

Příklad 1

Najděte definiční obor funkce $f(x) = \ln \left(\arcsin \frac{1+x}{1-x} \right)$. $[D_f = (-1, 0)]$

Najděte definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{2 \arccos \frac{x}{1+x}} - \pi$. $[D_f = \langle -\frac{1}{2}, 0 \rangle]$

Najděte definiční obor funkce $f(x) = (9 \operatorname{arctg}^2 2x - \pi^2)^{\sin x}$.
 $[D_f = (-\infty, -\frac{1}{2}\sqrt{3}) \cup (\frac{1}{2}\sqrt{3}, +\infty)]$

Najděte rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = x^3 + x - 2$, která je rovnoběžná s přímkou $y = 4x - 1$.
 $[4x - y - 4 = 0 \text{ nebo } 4x - y = 0]$

Najděte rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$, která je kolmá k přímce $2x - 6y + 1 = 0$.
 $[3x + y + 6 = 0]$

Najděte rovnici normály ke grafu funkce $f(x) = x \ln x$, která je rovnoběžná s přímkou $2x - 2y + 3 = 0$.
 $[x - y - 3e^{-2} = 0]$

Najděte rovnice tečen k hyperbole $7x^2 - 2y^2 = 14$, které jsou kolmé k přímce $2x + 4y - 3 = 0$.
 $[2x - y - 1 = 0 \text{ nebo } 2x - y + 1 = 0]$

Najděte rovnice tečen k parabole $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$, které procházejí bodem $A = [1; 2]$.
 $[y = 2 \text{ nebo } y = 2x]$

Najděte rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = 2x^2 - 1$, která prochází bodem $A = [2; 5]$.
 $[4x - y = 3 \text{ nebo } 12x - y = 19]$

Najděte rovnici tečen ke grafu funkce $f(x) = \frac{1}{x}$, které procházejí bodem $A = [-1; 3]$.
 $[x + y - 2 = 0 \text{ nebo } 9x + y + 6 = 0]$

Najděte dvacátou derivaci funkce $f(x) = x^2 \sin x$.
 $[f^{(20)}(x) = (x^2 - 380) \sin x - 40x \cos x]$

Najděte desátou derivaci funkce $f(x) = (x + 1) \cos 2x$.
 $[f^{(10)}(x) = -2^{10}((x + 1) \cos 2x + 5 \sin 2x)]$

Najděte otevřené intervaly, ve kterých je funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$$

konstantní, a určete hodnotu funkce $f(x)$ na každém z těchto intervalů.

$$\left[\text{na intervalu } (-\infty, -1) \text{ je } f(x) = -\frac{3}{4}\pi \text{ a na intervalu } (-1, +\infty) \text{ je } f(x) = \frac{1}{4}\pi. \right]$$

Najděte otevřené intervaly, ve kterých je funkce

$$f(x) = 2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

konstantní, a určete hodnotu funkce $f(x)$ na každém z těchto intervalů.

$$\left[\text{na intervalu } (-\infty, -1) \text{ je } f(x) = -\pi \text{ a na intervalu } (1, +\infty) \text{ je } f(x) = \pi. \right]$$

Najděte otevřené intervaly, ve kterých je funkce

$$f(x) = 2 \operatorname{arctg} x - \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

konstantní, a určete hodnotu funkce $f(x)$ na každém z těchto intervalů.

$$\left[\text{na intervalu } (0, +\infty) \text{ je } f(x) = 0. \right]$$

Určete definiční obor funkce $f(x) = \ln \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ a nalezněte rovnici tečen ke grafu této funkce v bodech $[\frac{1}{2}; ?]$ a $[-\frac{1}{2}; ?]$.

$$\left[D_f = (0, 1); \text{ tečna v bodě } [\frac{1}{2}, -\ln \sqrt{3}] \text{ je } 8x - 3y - 4 - 3 \ln \sqrt{3} = 0; x = -\frac{1}{2} \notin D_f. \right]$$

Určete definiční obor funkce $f(x) = \ln \frac{3-x^2}{3x^3}$ a nalezněte rovnici tečen ke grafu této funkce v bodech $[2; ?]$ a $[1; ?]$.

$$\left[D_f = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}); \right. \\ \left. x = 2 \notin D_f; \text{ tečna v bodě } [1, \ln \frac{2}{3}] \text{ je } 4x + y - 4 - \ln \frac{2}{3} = 0. \right]$$

Určete definiční obor funkce $f(x) = (e^2 - x^2)^{\sin x}$ a nalezněte rovnici tečen ke grafu této funkce v bodech $[3; ?]$ a $[0; ?]$.

$$\left[D_f = (-e, e); x = 3 \notin D_f; \text{ tečna v bodě } [0; 1] \text{ je } 2x - y + 1 = 0. \right]$$

Určete definiční obor funkce $f(x) = (\cos x)^{\cosh x} + \operatorname{arctg} 3x$ a nalezněte rovnici tečen ke grafu této funkce v bodech $[0; ?]$ a $[\frac{2}{3}\pi; ?]$.

$$\left[D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\frac{1}{2}\pi + 2k\pi, \frac{1}{2}\pi + 2k\pi); \right. \\ \left. \text{tečna v bodě } [0; 1] \text{ je } 3x - y + 1 = 0; \text{ bod } x = \frac{2}{3}\pi \notin D_f. \right]$$

Určete definiční obor funkce $f(x) = (e^2 - x^2)^{\sin x} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2}x$ a nalezněte její diferenciály v bodech $x_1 = 0$ a $x_2 = -4$.

$$\left[D_f = (-e, e); \text{ diferenciál v bodě } x = 0 \text{ je } df(0; h) = \frac{5}{2}h; \text{ bod } x = -4 \notin D_f. \right]$$

Určete definiční obor funkce $f(x) = (\cos x)^{2x} + \arccos \frac{1}{2}x$ a nalezněte rovnici normál ke grafu této funkce v bodech $[0; ?]$ a $[\pi; ?]$.

$$\left[D_f = \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right); \right. \\ \left. \text{normála v bodě } [0; 1 + \frac{1}{2}\pi] \text{ je } 4x - 2y + 2 + \pi = 0; \text{ bod } x = \pi \notin D_f. \right]$$

Určete definiční obor funkce $f(x) = (\cos x)^{2x} + \arcsin \frac{1}{3}x$ a nalezněte rovnici tečen ke grafu této funkce v bodech $[0; ?]$ a $[2\pi; ?]$.

$$\left[D_f = \left(-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi\right); \text{tečna v bodě } [0; 1] \text{ je } x - 3y + 3 = 0; \text{ bod } x = 2\pi \notin D_f. \right]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = (1 - 2x)^{\cos x}$ v bodě $[0; f(0)]$.

$$[2x + y - 1 = 0.]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = \sqrt[2]{x}$ v bodě $[1; f(1)]$.

$$[x - 2y + 1 = 0.]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = x^{x(x+1)}$ v bodě $[1; f(1)]$.

$$[2x - y - 1 = 0.]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = (1 - 3x)^{e^x}$ v bodě $[0; f(0)]$.

$$[3x + y - 1 = 0.]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = (1 + 2 \sin x)^{\cos x}$ v bodě $[0; f(0)]$.

$$[2x - y + 1 = 0.]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = (\cos x + 2 \sin x)^{x+1}$ v bodě $[0; f(0)]$.

$$[2x - y + 1 = 0.]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = (1 - 3 \sin x)^{\cos x}$ v bodě $[0; f(0)]$.

$$[3x + y - 1 = 0.]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = (1 + \cos x)^{2 \sin x}$ v bodě $[\frac{1}{2}\pi; f(\frac{1}{2}\pi)]$.

$$[2x + y - \pi - 1 = 0.]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = (1 + \operatorname{tg} x)^{x-2}$ v bodě $[0; f(0)]$.

$$[2x + y - 1 = 0.]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = (1 + 2 \ln x)^x$ v bodě $[1; f(1)]$.

$$[2x - y - 1 = 0.]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = (1 + \sin 2x)^{\cos x}$ v bodě $[0; f(0)]$.

$$[2x - y + 1 = 0.]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = (\operatorname{tg} x)^x$ v bodě $[\frac{1}{4}\pi; f(\frac{1}{4}\pi)]$.

$$[\pi x - 2y + 2 - \frac{1}{4}\pi^2 = 0.]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = (\cos x + \sin 2x)^{\cos x}$ v bodě $[0; f(0)]$.

$$[2x - y + 1 = 0.]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = (2e^x - \cos x)^{2x+1}$ v bodě $[0; f(0)]$.

$$[2x - y + 1 = 0.]$$

Napište rovnici normály ke grafu funkce $f(x) = (\sin x + 2 \cos x)^x$ v bodě $[\frac{1}{2}\pi; f(\frac{1}{2}\pi)]$.

$$[2x - 2\pi y + \pi = 0.]$$

Napište rovnici normály ke grafu funkce $f(x) = (\sin x + \sin 2x)^x$ v bodě $[\frac{1}{2}\pi; f(\frac{1}{2}\pi)]$.

$$[2x - 2\pi y + \pi = 0.]$$

Napište rovnici normály ke grafu funkce $f(x) = (e^x - 3 \sin x)^{\cos 2x}$ v bodě $[0; f(0)]$.

$$[x - 2y + 2 = 0.]$$

Napište rovnici normály ke grafu funkce $f(x) = (x + \ln x)^{2x}$ v bodě $[1; f(1)]$.

$$[x + 4y - 5 = 0.]$$

Napište rovnici normály ke grafu funkce $f(x) = (1 + \operatorname{arctg} x)^{2x-1}$ v bodě $[0; f(0)]$.

$$[x - y + 1 = 0.]$$

Napište rovnici normály ke grafu funkce $f(x) = (1 + 2 \arcsin x)^{x-2}$ v bodě $[0; f(0)]$.

$$[x - 4y + 4 = 0.]$$

Napište rovnici normály ke grafu funkce $f(x) = (1 + x)^{\operatorname{arccos} x}$ v bodě $[0; f(0)]$.

$$[2x + \pi y - \pi = 0.]$$

Napište rovnici normály ke grafu funkce $f(x) = (e^x - 2 \sin x)^{1-2x}$ v bodě $[0; f(0)]$.

$$[x - y + 1 = 0.]$$

Napište rovnici normály ke grafu funkce $f(x) = (e^x + \operatorname{tg} x)^{2-x}$ v bodě $[0; f(0)]$.

$$[x + 4y - 4 = 0.]$$

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$. $\left[-\frac{1}{2} \right]$

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{\ln x} \right)$. $\left[-\frac{1}{2} \right]$

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$. $\left[\frac{1}{6} \right]$

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$. $\left[e^{-1/2} \right]$

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow 1} (x^x - 1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$. $\left[-\frac{2}{\pi} \right]$

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\pi - 2 \operatorname{arctg} x)$. $\left[2 \right]$

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$. $\left[-2 \right]$

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \cdot \ln x$. $\left[-\frac{2}{\pi} \right]$

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\pi - 2 \arccos \frac{1}{x} \right)$. $\left[2 \right]$

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\operatorname{arctg} x - x}$. $\left[-\frac{1}{2} \right]$

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3}$. $\left[-\frac{1}{6} \right]$

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow 0+} (\sin 3x)^{1/\ln x}$. $\left[e \right]$

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}$. $\left[\frac{9}{4} \right]$

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$. $\left[\frac{1}{6} \right]$

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x \cos x - \sin x}$. $\left[e^{-1} \right]$

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+1} + \operatorname{tg} 2x$. $\left[e^2 \right]$

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin(\cos x) \cdot \operatorname{tg} x$. $\left[1 \right]$

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$. $\left[e^{-1} \right]$

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^2}$. $\left[1 \right]$

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{1/x}$. $\left[-\frac{2}{\pi} \right]$

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^{x^2}$. [$e^{-1/2}$.]

Najděte limitu $\lim_{x \rightarrow 0_+} (\cotg x)^{\sin 2x}$. [1.]

Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \frac{\ln(4-x)}{9-x^2}$.
[svislé asymptoty $x = 4$ a $x = -3$, vodorovná asymptota $y = 0$ v $-\infty$.]

Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x^2-1}$.
[svislé asymptoty $x = -2$ a $x = 1$, vodorovná asymptota $y = 0$ v $+\infty$.]

Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \left(\frac{x+2}{x-2} \right)^x$.
[svislé asymptoty $x = \pm 2$, vodorovná asymptota $y = e^4$ v $\pm\infty$.]

Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 3 - 2x \operatorname{arctg} x}{x+1}$.
[svislá asymptota $x = -1$,
šikmé asymptoty $y = 2x + 3 - \pi$ v $+\infty$ a $y = 2x + 3 + \pi$ v $-\infty$.]

Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 + e^{-x}}{x^2 + x - 6}$.
[svislé asymptoty $x = 2$ a $x = -3$, šikmá asymptota $y = 3x - 1$ v $+\infty$.]

Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \frac{4x^2}{\sqrt{x^2-1}}$.
[svislé asymptoty $x = \pm 1$, šikmé asymptoty $y = 4x$ v $+\infty$ a $y = -4x$ v $-\infty$.]

Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$.
[svislá asymptota $x = -e^{-1}$, šikmá asymptota $y = x + e^{-1}$ v $\pm\infty$.]

Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}$.
[svislá asymptota $x = 0$.]

Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$.
[šikmé asymptoty $y = -x$ v $\pm\infty$.]

Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2}$.

[šikmé asymptoty $y = x + \frac{1}{3}$ v $\pm\infty$.]

Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x^2 - x}$.

[svislé asymptoty $x = 0$ a $x = 1$.]
