

Příklad 2

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x + 1)^2}$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{rostoucí v intervalech } (-\infty, -1) \text{ a } (\frac{7}{5}, +\infty); \text{ klesající v intervalu } (-1, \frac{7}{5}); \\ \text{v bodě } x = \frac{7}{5} \text{ je lokální minimum } -\frac{1}{24}. \end{array} \right]$$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x - 2)^2}$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{klesající v intervalech } (-\infty, -\frac{7}{4}) \text{ a } (2, +\infty); \text{ rostoucí v intervalu } (-\frac{7}{4}, 2); \\ \text{v bodě } x = -\frac{7}{4} \text{ je lokální minimum } -\frac{1}{15}. \end{array} \right]$$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = \sqrt{x - x^2}$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{rostoucí v intervalu } \langle 0, \frac{1}{2} \rangle; \text{ klesající v intervalu } (\frac{1}{2}, 1); \\ \text{v bodě } x = \frac{1}{2} \text{ je lokální maximum } \frac{1}{2}. \end{array} \right]$$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = x\sqrt[3]{1 - x}$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{rostoucí v intervalu } (-\infty, \frac{3}{4}); \text{ klesající v intervalu } (\frac{3}{4}, +\infty); \\ \text{v bodě } x = \frac{3}{4} \text{ je lokální maximum } \frac{3}{8}\sqrt[3]{2}. \end{array} \right]$$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = \sqrt{x} \ln x$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{klesající v intervalu } (0, e^{-2}); \text{ rostoucí v intervalu } (e^{-2}, +\infty); \\ \text{v bodě } x = e^{-2} \text{ je lokální minimum } -2e^{-1}. \end{array} \right]$$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{klesající v intervalech } (0, 1) \text{ a } (e^2, +\infty); \text{ rostoucí v intervalu } (1, e^2); \\ \text{v bodě } x = 1 \text{ je lokální minimum } 0; \text{ v bodě } x = e^2 \text{ je lokální maximum } 4e^{-2}. \end{array} \right]$$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = x \ln^2 x$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{rostoucí na intervalech } (0, e^{-2}) \text{ a } (1, +\infty); \text{ klesající na intervalu } (e^{-2}, 1); \\ \text{v bodě } x = e^{-2} \text{ je lokální maximum } 4e^{-2}; \text{ v bodě } x = 1 \text{ je lokální minimum } 0. \end{array} \right]$$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

$$\left[\text{klesající na } \mathbb{R}; \text{ nemá lokální extrémů.} \right]$$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = \ln \frac{3 - x}{|x + 5|}$.

$$\left[\text{rostoucí na intervalech } (-\infty, -5) \text{ a } (-5, 3); \text{ nemá lokální extrémů.} \right]$$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1 + x^2}$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{rostoucí na intervalu } (-\infty, 1); \text{ klesající na intervalu } (1, +\infty); \\ \text{v bodě } x = 1 \text{ je lokální maximum } \frac{1}{4} \pi - \ln \sqrt{2}. \end{array} \right]$$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = x^3 e^{-x}$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{rostoucí v intervalu } (-\infty, 3); \text{ klesající v intervalu } (3, +\infty); \\ \text{v bodě } x = 3 \text{ je lokální maximum } 27e^{-3}. \end{array} \right]$$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{1}{1-x}$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{klesající v intervalech } (-\infty, 0), (0, \frac{2}{3}) \text{ a } (2, \infty); \text{ rostoucí v intervalech } (\frac{2}{3}, 1) \text{ a } (1, 2); \\ \text{v bodě } x = \frac{2}{3} \text{ je lokální minimum } 9; \text{ v bodě } x = 2 \text{ je lokální maximum } 1. \end{array} \right]$$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = \ln x + \frac{1}{x^2}$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{klesající v intervalu } (0, \sqrt{2}); \text{ rostoucí v intervalu } (\sqrt{2}, +\infty); \\ \text{v bodě } x = \sqrt{2} \text{ je lokální minimum } \frac{1}{2} (1 + \ln 2). \end{array} \right]$$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = x e^{-x^2+x}$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{klesající v intervalech } (-\infty, -\frac{1}{2}) \text{ a } (1, +\infty); \text{ rostoucí v intervalu } (-\frac{1}{2}, 1); \\ \text{v bodě } x = -\frac{1}{2} \text{ je lokální minimum } -\frac{1}{2} e^{-3/4}, \text{ v bodě } x = 1 \text{ je lokální maximum } 1. \end{array} \right]$$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = (x-3)^2 e^{|x|}$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{klesající v intervalech } (-\infty, 0) \text{ a } (1, 3); \text{ rostoucí v intervalech } (0, 1) \text{ a } (3, +\infty); \\ \text{v bodě } x = 0 \text{ je lokální minimum } 9; \text{ v bodě } x = 1 \text{ je lokální maximum } 4e; \\ \text{v bodě } x = 3 \text{ je lokální minimum } 0. \end{array} \right]$$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = x e^{-\sqrt{x}}$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{rostoucí v intervalu } (0, 4); \text{ klesající v intervalu } (4, +\infty); \\ \text{v bodě } x = 4 \text{ je lokální maximum } 4e^{-2}. \end{array} \right]$$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ konvexní, resp. konkávní, a určete inflexní body této funkce.

$$\left[\begin{array}{l} \text{konkávní v intervalech } (-\infty, -\sqrt{3}) \text{ a } (0, \sqrt{3}); \\ \text{konvexní v intervalech } (-\sqrt{3}, 0) \text{ a } (\sqrt{3}, +\infty); \\ \text{inflexní body jsou } x = \pm\sqrt{3} \text{ a } x = 0. \end{array} \right]$$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ konvexní, resp. konkávní, a určete inflexní body této funkce.

$$\left[\begin{array}{l} \text{konvexní v intervalech } (-\infty, -1) \text{ a } (0, 1); \\ \text{konkávní v intervalech } (-1, 0) \text{ a } (1, +\infty); \\ \text{inflexní bod je } x = 0. \end{array} \right]$$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = \ln(1 + x^3)$ konvexní, resp. konkávní, a určete inflexní body této funkce.

$$\left[\begin{array}{l} \text{konkávní v intervalech } (-1, 0) \text{ a } (\sqrt[3]{2}, +\infty); \text{ konvexní v intervalu } (0, \sqrt[3]{2}); \\ \text{inflexní body jsou } x = 0 \text{ a } x = \sqrt[3]{2}. \end{array} \right]$$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = x \sin(\ln x)$ konvexní, resp. konkávní, a určete inflexní body této funkce.

$$\left[\begin{array}{l} \text{konkávní v intervalech } (e^{(1/4+2k)\pi}, e^{(5/4+2k)\pi}), k \in \mathbb{Z}; \\ \text{konvexní v intervalech } (e^{(5/4+2k)\pi}, e^{(9/4+2k)\pi}), k \in \mathbb{Z}; \\ \text{inflexní body } x = e^{(1/4+k)\pi}, k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right]$$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ konvexní, resp. konkávní, a určete inflexní body této funkce.

$$\left[\begin{array}{l} \text{konkávní v intervalech } (0, 1) \text{ a } (e^2, +\infty); \text{ konvexní v intervalu } (1, e^2); \\ \text{inflexní bod je } x = e^2. \end{array} \right]$$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$ konvexní, resp. konkávní, a určete inflexní body této funkce.

$$\left[\begin{array}{l} \text{konvexní v intervalech } (-\infty, 0) \text{ a } (8, +\infty); \text{ konkávní v intervalu } (0, 8); \\ \text{inflexní body jsou } x = 0 \text{ a } x = 8. \end{array} \right]$$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = \ln \frac{|x-1|}{x+3}$ konvexní, resp. konkávní, a určete inflexní body této funkce.

$$\left[\begin{array}{l} \text{konvexní v intervalu } (-3, -1); \text{ konkávní v intervalech } (-1, 1) \text{ a } (1, +\infty); \\ \text{inflexní bod je } x = -1. \end{array} \right]$$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ konvexní, resp. konkávní, a určete inflexní body této funkce.

$$\left[\begin{array}{l} \text{konkávní v intervalu } (0, e^{3/2}); \text{ konvexní v intervalu } (e^{3/2}, +\infty); \\ \text{inflexní bod je } x = e^{3/2}. \end{array} \right]$$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ konvexní, resp. konkávní, a určete inflexní body této funkce.

$$\left[\begin{array}{l} \text{konvexní v intervalu } (0, 2); \text{ konkávní v intervalu } (2, +\infty); \\ \text{inflexní bod je } x = 2. \end{array} \right]$$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = x \ln^2 x$ konvexní, resp. konkávní, a určete inflexní body této funkce.

$$\left[\begin{array}{l} \text{konkávni v intervalu } (0, e^{-1}); \text{ konvexni v intervalu } (e^{-1}, +\infty); \\ \text{inflexni bod je } x = e^{-1}. \end{array} \right]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = \ln(1 + x^2)$ v jejích inflexních bodech.

$$\left[x - y - 1 + \ln 2 = 0 \text{ v bodě } [1; \ln 2]; x + y + 1 - \ln 2 = 0 \text{ v bodě } [-1; \ln 2] . \right]$$

Najděte rovnice tečen ke grafu funkce $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ v jejích inflexních bodech.

$$\left[x + 2e^3y - 4e^{3/2} = 0 \text{ v bodě } [e^{3/2}; \frac{3}{2}e^{-3/2}] . \right]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ v jejích inflexních bodech.

$$\left[x - 4y + 4 \ln 2 = 0 \text{ v bodě } [2; \frac{1}{2} + \ln 2] . \right]$$

Najděte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která je funkce $f(x) = 2x^2 + \ln|x|$ současně rostoucí a konkávni.

$$\left[x \in (0, \frac{1}{2}) . \right]$$

Najděte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která je funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 6x}$ současně rostoucí a konvexni.

$$\left[x \in (3, 6) . \right]$$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x + 1)^2}$ na intervalu $\langle 0, 4 \rangle$.

$$\left[\text{maximum } 2 \text{ pro } x = 0; \text{ minimum } -\frac{1}{24} \text{ pro } x = \frac{7}{5} . \right]$$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x - 2)^2}$ na intervalu $\langle -4, 1 \rangle$.

$$\left[\text{maximum } 8 \text{ pro } x = 1; \text{ minimum } -\frac{1}{15} \text{ pro } x = -\frac{7}{4} . \right]$$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = (x - 1)^2 e^{-|x|}$ na intervalu $\langle -3, 2 \rangle$.

$$\left[\text{maximum } 4e^{-1} \text{ pro } x = -1; \text{ minimum } 0 \text{ pro } x = 1 . \right]$$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = (x + 1)^2 e^{|x-1|}$ na intervalu $\langle -2, 3 \rangle$.

$$\left[\text{maximum } 16e^2 \text{ pro } x = 3; \text{ minimum } 0 \text{ pro } x = -1 . \right]$$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = \ln x + \frac{2}{x}$ na intervalu $\langle 1, e^2 \rangle$.

$$\left[\text{maximum } 2 + 2e^{-1} \text{ pro } x = e^2; \text{ minimum } 1 + \ln 2 \text{ pro } x = 2 . \right]$$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = \operatorname{arccotg}|x^2 - 2x - 8|$ na intervalu $\langle -3, 2 \rangle$.

$$\left[\text{maximum } \operatorname{arccotg} 0 = \frac{1}{2} \pi \text{ pro } x = -2; \text{ minimum } \operatorname{arctg} 9 \text{ pro } x = 1 . \right]$$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$ na intervalu $\langle -1, 2 \rangle$.

$$\left[\text{maximum } \sqrt[3]{2} \text{ pro } x = -1, \text{ minimum } -\sqrt[3]{4} \text{ pro } x = 2. \right]$$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = x - |\sin 2x|$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

$$\left[\text{maximum } \pi \text{ pro } x = \pi, \text{ minimum } \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ pro } x = \frac{\pi}{6}. \right]$$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = x + |\sin 2x|$ na intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$.

$$\left[\text{maximum } \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ pro } x = \frac{\pi}{3}, \text{ minimum } -\frac{\pi}{2} \text{ pro } x = -\frac{\pi}{2}. \right]$$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = |e^{-x} \sin x|$ na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$$\left[\text{maximum } \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\pi/4} \text{ pro } x = \frac{\pi}{4}, \text{ minimum } 0 \text{ v bodech } x = 0, x = \pi \text{ a } x = 2\pi. \right]$$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = |e^{-x} \cos x|$ na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.

$$\left[\text{maximum } e^\pi \text{ pro } x = -\pi, \text{ minimum } 0 \text{ pro } x = \pm \frac{\pi}{2}. \right]$$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = x \ln^2 x$ na intervalu $\langle e^{-3}, e \rangle$.

$$\left[\text{maximum } e \text{ pro } x = e; \text{ minimum } 0 \text{ pro } x = 1. \right]$$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = 2x + e^{-x}$ na intervalu $\langle -2, 3 \rangle$.

$$\left[\text{maximum } 6 + e^{-3} \text{ pro } x = 3; \text{ minimum } 2(1 - \ln 2) \text{ pro } x = -\ln 2. \right]$$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ na intervalu $\langle e, e^3 \rangle$.

$$\left[\text{maximum } 4e^{-2} \text{ pro } x = e^2; \text{ minimum } e^{-1} \text{ pro } x = e. \right]$$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = x \sin(\ln x)$ na intervalu $\langle 1, e^\pi \rangle$.

$$\left[\text{maximum } \frac{1}{\sqrt{2}} e^{3\pi/4} \text{ pro } x = e^{3\pi/4}; \text{ minimum } 0 \text{ pro } x = 1 \text{ a } x = e^\pi. \right]$$

Pro které číslo x je jeho součet s jeho druhou mocninou minimální?

$$\left[x = -\frac{1}{2}. \right]$$

Pro které kladné číslo x je jeho součet s jeho převrácenou hodnotou $\frac{1}{x}$ minimální?

$$\left[x = 1. \right]$$

Pro které kladné číslo x je jeho rozdíl s jeho druhou odmocninou minimální?

$$\left[x = \frac{1}{4}. \right]$$

Najděte čísla $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$, taková, že $x + y = 1$, pro která je výraz $x^2 y^3$ největší.

$$\left[x = \frac{2}{5} \text{ a } y = \frac{3}{5}. \right]$$

Na hyperbole $\frac{1}{2}x^2 - y^2 = 1$ najděte bod, který je nejbliž bodu $A = [3; 0]$.

$$\left[\text{body } [2; 1] \text{ a } [2; -1]. \right]$$

Který obdélník vepsaný do půlkruhu s poloměrem R má největší obsah?

$$\left[\text{strany obdélníka jsou } \sqrt{2} R \text{ a } \frac{1}{\sqrt{2}} R. \right]$$

Najděte kvádr se čtvercovou podstavou, který má při daném objemu V nejmenší povrch.

$$\left[\text{krychle se stranou } \sqrt[3]{V}. \right]$$

Který válec má při daném objemu V nejmenší povrch?

$$\left[\text{poloměr podstavy je } r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \text{ a výška } v = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2r. \right]$$

Který válec má při daném povrchu S největší objem?

$$\left[\text{poloměr podstavy je } r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}} \text{ a výška } v = \sqrt{\frac{2S}{3\pi}} = 2r. \right]$$

Najděte pravoúhlý trojúhelník, ve kterém je součet přepony a jedné odvěsny roven jedné odvěsny a který má největší obsah.

$$\left[\text{odvěsny jsou } a = \frac{1}{3} \text{ a } b = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ a přepona } c = \frac{2}{3}. \right]$$
