathbf{x})\, v_i$.

Uvažujme funkce $F(t) = f\big(\mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a})t\big)$ jedné proměnné $t \in \langle 0, 1\rangle$. Podle předpokladů je funkce $F(t)$ spojitá na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a má derivaci $F'(t)$ v každém bodě $t \in (0, 1)$, která je podle definice rovna derivaci funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $(1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ podle vektoru $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje $\tau \in (0, 1)$ takové, že $F(1) - F(0) = F'(\tau)$. Když přepíšeme tuto rovnost pomocí funkce $f(\mathbf{x})$ a označíme $\mathbf{c} = (1 - \tau)\mathbf{a} + \tau\mathbf{b} \in M$, dostaneme

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = f'_{\mathbf{b}-\mathbf{a}}(\mathbf{c}) = \mathrm{d}f(\mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{c})\,(b_i - a_i)\,.$$

Důsledek. Je-li funkce $f(\mathbf{x})$ diferencovatelná na otevřené konvexní množině $M \subset \mathbb{R}^n$ a všechny její parciální derivace jsou na M rovny nule, je funkce $f(\mathbf{x})$ na množině M konstantní.

Důkaz. Nechť je $\mathbf{a} \in M$. Podle předcházející věty pro každé $\mathbf{x} \in M$ existuje $\mathbf{c} \in M$ takové, že

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{c})\,(x_i - a_i) = 0\,,$$

protože je $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{c}) = 0$. To ale znamená, že pro každé $\mathbf{x} \in M$ je $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$, tj. funkce $f(\mathbf{x})$ je konstantní.

`Poznámka`. Uvedená věta platí i za obecnějších předpokladů o množině M, ale my se tím zabývat nebudeme.

Diferenciál a parciální derivace složené funkce

Z předešlých vztahů lze nahlédnout, že pro diferenciály funkcí nebo lépe řečeno zobrazení, platí vztahy, které jsou formálně podobné vztahům známým pro derivaci funkce jedné reálné proměnné. Ještě lépe tato souvislost vynikne ve následující větě o diferenciálu složeného zobrazení.

Věta. Nechť je $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferencovatelné zobrazení v bodě $\mathbf{a}$ a $\mathbf{G} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ diferencovatelné zobrazení v bodě $\mathbf{b} = \mathbf{F}(\mathbf{a})$. Pak je složené zobrazení $\mathbf{H} = \mathbf{G} \circ \mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ (definované vztahem $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}\big(\mathbf{F}(\mathbf{x})\big)$) diferencovatelné v bodě $\mathbf{a}$ a platí

$$\mathrm{d}\mathbf{H}(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \mathrm{d}\mathbf{G}\big(\mathbf{F}(\mathbf{a}), \mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{h})\big). \tag{11}$$

Jestliže budeme psát

$$\mathrm{d}\mathbf{G}(\mathbf{b}, \mathbf{k}) = \mathbf{G}'(\mathbf{b})\,\mathbf{k}\,, \qquad \mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \mathbf{F}'(\mathbf{a})\,\mathbf{h}\,,$$

můžeme vztah pro diferenciál složené funkce (11) zapsat ve tvaru

$$\mathrm{d}\mathbf{H}(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \mathbf{G}'\big(\mathbf{F}(\mathbf{a})\big)\,\mathbf{F}'(\mathbf{a})\,\mathbf{h}\,. \tag{12}$$

Pokud si ještě uvědomíme, že $\mathrm{d}\mathbf{H}(\mathbf{a},\mathbf{h}) = \mathbf{H}'(\mathbf{a})\,\mathbf{h}$, lze vztah (12) zapsat ve tvaru

$$\mathbf{H}'(\mathbf{a})\,\mathbf{h} = \mathbf{G}'\big(\mathbf{F}(\mathbf{a})\big)\,\mathbf{F}'(\mathbf{a})\,\mathbf{h}\,,$$

který platí pro každé $\mathbf{h}$. Ale z toho plyne, že musí pro derivace platit vztah

$$\mathbf{H}'(\mathbf{a}) = \mathbf{G}'\big(\mathbf{F}(\mathbf{a})\big)\,\mathbf{F}'(\mathbf{a})\,, \tag{13}$$

který je podobný jako vztah pro derivaci složené funkce jedné reálné proměnné známý z prvního semestru. Ale uvědomte si, že v případě funkcí více proměnných jsou derivace matice.

`Poznámka.` Tato věta ukazuje, proč je výhodné používat místo proměnné $\mathbf{h}$ značení $\mathbf{h} = \mathrm{d}\mathbf{x}$ neboli ve složkách $h_i = \mathrm{d}x_i$. Jestliže totiž označíme $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ a $\mathbf{z} = \mathbf{G}(\mathbf{y})$, dostaneme

$$\mathrm{d}\mathbf{z} = \mathbf{G}'(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} \quad \text{a} \quad \mathrm{d}\mathbf{y} = \mathbf{F}'(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

a diferenciál složeného zobrazení (12) získáme prostě dosazením za $\mathrm{d}\mathbf{y}$.

Ve složkách mají tyto vztahy tvar

$$\mathrm{d}z_s = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial G_s(\mathbf{y})}{\partial y_r}\,\mathrm{d}y_r \quad \text{a} \quad \mathrm{d}y_r = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_r(\mathbf{x})}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i\,,$$

a tedy

$$\mathrm{d}z_s = \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{m} \frac{\partial G_s(\mathbf{y})}{\partial y_r}\,\frac{\partial F_r(\mathbf{x})}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i\,, \qquad s = 1,\,2,\,\ldots,\,k\,.$$

Velmi často se používá pro diferenciál složeného zobrazení zkrácený zápis

$$\mathrm{d}z_s = \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{m} \frac{\partial z_s}{\partial y_r}\,\frac{\partial y_r}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i\,, \qquad s = 1,\,2,\,\ldots,\,k\,,$$

a rovnost (13) pro parciální derivaci složeného zobrazení se píše jako

$$\frac{\partial z_s}{\partial x_i} = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial z_s}{\partial y_r}\,\frac{\partial y_r}{\partial x_i}\,, \qquad s = 1,\,2,\,\ldots,\,k\,, \quad i = 1,\,2,\,\ldots,\,n\,.$$

Důkaz věty: Protože je zobrazení $\mathbf{F}$ diferencovatelné v bodě $\mathbf{a}$, existují konstanty c_{ri} takové, že pro každé $r = 1,\,2,\,\ldots,\,m$ je

$$F_r(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - F_r(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} c_{ri}h_i + \eta_r(\mathbf{a},\mathbf{h})\,, \qquad \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\big|\eta_r(\mathbf{a},\mathbf{h})\big|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

a protože je zobrazení $\mathbf{G}$ diferencovatelné v bodě $\mathbf{b} = \mathbf{F}(\mathbf{a})$, existují konstanty d_{sr} takové, že pro každé $s = 1,\,2,\,\ldots,\,k$ je

$$G_s(\mathbf{b}+\mathbf{k}) - G_s(\mathbf{b}) = \sum_{r=1}^{m} d_{sr}k_r + \chi_s(\mathbf{b},\mathbf{k})\,, \qquad \lim_{\mathbf{k}\to\mathbf{0}} \frac{\big|\chi_s(\mathbf{b},\mathbf{k})\big|}{\|\mathbf{k}\|} = 0\,.$$

Pak pro $\mathbf{H} = \mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ pomocí těchto vztahů dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{H}(\mathbf{a}) &= \mathbf{G}\big(\mathbf{F}(\mathbf{a}+\mathbf{h})\big) - \mathbf{G}\big(\mathbf{F}(\mathbf{a})\big) = \\
&= \mathbf{G}\big(\mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{Ch} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{a},\mathbf{h})\big) - \mathbf{G}\big(\mathbf{F}(\mathbf{a})\big) = \\
&= \mathbf{G}\big(\mathbf{b} + \mathbf{Ch} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{a},\mathbf{h})\big) - \mathbf{G}(\mathbf{b}) = \\
&= \mathbf{D}\big(\mathbf{Ch} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{a},\mathbf{h})\big) + \boldsymbol{\chi}\big(\mathbf{b}, \mathbf{Ch} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{a},\mathbf{h})\big) = \\
&= \mathbf{DCh} + \mathbf{D}\boldsymbol{\eta}(\mathbf{a},\mathbf{h})\big) + \boldsymbol{\chi}\big(\mathbf{b}, \mathbf{Ch} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{a},\mathbf{h})\big)\,.
\end{aligned}$$

Uvedená věta pak bude dokázána, pokud ukážeme, že pro každé $s = 1, 2, \ldots, k$ je

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\sum\limits_{r=1}^{m} d_{sr}\eta_r(\mathbf{a},\mathbf{h}) + \chi_s\big(\mathbf{b}, \mathbf{Ch} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{a},\mathbf{h})\big)}{\|\mathbf{h}\|} = 0\,.$$

Protože pro každé $r = 1, 2, \ldots, m$ platí $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \dfrac{\big|\eta_r(\mathbf{a},\mathbf{h})\big|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$, je limita prvního členu rovna nule. Zbývá ukázat, že pro každé $s = 1, 2, \ldots, k$ je

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\big|\chi_s\big(\mathbf{b}, \mathbf{Ch} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{a},\mathbf{h})\big)\big|}{\|\mathbf{h}\|} = 0\,.$$

Protože pro každé s platí $\lim\limits_{\mathbf{k}\to\mathbf{0}} \dfrac{\big|\chi_s(\mathbf{b},\mathbf{k})\big|}{\|\mathbf{k}\|} = 0$, jsou funkce

$$\Psi_s(\mathbf{k}) = \begin{cases} \dfrac{\big|\chi_s(\mathbf{b},\mathbf{k})\big|}{\|\mathbf{k}\|} & \text{pro} \;\; \mathbf{k} \neq \mathbf{0}\,, \\ 0 & \text{pro} \;\; \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{cases}$$

spojité v bodě $\mathbf{k} = \mathbf{0}$. Hledaná limita pak je

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\big|\chi_s\big(\mathbf{b}, \mathbf{Ch} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{a},\mathbf{h})\big)\big|}{\|\mathbf{h}\|} = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \Big|\Psi_s\big(\mathbf{Ch} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{a},\mathbf{h})\big)\Big| \cdot \frac{\big\|\mathbf{Ch} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{a},\mathbf{h})\big\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0\,,$$

protože funkce $\Psi_s(\mathbf{k})$ je spojitá v bodě $\mathbf{k} = 0$, $\Psi_s(\mathbf{0}) = 0$, $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \big(\mathbf{Ch} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{a},\mathbf{h})\big) = 0$ a funkce $\dfrac{\big\|\mathbf{Ch} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{a},\mathbf{h})\big\|}{\|\mathbf{h}\|}$ je v okolí bodu $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ omezená.

Speciální případ této věty dostaneme, je-li zobrazení $\mathbf{G}$ funkce. V takovém případě se většinou používá trochu jiné značení. Aby nenastaly zmatky, přepíšeme tvrzení věty v obvyklejším značení.

Jestliže lze funkci $f(\mathbf{x})$ vyjádřit ve tvaru

$$f(\mathbf{x}) = F\big(\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)\,,$$

kde $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ je diferencovatelné zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$ a $F(\mathbf{y})$ je diferencovatelná funkce k proměnných, jedná se o tzv. složenou funkci. Podle (12) platí pro její diferenciál

$$\mathrm{d}f(\mathbf{x}) = F'\big(\mathbf{y}(\mathbf{x})\big) \cdot \mathrm{d}\mathbf{y}(\mathbf{x}) = F'\big(\mathbf{y}(\mathbf{x})\big) \cdot \mathbf{y}'(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,. \tag{14}$$

Ve složkovém zápisu je

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F\big(y_1(x_1, \ldots, x_n), y_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_k(x_1, \ldots, x_n)\big)\,,$$

kde

$$y_r = y_r(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \qquad r = 1, 2, \ldots, k\,,$$

a rovnost (14) má tvar

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_i = \sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_r}\big(\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)\,\frac{\partial y_r}{\partial x_i}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_i\,.$$

Ale protože jsou v této rovnosti všechny proměnné $\mathrm{d}x_i$ nezávislé, musí pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platit vztah

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial y_r}\big(\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)\,\frac{\partial y_r}{\partial x_i}(\mathbf{x})\,. \tag{15}$$

To je vztah pro parciální derivace složené funkce. Uvedeme jej ještě ve formě věty.

Věta. Nechť je $F(\mathbf{y})$ diferencovatelná funkce v bodě $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$ a $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ diferencovatelné zobrazeni v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{b} = \mathbf{y}(\mathbf{a})$. Pak je složená funkce $f(\mathbf{x}) = F\big(\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)$ diferencovatelná v bodě $\mathbf{a}$ a pro její parciální derivace platí (15).

`Poznámka:` V prostoru $\mathbb{R}^3$ se místo proměnných x_i často používají proměnné $x = x_1$, $y = x_2$ a $z = x_3$. Pro funkce $y_r = y_r(\mathbf{x})$ z předcházející věty se pak často používá označení $u = y_1$, $v = y_2$ a $w = y_3$, tj.

$$u = u(x, y, z)\,, \qquad v = v(x, y, z)\,, \qquad w = w(x, y, z)\,.$$

Příklad. Nechť je $f(x, y, z) = F\Big(x^2 + y^2 + z^2, \dfrac{xy}{z}\Big)$, kde $F(u, v)$ je diferencovatelná funkce. Kolik je

$$x(y^2 + z^2)\,\frac{\partial f}{\partial x} - y(x^2 + z^2)\,\frac{\partial f}{\partial y} - z(x^2 - y^2)\,\frac{\partial f}{\partial z}\,? \tag{16}$$

Řešení: Označme

$$u = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{a} \quad v = \frac{xy}{z}\,.$$

Pak je $f(x, y, z) = F\big(u(x, y, z), v(x, y, z)\big)$. Podle vztahu pro parciální derivaci složené funkce (15) je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x} = 2x\,\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{y}{z}\,\frac{\partial F}{\partial v}\,,\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y} = 2y\,\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{x}{z}\,\frac{\partial F}{\partial v}\,,\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial z} = 2z\,\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{xy}{z^2}\,\frac{\partial F}{\partial v}\,.
\end{aligned}$$

Po dosazení do výrazu (16) dostaneme

$$x(y^2 + z^2)\left(2x\,\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{y}{z}\,\frac{\partial F}{\partial v}\right) - y(x^2 + z^2)\left(2y\,\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{x}{z}\,\frac{\partial F}{\partial v}\right) - z(x^2 - y^2)\left(2z\,\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{xy}{z^2}\,\frac{\partial F}{\partial v}\right)$$

a po úpravě je

$$\begin{aligned}
&\Big(2x^2(y^2 + z^2) - 2y^2(x^2 + z^2) - 2z^2(x^2 - y^2)\Big)\frac{\partial F}{\partial u} +\\
&\qquad + \Big(\frac{xy(y^2 + z^2)}{z} - \frac{xy(x^2 + z^2)}{z} + \frac{xy(x^2 - y^2)}{z}\Big)\frac{\partial F}{\partial v} = 0\,.
\end{aligned}$$

Existence diferenciálu, zobrazení třídy $C_1(M)$

Z předchozího víme, že pokud existuje diferenciál funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$, lze jej vyjádřit pomocí parciálních derivací ve tvaru

$$\mathrm{d}f(\mathbf{a},\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})\, h_i\,. \tag{17}$$

Problém ale je, jak zjistit, že diferenciál funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ existuje, tj. jak ukázat, že

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \sum\limits_{i=1}^{n} f'_{,i}(\mathbf{a})\, h_i}{\|\mathbf{h}\|} = 0\,. \tag{18}$$

Tato limita je typu $\frac{0}{0}$ a jak jsme viděli v předchozích přednáškách, není její výpočet zrovna jednoduchý. Následující věta udává předpoklady o parciálních derivacích, které zaručující existenci diferenciálu, a je jedna z důležitých vět diferenciálního počtu. Proto uvedu i její důkaz (důkazy se nezkouší).

Věta. Nechť má funkce $f(\mathbf{x})$ v okolí bodu $\mathbf{a}$ parciální derivace, které jsou spojité v bodě $\mathbf{a}$. Pak je funkce $f(\mathbf{x})$ diferencovatelná v bodě $\mathbf{a}$.

Musíme ukázat, že za uvedených předpokladů platí (18). Nejprve ukážeme následující pomocnou větu:

Lemma. Nechť má funkce $f(\mathbf{x})$ na množině

$$M = \langle a_1-\varepsilon_1, a_1+\varepsilon_1\rangle \times \langle a_2-\varepsilon_2, a_2+\varepsilon_2\rangle \times \ldots \times \langle a_n-\varepsilon_n, a_n+\varepsilon_n\rangle$$

všechny parciální derivace. Pak pro každé $\mathbf{b}\in M$ existují body $\mathbf{c}^{(1)}$, $\mathbf{c}^{(2)}$, …, $\mathbf{c}^{(n)}\in M$ takové, že

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\mathbf{c}^{(i)}\big)\big(b_i - a_i\big)\,. \tag{19}$$

`Poznámka.` Na rozdíl od podobné věty, kterou jsme uvedli výše, v Lemmatu nepředpokládáme, že je funkce $f(\mathbf{x})$ diferencovatelná na množině M a parciální derivace v (19) se na rozdíl od (10) berou různých bodech $\mathbf{c}^{(i)}$.

Důkaz lemmatu. Nechť $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Nechť je $\boldsymbol{c}_1 = (b_1, a_2, \ldots, a_n) \in M$. Protože je funkce $F(t) = f\big(\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{a})t\big)$, $t\in\langle 0,1\rangle$, podle předpokladu spojitá a pro $t\in(0,1)$ má derivaci $F'(t) = f'_{,1}\big(\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{a})t\big)\,\big(b_1 - a_1\big)$, existuje podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě $\tau_1\in(0,1)$ takové, že $F(1) - F(0) = F'(\tau_1)$, neboli

$$f(\boldsymbol{c}_1) - f(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\big(\boldsymbol{c}^{(1)}\big)\big(b_1 - a_1\big)\,,$$

kde $\boldsymbol{c}^{(1)} = \boldsymbol{a} + \big(\boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{a}\big)\tau_1 = \big((1-\tau_1)a_1 + \tau_1 b_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\big) \in M$.

Nechť je $\boldsymbol{c}_2 = \big(b_1, b_2, a_3, \ldots, a_n\big) \in M$. Podobnou úvahou se ukáže, že existuje $\tau_2\in(0,1)$ takové, že pro bod $\boldsymbol{c}^{(2)} = \big(b_1, (1-\tau_2)a_2 + \tau_2 b_2, a_3, \ldots, a_n\big) \in M$ platí

$$f(\boldsymbol{c}_2) - f(\boldsymbol{c}_1) = \frac{\partial f}{\partial x_2}\big(\boldsymbol{c}^{(2)}\big)\big(b_2 - a_2\big)\,.$$

Jestliže budeme v této konstrukci pokračovat, sestrojíme pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$ body $\boldsymbol{c}_k = (b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ a $\boldsymbol{c}^{(k)} = \bigl(b_1, \ldots, b_{k-1}, (1-\tau_k)a_k + \tau_k b_k, a_{k+1}, \ldots, a_n\bigr)$, $\tau_k(0,1)$, pro které platí

$$f(\boldsymbol{c}_k) - f(\boldsymbol{c}_{k-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}\bigl(\boldsymbol{c}^{(k)}\bigr)\bigl(b_k - a_k\bigr)\,.$$

A protože $\boldsymbol{c}_0 = \boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{c}_n = \boldsymbol{b}$, dostaneme sečtením těchto rovností dokazovaný vztah.

Důkaz věty. Protože podle předpokladů věty existují parciální derivace v jistém okolí bodu $\mathbf{a}$, lze použít při důkazu věty výsledků uvedeného Lemmatu. Pak pro dostatečně malá $\|\mathbf{h}\|$ existují body $\mathbf{c}^{(i)}$ takové, že

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})\, h_i = \sum_{i=1}^{n} \Bigl(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{c}^{(i)}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})\Bigr) h_i\,.$$

Tvrzení věty plyne z toho, že $\dfrac{|h_i|}{\|\mathbf{h}\|} \le 1$, pro každé i je $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \mathbf{c}^{(i)} = \mathbf{a}$ a spojitosti parciálních derivací v bodě $\mathbf{a}$.

Z uvedené věty plyne, že když má funkce $f(\mathbf{x})$ na otevřené množině M spojité parciální derivace, je na M diferencovatelná. Protože se předpoklad spojitosti parciálních derivací vyskytuje často, zavádí se pro takové funkce speciální pojmenování.

Definice. Jestliže má zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ na otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^n$ spojité parciální derivace, tj. všechny jeho složky $f_r(\mathbf{x})$ mají na množině M spojité parciální derivace, nazývá se *zobrazení třídy* C_1 na množině M.

Množina všech zobrazení třídy C_1 na množině M se obvykle značí $C_1(M)$.

Věta. Je-li zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in C_1(M)$, je na množině M diferencovatelné.

Poznámka. Spojitá zobrazení na otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývají zobrazení třídy C_0 na množině M a značí se $C_0(M)$. Protože zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in C_1(M)$ je diferencovatelné, a proto i spojité, platí inkluze $C_1(M) \subset C_0(M)$.

Na závěr této přednášky uvedeme ještě jednu větu, která je důsledkem uvedeného Lemmatu.

Věta. Jestliže má funkce $f(\mathbf{x})$ v nějakém okolí bodu $\mathbf{a}$ parciální derivace, které jsou spojité v bodě $\mathbf{a}$, pak existuje okolí bodu $\mathbf{a}$, ve kterém je funkce $f(\mathbf{x})$ spojitá.

Důkaz. Protože předpokládáme, že parciální derivace jsou spojité v bodě $\mathbf{a}$, jsou v jistém okolí $U_\delta(\mathbf{a})$ omezené. Nechť je $\mathbf{x} \in U_\delta(\mathbf{a})$. Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že krychle $\mathcal{K}$ se středem v bodě $\mathbf{x}$ a hranami délky 2ε, které jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami leží v $U_\delta(\mathbf{a})$. Pro každé $\mathbf{y} \in \mathcal{K}$ existují podle Lemmatu body $\mathbf{c}^{(i)} \in \mathcal{K}$ takové, že

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigl(\mathbf{c}^{(i)}\bigr)\bigl(y_i - x_i\bigr)\,.$$

A protože $\mathbf{c}^{(i)} \in \mathcal{K}$, jsou všechny parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\bigl(\mathbf{c}^{(i)}\bigr)$ omezené. Ale z toho plyne, že $\lim\limits_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}}\bigl(f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\bigr) = 0$.