

Příklad 3

Najděte derivaci funkce $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 y}$ v bodě $A = [1, -1]$ ve směru tečny k hyperbole $y = \frac{2 - 3x}{x}$ v bodě A . $\left[\pm \sqrt{\frac{5}{2}} \right]$

Najděte derivaci funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ v bodě $A = [1, 1]$ ve směru tečny ke grafu funkce $y = \sqrt[4]{4 - 3x}$ v bodě A . $\left[\pm \frac{7}{10} \right]$

Najděte derivaci funkce $f(x, y) = x + \sqrt{x + \sqrt{y}}$ v bodě $A = [2, 4]$ ve směru tečny ke grafu funkce $y = x^2$ v bodě A . $\left[\pm \frac{3}{2\sqrt{17}} \right]$

Najděte derivaci funkce $f(x, y) = \arcsin \frac{1 - y}{1 + x}$ v bodě $A = [0, 1]$ ve směru tečny ke grafu funkce $y = (1 + x)^{x-1}$ v bodě A . $\left[\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$

Najděte derivaci funkce $f(x, y) = x^2 y + \ln \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ v bodě $A = [1, 1]$ ve směru normály ke grafu funkce $y = \sqrt[3]{x}$ v bodě A . $\left[\pm \frac{3}{\sqrt{10}} \right]$

Najděte derivaci funkce $f(x, y) = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ v bodě $A = [1, 1]$ ve směru normály ke grafu funkce $y = \frac{1}{x^2}$ v bodě A . $\left[\pm \frac{1}{2\sqrt{5}} \right]$

Najděte derivaci funkce $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ v bodě $A = [1, 2, -2]$ ve směru normály k rovině $4x - y + z = 0$. $[0]$

Najděte derivaci funkce $f(x, y, z) = \operatorname{arctg} \frac{z}{xy}$ v bodě $A = [1, -1, 1]$ ve směru normály k rovině $2x - 2y + z = 0$. $\left[\pm \frac{1}{2} \right]$

Najděte derivaci funkce $f(x, y, z) = \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ v bodě $A = [-3, 4, 5]$ ve směru normály k rovině $3x + y + 4z = 0$. $\left[\pm \frac{1}{2\sqrt{26}} \right]$

Napište rovnici tečné roviny k ploše dané rovnicí $z = x^2 + 4xy + 3y^2$, která je kolmá na přímkou danou rovnicemi $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{1-2z}{1}$. $[z + 5 = 4(x + 4) + 2(y - 3)]$

Napište rovnici tečné roviny k ploše dané rovnicí $z = x^2 - xy + y^2$, která je kolmá na přímkou danou rovnicemi $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{3z-2}{1}$. $[z - 9 = -3x + 6(y - 3)]$

Napište rovnici tečné roviny v bodě $A = [1, -1, 2]$ k ploše \mathcal{S} , která je v okolí bodu A definována rovnicí

$$x \sin(x + y) + y \ln(z - x) + z^2 = 4.$$

$$\left[2x + y + 3z = 7\right]$$

Napište rovnici tečné roviny v bodě $A = [1, 2, 0]$ k ploše \mathcal{S} , která je v okolí bodu A definována rovnicí

$$e^{z \cos \pi(x+y)} - xy + y^2 \cos z = 3.$$

$$\left[2x - y + z = 0\right]$$

Napište rovnici tečné roviny v bodě $A = [0, -1, 1]$ k ploše \mathcal{S} , která je v okolí bodu A definována rovnicí

$$z \operatorname{tg}(2x + y + z) + y \ln(xz + y^2) + y^2 z e^{-x} = 1.$$

$$\left[y + 2z = 1\right]$$

Napište rovnici tečné roviny v bodě $A = [1, -2, 1]$ k ploše \mathcal{S} , která je v okolí bodu A definována rovnicí

$$(x + y)e^{y \sin(x-z)} + z^3 e^{z \operatorname{tg}(2x+y)} = 0.$$

$$\left[5x + 2y + z = 2\right]$$

Napište rovnici tečné roviny v bodě $A = [2, -1, 1]$ k ploše \mathcal{S} , která je v okolí bodu A definována rovnicí

$$xy \ln(x - z^2) + z e^{x(y+z)} = 1.$$

$$\left[2x - 2y - 7z + 1 = 0\right]$$

Napište rovnici tečné roviny v bodě $A = [1, 1, -1]$ k ploše \mathcal{S} , která je v okolí bodu A definována rovnicí

$$z \arcsin(x + 2y + 3z) + (x^2 + y^2) \ln \sqrt{1 + y - z^2} = 0.$$

$$\left[x + y + z = 1\right]$$

V bodě $A = [1, -1, 2]$ najděte parametrické rovnice tečny ke křivce \mathcal{C} , která v okolí bodu A je dána jako řešení soustavy rovnic

$$z^2 - xy + yz + x \sin(x + y) = 3, \quad xy + xz + yz + 1 = 0.$$

$$\left[x = 1 + 9t, \quad y = -1 - 3t, \quad z = 2 - 4t, \quad t \in \mathbb{R}\right]$$

V bodě $A = [1, 2, 0]$ najděte parametrické rovnice tečny ke křivce \mathcal{C} , která v okolí bodu A je dána jako řešení soustavy rovnic

$$xy + xz + yz = 2, \quad y^2 + z^2 - xy + e^{z \cos \pi(x-y)} = 3.$$

$$\left[x = 1 + 5t, \quad y = 2 + 2t, \quad z = -4t, \quad t \in \mathbb{R}\right]$$

V bodě $A = [0, -1, 1]$ najděte parametrické rovnice tečny ke křivce \mathcal{C} , která v okolí bodu A je dána jako řešení soustavy rovnic

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz = 2, \quad z^2 + 2xz + yz + y \ln(xz + y^2) + y^2 z e^{-x} = 1.$$

$$\left[x = 3t, \quad y = -1 - 2t, \quad z = 1 + t, \quad t \in \mathbb{R} \right]$$

V bodě $A = [1, -2, 1]$ najděte parametrické rovnice tečny ke křivce \mathcal{C} , která v okolí bodu A je dána jako řešení soustavy rovnic

$$x + y + z + 2xyz + 4 = 0, \quad y(x + y) \sin(x - z) + z^3 \operatorname{tg}(2x + y) = 0.$$

$$\left[x = 1 + t, \quad y = -2 + 6t, \quad z = 1 + 5t, \quad t \in \mathbb{R} \right]$$

V bodě $A = [2, -1, 1]$ najděte parametrické rovnice tečny ke křivce \mathcal{C} , která v okolí bodu A je dána jako řešení soustavy rovnic

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3yz + xyz = 1, \quad z^2 + yz + xy \ln(x - z^2) = 0.$$

$$\left[x = 2 + 2t, \quad y = -1 - t, \quad z = 1 + t, \quad t \in \mathbb{R} \right]$$

V bodě $A = [1, 1, -1]$ najděte parametrické rovnice tečny ke křivce \mathcal{C} , která v okolí bodu A je dána jako řešení soustavy rovnic

$$xz + 2yz + 3z^2 + (x^2 + y^2) \ln \sqrt{1 + y - z^2} = 0, \quad x^2 y + xz^2 + y^2 z - y = 0.$$

$$\left[x = 1 + t, \quad y = 1 + 4t, \quad z = -1 - 5t, \quad t \in \mathbb{R} \right]$$

Do rovnice

$$x^2 \frac{\partial f}{\partial x} - y^2 \frac{\partial f}{\partial y} = (x - y)f$$

zaveďte nové proměnné $u = xy$ a $v = \frac{xy}{x + y}$. $\left[u \frac{\partial F}{\partial u} = F \right]$

Nechť je funkce $f(x, y)$ řešením rovnice

$$(x + 2y) \frac{\partial f}{\partial x} - (2x + y) \frac{\partial f}{\partial y} = (x^2 - y^2)f$$

a funkce $F(u, v)$ je definována vztahem $F(\sqrt{x^2 + xy + y^2}, xy) = f(x, y)$. Jakou rovnici splňuje funkce $F(u, v)$? $\left[2 \frac{\partial F}{\partial v} + F = 0 \right]$

Nechť je funkce $f(x, y)$ řešením rovnice

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f.$$

Najděte rovnici pro funkci $F(u, v)$, která je definována vztahem $f(x, y) = uF(u, v)$, kde $u = xy$ a $v = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. $\left[\frac{\partial F}{\partial u} = 0 \right]$

Do rovnice

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f.$$

zaveďte nové proměnné $u = x^2 + y^2$ a $v = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. $\left[u \frac{\partial F}{\partial u} = F \right]$

Nechť je funkce $f(x, y)$ řešením rovnice

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + 2f = 0.$$

Najděte rovnici pro funkci $F(u, v)$, která je definována vztahem $(x + y)^2 f(x, y) = F(u, v)$, kde $u = x + y$ a $v = \sqrt{\frac{x - y}{x + y}}$. $\left[\frac{\partial F}{\partial u} = 0 \right]$

Do rovnice

$$y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} + 2f = 0.$$

zaveďte nové proměnné $u = x^2 - y^2$ a $v = \ln \frac{x - y}{x + y}$. $\left[\frac{\partial F}{\partial v} = F \right]$

Nechť je funkce $f(x, y)$ řešením rovnice

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = f.$$

Najděte rovnici pro funkci $F(u, v)$, která je definována vztahem $f(x, y) = e^{-v} F(u, v)$, kde $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ a $v = \arctg \frac{y}{x}$. $\left[\frac{\partial F}{\partial v} = 0 \right]$

Transformujte diferenciální výraz

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}$$

do polárních souřadnic r a φ , které jsou definovány vztahy $x = r \cos \varphi$ a $y = r \sin \varphi$. $\left[\frac{\partial F}{\partial \varphi} \right]$

Transformujte diferenciální výraz

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$$

do polárních souřadnic r a φ , které jsou definovány vztahy $x = r \cos \varphi$ a $y = r \sin \varphi$. $\left[r \frac{\partial F}{\partial r} \right]$

Do rovnice

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} f$$

zaveďte nové proměnné

$$u = \frac{x}{z}, \quad v = \frac{y}{z}, \quad w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial w} = F \right]$$

Nechť je $f(x, y, z) = x^n F(u, v)$, kde n je konstanta,

$$u = \frac{x}{y^2}, \quad v = \frac{y^3}{z}$$

a funkce $F(u, v)$ má spojitě první parciální derivace. Jak musíte zvolit n a funkci $F(u, v)$, aby platilo

$$2x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + 3z \frac{\partial f}{\partial z} = 5f?$$

$$\left[n = \frac{5}{2}, \text{ funkce } F(u, v) \text{ je libovolná} \right]$$

Nechť je funkce $f(x, y)$ definována vztahem $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$, kde funkce $F(u, v)$ má spojitě druhé parciální derivace a

$$u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \cos y.$$

Vyjádřete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u, v)$.

$$\left[\frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{x \sin y}{x^2 + y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial F}{\partial u} \right]$$

Nechť je funkce $f(x, y)$ definována vztahem $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$, kde funkce $F(u, v)$ má spojitě druhé parciální derivace a

$$u(x, y) = \sqrt{1 + x^2}, \quad v(x, y) = \frac{xy}{x + y}.$$

Vyjádřete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u, v)$.

$$\left[\frac{x^3}{(x + y)^2 \sqrt{1 + x^2}} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{x^2 y^2}{(x + y)^4} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{2xy}{(x + y)^3} \frac{\partial F}{\partial v} \right]$$

Nechť je funkce $f(x, y)$ definována vztahem $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$, kde funkce $F(u, v)$ má spojitě druhé parciální derivace a

$$u(x, y) = \arctg \frac{y}{x}, \quad v(x, y) = e^{x^2}.$$

Vyjádřete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u, v)$.

$$\left[-\frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{2x^2 e^{x^2}}{x^2 + y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial F}{\partial u} \right]$$

Nechť je funkce $f(x, y)$ definována vztahem $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$, kde funkce $F(u, v)$ má spojitě druhé parciální derivace a

$$u(x, y) = \arcsin y, \quad v(x, y) = \frac{y}{x^2}.$$

Vyjádřete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u, v)$.

$$\left[-\frac{2y}{x^3 \sqrt{1 - y^2}} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{2y}{x^5} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - \frac{2}{x^3} \frac{\partial F}{\partial v} \right]$$

Nechť je funkce $f(x, y)$ definována vztahem $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$, kde funkce $F(u, v)$ má spojitě druhé parciální derivace a

$$u(x, y) = \operatorname{tg} x, \quad v(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x}.$$

Vyjádřete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u, v)$.

$$\left[\frac{2y}{x \cos^2 x} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{2y(x^2 - y^2)}{x^3} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - \frac{2y}{x^2} \frac{\partial F}{\partial v} \right]$$

Nechť je funkce $f(x, y)$ definována vztahem $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$, kde funkce $F(u, v)$ má spojitě druhé parciální derivace a

$$u(x, y) = e^{xy}, \quad v(x, y) = \ln \sqrt{1 + y^2}.$$

Vyjádřete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u, v)$.

$$\left[xye^{2xy} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{y^2 e^{xy}}{1 + y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + (1 + xy)e^{xy} \frac{\partial F}{\partial u} \right]$$

Nechť je funkce $f(x, y)$ definována vztahem $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$, kde funkce $F(u, v)$ má spojitě druhé parciální derivace a

$$u(x, y) = \sin xy, \quad v(x, y) = \operatorname{tg} x.$$

Vyjádřete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u, v)$.

$$\left[xy \cos^2 xy \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{x \cos xy}{\cos^2 x} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + (\cos xy - xy \sin xy) \frac{\partial F}{\partial u} \right]$$

Nechť je funkce $f(x, y)$ definována vztahem $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$, kde funkce $F(u, v)$ má spojitě druhé parciální derivace a

$$u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}, \quad v(x, y) = \operatorname{arctg} y.$$

Vyjádřete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u, v)$.

$$\left[-\frac{(x^2 + y^2)^2}{x^3 y^3} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y(1 + y^2)} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{y^2 - x^2}{x^2 y^2} \frac{\partial F}{\partial u} \right]$$

Nechť je funkce $f(x, y)$ definována vztahem $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$, kde funkce $F(u, v)$ má spojitě druhé parciální derivace a

$$u(x, y) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \quad v(x, y) = x^2 + xy + y^2.$$

Vyjádřete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u, v)$.

$$\left[\frac{x + 2y}{\sqrt{1 + x^2}} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + (2x^2 + 5xy + 2y^2) \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{\partial F}{\partial v} \right]$$

Nechť je funkce $f(x, y)$ definována vztahem $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$, kde funkce $F(u, v)$ má spojitě druhé parciální derivace a

$$u(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}, \quad v(x, y) = \cos x.$$

Vyjádřete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u, v)$.

$$\left[-\frac{(x^2 - y^2)^2}{x^3 y^3} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{(x^2 - y^2) \sin x}{xy^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} \frac{\partial F}{\partial u} \right]$$

Nechť je funkce $f(x, y)$ definována vztahem $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$, kde funkce $F(u, v)$ má spojitě druhé parciální derivace a

$$u(x, y) = \arcsin y, \quad v(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Vyjádřete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u, v)$.

$$\left[\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)(1 - y^2)}} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \frac{\partial F}{\partial v} \right]$$

Nechť je funkce $f(x, y)$ definována vztahem $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$, kde funkce $F(u, v)$ má spojitě druhé parciální derivace a

$$u(x, y) = \ln \sqrt{1 + x^2}, \quad v(x, y) = e^{-x^2 - y^2}.$$

Vyjádřete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u, v)$.

$$\left[-\frac{2xye^{-x^2 - y^2}}{1 + x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + 4xye^{-2(x^2 + y^2)} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + 4xye^{-x^2 - y^2} \frac{\partial F}{\partial v} \right]$$

Nechť je funkce $f(x, y)$ definována vztahem $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$, kde funkce $F(u, v)$ má spojitě druhé parciální derivace a

$$u(x, y) = \frac{y^2}{x^2}, \quad v(x, y) = \operatorname{arctg} y.$$

Vyjádřete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u, v)$.

$$\left[-\frac{4y^3}{x^5} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{2y^2}{x^3(1+y^2)} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{4y}{x^3} \frac{\partial F}{\partial u} \right]$$

Nechť je funkce $f(x, y)$ definována vztahem $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$, kde funkce $F(u, v)$ má spojitě druhé parciální derivace a

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y}}, \quad v(x, y) = \ln(1 + x^2).$$

Vyjádřete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u, v)$.

$$\left[-\frac{1}{4y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{x^{3/2}}{y^{3/2}(1+x^2)} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{1}{4y\sqrt{xy}} \frac{\partial F}{\partial u} \right]$$

Nechť je funkce $f(x, y)$ definována vztahem $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$, kde funkce $F(u, v)$ má spojitě druhé parciální derivace a

$$u(x, y) = \frac{1}{y^2}, \quad v(x, y) = \operatorname{arctg} xy.$$

Vyjádřete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u, v)$.

$$\left[-\frac{2}{y^2(1+x^2y^2)} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{xy}{(1+x^2y^2)^2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} \frac{\partial F}{\partial v} \right]$$

Nechť je funkce $f(x, y)$ definována vztahem $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$, kde funkce $F(u, v)$ má spojitě druhé parciální derivace a

$$u(x, y) = \operatorname{arctg} xy, \quad v(x, y) = \sqrt{1-x^2}.$$

Vyjádřete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u, v)$.

$$\left[\frac{xy}{(1+x^2y^2)^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{x^2}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} \frac{\partial F}{\partial u} \right]$$

Nechť je funkce $f(x, y)$ definována vztahem $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$, kde funkce $F(u, v)$ má spojitě druhé parciální derivace a

$$u(x, y) = \cosh x, \quad v(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}.$$

Vyjádřete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u, v)$.

$$\left[-\frac{y \sinh x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{xy}{x^2 - y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{xy}{(x^2 - y^2)^{3/2}} \frac{\partial F}{\partial v} \right]$$

Nechť je funkce $f(x, y)$ definována vztahem $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$, kde funkce $F(u, v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x, y) = \frac{1}{\sin y}, \quad v(x, y) = x^2 y^2.$$

Vyjádřete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u, v)$.

$$\left[-\frac{2xy^2 \cos y}{\sin^2 y} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + 4x^3 y^3 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + 4xy \frac{\partial F}{\partial v} \right]$$

Nechť je funkce $f(x, y)$ definována vztahem $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$, kde funkce $F(u, v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x, y) = \frac{x^2}{y}, \quad v(x, y) = \operatorname{arctg} y.$$

Vyjádřete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u, v)$.

$$\left[-\frac{2x^3}{y^3} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{2x}{y(1+y^2)} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{2x}{y^2} \frac{\partial F}{\partial u} \right]$$

Nechť je funkce $f(x, y)$ definována vztahem $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$, kde funkce $F(u, v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x, y) = \ln(x^2 + y^2), \quad v(x, y) = \operatorname{tg} y.$$

Vyjádřete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u, v)$.

$$\left[\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{2x}{(x^2 + y^2) \cos^2 y} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial F}{\partial u} \right]$$

Nechť je funkce $f(x, y)$ definována vztahem $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$, kde funkce $F(u, v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x, y) = \sin x, \quad v(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

Vyjádřete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u, v)$.

$$\left[-\frac{x \cos x}{x^2 + y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial F}{\partial v} \right]$$

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$.

[v bodě $[0, 0]$ je lokální minimum; ve stacionárním bodě $[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}]$ není lokální extrém.]

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 3xz - 2y + 2z$.

[v bodě $[2, 1, 4]$ lokální minimum; ve stacionárním bodě $[1, 1, 1]$ není lokální extrém.]

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^3 + \frac{3}{2}y^2 + z^2 - 3xy + 2yz + 4y + 2z$.

[v bodě $[2, 4, -5]$ lokální minimum; ve stacionárním bodě $[1, 1, -2]$ není lokální extrém.]

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

[v bodě $[1, \frac{1}{2}]$ lokální minimum; ve stacionárním bodě $[0, 0]$ není lokální extrém.]

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$.

[v bodě $[5, 2]$ je lokální minimum.]

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$.

[ve stacionárním bodě $[1, -2]$ není lokální extrém.]

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz + yz)$.

[v bodě $[2, 2, 2]$ je lokální minimum, ve stacionárním bodě $[0, 0, 0]$ není lokální extrém.]
