

## Příklad 4

Najděte první dvě derivace funkce  $y(x)$ , které je řešením rovnice

$$y = 2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

$$\left[ y'(x) = \frac{y}{x}, \quad y''(x) = 0 \right]$$

---

Najděte první dvě derivace funkce  $y(x)$ , které je řešením rovnice

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

$$\left[ y'(x) = \frac{x+y}{x-y}, \quad y''(x) = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3} \right]$$

---

Nechť je funkce  $y(x)$  definována v okolí bodu  $[1, 0]$  rovnicí

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě  $x = 1$ .

$$\left[ T_2 = (x-1) + (x-1)^2 \right]$$

---

Nechť je funkce  $y(x)$  definována v okolí bodu  $[1, -1]$  rovnicí

$$x^2 + xy + y^2 = \cos(x+y).$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě  $x = 1$ .

$$\left[ T_2 = -1 + (x-1) + 5(x-1)^2 \right]$$

---

Nechť je funkce  $y(x)$  definována v okolí bodu  $[0, 1]$  rovnicí

$$x^2 + xy + y^2 - \ln \sqrt{x^2 + y^2} = 1.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě  $x = 0$ .

$$\left[ T_2 = 1 - x - x^2 \right]$$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[1, 1, 1]$  jako řešení rovnice

$$z^3 + \operatorname{tg}((x-y)z) = x^2 + y^2 - 1.$$

Najděte její parciální derivaci  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 1)$ .

$$\left[ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{8}{9}, \quad z'_x = \frac{1}{3}, \quad z'_y = 1 \right]$$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[1, -1, 1]$  jako řešení rovnice

$$z^3 + xy + 1 = ze^{x^2-y^2}.$$

Najděte její parciální derivaci  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, -1)$ .  $\left[ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{5}{4}, \quad z'_x = \frac{3}{2}, \quad z'_y = \frac{1}{2} \right]$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[1, -1, 1]$  jako řešení rovnice

$$z = 2 + xy + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{z}.$$

Najděte její parciální derivaci  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, -1)$ .  $\left[ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1, \quad z'_x = 0, \quad z'_y = 2 \right]$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[0, 1, 1]$  jako řešení rovnice

$$x^2 - y^2 + z^2 + 2xyz + z \ln \sqrt{x^2 + y^2} = 0.$$

Najděte její parciální derivaci  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 1)$ .  $\left[ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2}, \quad z'_x = -1, \quad z'_y = \frac{1}{2} \right]$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[1, 1, 1]$  jako řešení rovnice

$$z^2 + xyze^{3-x^2-y^2-z^2} = x^2 + y^2.$$

Najděte její parciální derivaci  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 1)$ .  $\left[ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -7, \quad z'_x = z'_y = 3 \right]$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[1, 1, -1]$  jako řešení rovnice

$$x^2 - y^2 + z^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + xz + yz} = 3.$$

Najděte její parciální derivaci  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 1)$ .  $\left[ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{45}{32}, \quad z'_x = \frac{5}{4}, \quad z'_y = -\frac{3}{4} \right]$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[1, -1, 2]$  jako řešení rovnice

$$x^2 + z^2 + xy + y \ln(z - x) = 4,$$

Najděte její parciální derivaci  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, -1)$ .  $\left[ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{9}, \quad z'_x = -\frac{2}{3}, \quad z'_y = -\frac{1}{3} \right]$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[1, 2, 0]$  jako řešení rovnice

$$e^{z \cos(2x-y)} - xy + y^2 \cos z = 3.$$

Najděte její parciální derivaci  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 2)$ .  $\left[ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -17, \quad z'_x = 2, \quad z'_y = -3 \right]$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[0, -1, 1]$  jako řešení rovnice

$$z(2x + y + z) + y \ln(xz + y^2) + y^2 ze^{-x} = 1.$$

Najděte její parciální derivaci  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, -1)$ .  $\left[ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2}, \quad z'_x = 0, \quad z'_y = -\frac{1}{2} \right]$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[1, -2, 1]$  jako řešení rovnice

$$y(x + y) \sin(x - z) + z^2(2x + y) = 0.$$

Najděte její parciální derivaci  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, -2)$ .  $\left[ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 5, \quad z'_x = 2, \quad z'_y = \frac{1}{2} \right]$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[2, -1, 1]$  jako řešení rovnice

$$xy \ln(x - z) + e^{x(y+z)} = 1.$$

Najděte její parciální derivaci  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2, -1)$ .  $\left[ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{5}{8}, \quad z'_x = \frac{1}{2}, \quad z'_y = -\frac{1}{2} \right]$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[1, 1, -1]$  jako řešení rovnice

$$(x^2 + y^2) \ln \sqrt{1 + y - z^2} + z(x + 2y + 3z) = 0.$$

Najděte její parciální derivaci  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 1)$ .  $\left[ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4, \quad z'_x = z'_y = -1 \right]$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[1, 1, 1]$  jako řešení rovnice

$$x^2 + y^2 + xy - x = z^3 + yz.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě  $[1, 1]$ .

$$\left[ T_2 = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1) + \frac{1}{16}(x - 1)^2 - \frac{1}{4}(x - 1)(y - 1) - \frac{1}{16}(y - 1)^2 \right]$$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[1, 1, 1]$  jako řešení rovnice

$$x^2 - y^2 = z^3 - xyz.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě  $[1, 1]$ .

$$\left[ T_2 = 1 + \frac{3}{2}(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1) - \frac{17}{8}(x - 1)^2 + \frac{13}{4}(x - 1)(y - 1) - \frac{9}{8}(y - 1)^2 \right]$$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[1, -1, 1]$  jako řešení rovnice

$$z^3 = x^2 + y^2 - xz - yz + y.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě  $[1, -1]$ .

$$\left[ T_2 = 1 + \frac{1}{3}(x - 1) - \frac{2}{3}(y + 1) + \frac{1}{9}(x - 1)^2 + \frac{5}{9}(x - 1)(y + 1) + \frac{1}{9}(y + 1)^2 \right]$$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[1, -1, 1]$  jako řešení rovnice

$$z^3 - zx^2 + zy^2 + xy = 0.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě  $[1, -1]$ .

$$\left[ T_2 = 1 + (x - 1) + \frac{1}{3}(y + 1) - \frac{1}{9}(x - 1)(y + 1) - \frac{2}{9}(y + 1)^2 \right]$$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[0, -1, 1]$  jako řešení rovnice

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě  $[0, -1]$ .

$$\left[ T_2 = 1 - x - (y + 1) \right]$$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[-1, -1, 1]$  jako řešení rovnice

$$x^2 + y^2 = z^3 + xyz.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě  $[-1, -1]$ .

$$\left[ T_2 = 1 - \frac{1}{4}(x + 1) - \frac{1}{4}(y + 1) + \frac{9}{64}(x + 1)^2 - \frac{15}{32}(x + 1)(y + 1) + \frac{9}{64}(y + 1)^2 \right]$$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[1, 0, 1]$  jako řešení rovnice

$$z^3 - 3xyz - x^2 + y^2 = 0.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě  $[1, 0]$ .

$$\left[ T_2 = 1 + \frac{2}{3}(x - 1) + y - \frac{1}{9}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)y - \frac{1}{3}y^2 \right]$$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[0, 1, 0]$  jako řešení rovnice

$$x^3 + z^3 + y^2 + xy - xz - yz = 1.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě  $[0, 1]$ .

$$\left[ T_2 = x + 2(y - 1) - x^2 - 2x(y - 1) - (y - 1)^2 \right]$$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[-1, 0, 1]$  jako řešení rovnice

$$z^4 - 4yz - x^2 - y^2 - xy = 0.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě  $[-1, 0]$ .

$$\left[ T_2 = 1 - \frac{1}{2}(x + 1) + \frac{3}{4}y - \frac{1}{8}(x + 1)^2 + \frac{7}{8}(x + 1)y + \frac{5}{32}y^2 \right]$$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[1, -1, -1]$  jako řešení rovnice

$$yz^3 + x^2z + xy^2 - y^2 = 0.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě  $[1, -1]$ .

$$\left[ T_2 = -1 + \frac{3}{2}(x - 1) - \frac{1}{2}(y + 1) + \frac{35}{8}(x - 1)^2 - \frac{3}{2}(x - 1)(y + 1) - \frac{3}{8}(y + 1)^2 \right]$$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[1, 1, -1]$  jako řešení rovnice

$$z^3 + xyz^2 + x^2 - y^2 = 0.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě  $[1, 1]$ .

$$\left[ T_2 = -1 - 3(x - 1) + (y - 1) + 11(x - 1)^2 + 17(x - 1)(y - 1) + (y - 1)^2 \right]$$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[1, 0, -1]$  jako řešení rovnice

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě  $[1, 0]$ .

$$\left[ T_2 = -1 - (x - 1) - y \right]$$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[1, 1, 1]$  jako řešení rovnice

$$z^3 - xyz + x^2 - y^2 = 0.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě  $[1, 1]$ .

$$\left[ T_2 = 1 - \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{3}{2}(y - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)^2 + \frac{13}{4}(x - 1)(y - 1) - \frac{17}{8}(y - 1)^2 \right]$$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[2, 1, 1]$  jako řešení rovnice

$$x^3 - y^3 + z^3 - 3xyz = 2.$$

Najděte její diferenciál prvního a druhého řádu v bodě  $[2, 1]$ .

$$\left[ dz = 3 dx - 3 dy, \quad d^2z = 16 dx^2 - 44 dx dy + 28 dy^2. \right]$$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[1, 1, 2]$  jako řešení rovnice

$$x^3 - y^3 + z^3 - 3xyz = 2.$$

Najděte její diferenciál prvního a druhého řádu v bodě  $[1, 1]$ .

$$\left[ dz = \frac{1}{3} dx + dy, \quad d^2z = -\frac{16}{27} dx^2 + \frac{4}{3} dx dy. \right]$$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[1, -1, 1]$  jako řešení rovnice

$$z^3 - x^2z + y^2z + xy = 0.$$

Najděte její diferenciál prvního a druhého řádu v bodě  $[1, -1]$ .

$$\left[ dz = dx + \frac{1}{3} dy, \quad d^2z = -\frac{2}{9} dx dy - \frac{4}{9} dy^2. \right]$$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[1, 1, 1]$  jako řešení rovnice

$$z^3 - xyz^2 + x^2z - y^3 = 0.$$

Najděte její diferenciál prvního a druhého řádu v bodě  $[1, 1]$ .

$$\left[ dz = -\frac{1}{2} dx + 2 dy, \quad d^2z = -\frac{3}{2} dx^2 + 4 dx dy - dy^2. \right]$$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[1, 1, 1]$  jako řešení rovnice

$$z^3 - xyz^2 + x^2 - y^2 = 0.$$

Najděte její diferenciál prvního a druhého řádu v bodě  $[1, 1]$ .

$$\left[ dz = -dx + 3dy, \quad d^2z = -10dx^2 + 34dx dy - 22dy^2. \right]$$

---

Nechť je funkce  $z = z(x, y)$  definována v okolí bodu  $[1, 0, 1]$  jako řešení rovnice

$$z^4 - 2xyz^2 + x^4 - y^3 - 2xz = 0.$$

Najděte její diferenciál prvního a druhého řádu v bodě  $[1, 0]$ .

$$\left[ dz = -dx + dy, \quad d^2z = -14dx^2 + 12dx dy - 2dy^2. \right]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu  $[2, 1, -1]$  pomocí soustavy rovnic

$$x^2 + y^2 - z^2 = 4, \quad x + yz = 1$$

definovány funkce  $y(x)$  a  $z(x)$ . Najděte jejich druhé derivace  $y''(2)$  a  $z''(2)$ .

$$\left[ y'' = \frac{5}{4}, \quad z'' = -\frac{1}{4}; \quad y' = -\frac{1}{2}, \quad z' = -\frac{3}{2} \right]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu  $[1, 1, 1]$  pomocí soustavy rovnic

$$xe^y + ye^x - 2e^z = 0, \quad xy + xz + yz = 3$$

definovány funkce  $y(x)$  a  $z(x)$ . Najděte jejich druhé derivace  $y''(1)$  a  $z''(1)$ .

$$\left[ y'' = 1, \quad z'' = 0; \quad y' = -1, \quad z' = 0 \right]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu  $[1, -1, 1]$  pomocí soustavy rovnic

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 + 3xyz = 0$$

definovány funkce  $y(x)$  a  $z(x)$ . Najděte jejich druhé derivace  $y''(1)$  a  $z''(1)$ .

$$\left[ y'' = -7, \quad z'' = 3; \quad y' = 0, \quad z' = -1 \right]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu  $[1, 1, -1]$  pomocí soustavy rovnic

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad x^2y + y^2z + xz^2 = 1$$

definovány funkce  $y(x)$  a  $z(x)$ . Najděte jejich druhé derivace  $y''(1)$  a  $z''(1)$ .

$$\left[ y'' = 3, \quad z'' = 9; \quad y' = 1, \quad z' = 2 \right]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu  $[1, 1, 0]$  pomocí soustavy rovnic

$$ze^{x^2-y^2} + (x^2 + y^2)e^z = 2, \quad xy + xz + yz = 1$$

definovány funkce  $y(x)$  a  $z(x)$ . Najděte jejich druhé derivace  $y''(1)$  a  $z''(1)$ .

$$\left[ y'' = -2, \quad z'' = 0; \quad y' = -1, \quad z' = 0 \right]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu  $[1, 1, 1]$  pomocí soustavy rovnic

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6, \quad xyz = 1$$

definovány funkce  $y(x)$  a  $z(x)$ . Najděte jejich druhé derivace  $y''(1)$  a  $z''(1)$ .

$$\left[ y'' = 30, \quad z'' = -24; \quad y' = -2, \quad z' = 1 \right]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu  $[2, 1, -1]$  pomocí soustavy rovnic

$$xy + xz + yz + 1 = 0, \quad x^2 - y^2 + z^2 = 4$$

definovány funkce  $y(x)$  a  $z(x)$ . Najděte jejich druhé derivace  $y''(2)$  a  $z''(2)$ .

$$\left[ y'' = -\frac{15}{2}, \quad z'' = \frac{1}{2}; \quad y' = 3, \quad z' = -1 \right]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu  $[1, -1, 1]$  pomocí soustavy rovnic

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + 1 = 0, \quad x + y + z = 1$$

definovány funkce  $y(x)$  a  $z(x)$ . Najděte jejich druhé derivace  $y''(1)$  a  $z''(1)$ .

$$\left[ y'' = -1, \quad z'' = 1; \quad y' = -2, \quad z' = 1 \right]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu  $[1, 1, -1]$  pomocí soustavy rovnic

$$y = e^{x+z}, \quad xy = z^2$$

definovány funkce  $y(x)$  a  $z(x)$ . Najděte jejich druhé derivace  $y''(1)$  a  $z''(1)$ .

$$\left[ y'' = \frac{4}{27}, \quad z'' = \frac{1}{27}; \quad y' = \frac{1}{3}, \quad z' = -\frac{2}{3} \right]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu  $[1, -1, 2]$  pomocí soustavy rovnic

$$z^2 - xy + yz + \sin(x + y) = 3, \quad xy + xz + yz + x - y = 1$$

definovány funkce  $y(x)$  a  $z(x)$ . Najděte jejich druhé derivace  $y''(1)$  a  $z''(1)$ .

$$\left[ y'' = 1, \quad z'' = -\frac{4}{3}; \quad y' = -1, \quad z' = 0 \right]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu  $[1, 2, 0]$  pomocí soustavy rovnic

$$xy + xz + yz - 2z = 2, \quad y^2 + z^2 - xy + e^{xz} = 3$$

definovány funkce  $y(x)$  a  $z(x)$ . Najděte jejich druhé derivace  $y''(1)$  a  $z''(1)$ .

$$\left[ y'' = -32, \quad z'' = 52; \quad y' = 2, \quad z' = -4 \right]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu  $[0, -1, 1]$  pomocí soustavy rovnic

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz = 2, \quad z^2 + 2xz + yz + y \sin xz = 0$$

definovány funkce  $y(x)$  a  $z(x)$ . Najděte jejich druhé derivace  $y''(0)$  a  $z''(0)$ .

$$\left[ y'' = \frac{3}{2}, \quad z'' = \frac{1}{2}; \quad y' = -1, \quad z' = 0 \right]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu  $[2, 1, -1]$  pomocí soustavy rovnic

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz = 2, \quad x^2 + y^2 + z^2 + 3yz + xyz = 1$$

definovány funkce  $y(x)$  a  $z(x)$ . Najděte jejich druhé derivace  $y''(2)$  a  $z''(2)$ .

$$\left[ y'' = 1, \quad z'' = \frac{1}{3}; \quad y' = 0, \quad z' = -1 \right]$$

---