Příklad 4

Najděte první dvě derivace funkce $y(x)$, které je řešením rovnice

$$y = 2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,.$$

$$\left[y'(x) = \frac{y}{x}\,, \quad y''(x) = 0\right]$$

Najděte první dvě derivace funkce $y(x)$, které je řešením rovnice

$$\ln \sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,.$$

$$\left[y'(x) = \frac{x+y}{x-y}\,, \quad y''(x) = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}\right]$$

Nechť je funkce $y(x)$ definována v okolí bodu $[1,0]$ rovnicí

$$\ln \sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $x = 1$.

$$\left[T_2 = (x-1) + (x-1)^2\right]$$

Nechť je funkce $y(x)$ definována v okolí bodu $[1,-1]$ rovnicí

$$x^2 + xy + y^2 = \cos(x+y)\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $x = 1$.

$$\left[T_2 = -1 + (x-1) + 5(x-1)^2\right]$$

Nechť je funkce $y(x)$ definována v okolí bodu $[0,1]$ rovnicí

$$x^2 + xy + y^2 - \ln \sqrt{x^2+y^2} = 1\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $x = 0$.

$$\left[T_2 = 1 - x - x^2\right]$$

Nechť je funkce $z = z(x,y)$ definována v okolí bodu $[1,1,1]$ jako řešení rovnice

$$z^3 + \operatorname{tg}\big((x-y)z\big) = x^2 + y^2 - 1\,.$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1)$. $\qquad \left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{8}{9}\,, \quad z'_x = \tfrac{1}{3}\,, \quad z'_y = 1\right]$

Nechť je funkce $z = z(x,y)$ definována v okolí bodu $[1,-1,1]$ jako řešení rovnice

$$z^3 + xy + 1 = z\mathrm{e}^{x^2-y^2}\,.$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,-1)$. $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{5}{4}\,, \quad z'_x = \frac{3}{2}\,, \quad z'_y = \frac{1}{2}\right]$

Nechť je funkce $z = z(x,y)$ definována v okolí bodu $[1,-1,1]$ jako řešení rovnice

$$z = 2 + xy + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{z}\,.$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,-1)$. $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1\,, \quad z'_x = 0\,, \quad z'_y = 2\right]$

Nechť je funkce $z = z(x,y)$ definována v okolí bodu $[0,1,1]$ jako řešení rovnice

$$x^2 - y^2 + z^2 + 2xyz + z \ln \sqrt{x^2+y^2} = 0\,.$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,1)$. $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{1}{2}\,, \quad z'_x = -1\,, \quad z'_y = \frac{1}{2}\right]$

Nechť je funkce $z = z(x,y)$ definována v okolí bodu $[1,1,1]$ jako řešení rovnice

$$z^2 + xyz\mathrm{e}^{3-x^2-y^2-z^2} = x^2 + y^2\,.$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1)$. $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -7\,, \quad z'_x = z'_y = 3\right]$

Nechť je funkce $z = z(x,y)$ definována v okolí bodu $[1,1,-1]$ jako řešení rovnice

$$x^2 - y^2 + z^2 + 2\sqrt{x^2+y^2+z^2+xz+yz} = 3\,.$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1)$. $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{5}{4}\,, \quad z'_x = \frac{3}{2}\,, \quad z'_y = -\frac{1}{2}\right]$

Nechť je funkce $z = z(x,y)$ definována v okolí bodu $[1,-1,2]$ jako řešení rovnice

$$x^2 + z^2 + xy + y \ln(z-x) = 4\,,$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,-1)$. $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{1}{9}\,, \quad z'_x = -\frac{2}{3}\,, \quad z'_y = -\frac{1}{3}\right]$

Nechť je funkce $z = z(x,y)$ definována v okolí bodu $[1,2,0]$ jako řešení rovnice

$$\mathrm{e}^{z\cos(2x-y)} - xy + y^2 \cos z = 3\,.$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,2)$. $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -17\,, \quad z'_x = 2\,, \quad z'_y = -3\right]$

Nechť je funkce $z = z(x,y)$ definována v okolí bodu $[0,-1,1]$ jako řešení rovnice

$$z(2x+y+z) + y \ln(xz+y^2) + y^2 z\mathrm{e}^{-x} = 1\,.$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,-1)$. $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{1}{2}\,, \quad z'_x = 0\,, \quad z'_y = -\frac{1}{2}\right]$

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, -2, 1]$ jako řešení rovnice

$$y(x + y)\sin(x - z) + z^2(2x + y) = 0\,.$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, -2)$. $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 5\,,\quad z'_x = 2\,,\quad z'_y = \frac{1}{2}\right]$

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[2, -1, 1]$ jako řešení rovnice

$$xy\ln(x - z) + \mathrm{e}^{x(y+z)} = 1\,.$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2, -1)$. $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{5}{8}\,,\quad z'_x = \frac{1}{2}\,,\quad z'_y = -\frac{1}{2}\right]$

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, 1, -1]$ jako řešení rovnice

$$(x^2 + y^2)\ln\sqrt{1 + y - z^2} + z(x + 2y + 3z) = 0\,.$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 1)$. $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4\,,\quad z'_x = z'_y = -1\right]$

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, 1, 1]$ jako řešení rovnice

$$x^2 + y^2 + xy - x = z^3 + yz\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[1, 1]$.

$\left[T_2 = 1 + \frac{1}{2}\,(x - 1) + \frac{1}{2}\,(y - 1) + \frac{1}{16}\,(x - 1)^2 - \frac{1}{4}\,(x - 1)(y - 1) - \frac{1}{16}\,(y - 1)^2\right]$

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, 1, 1]$ jako řešení rovnice

$$x^2 - y^2 = z^3 - xyz\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[1, 1]$.

$\left[T_2 = 1 + \frac{3}{2}\,(x - 1) - \frac{1}{2}\,(y - 1) - \frac{17}{8}\,(x - 1)^2 + \frac{13}{4}\,(x - 1)(y - 1) - \frac{9}{8}\,(y - 1)^2\right]$

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, -1, 1]$ jako řešení rovnice

$$z^3 = x^2 + y^2 - xz - yz + y\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[1, -1]$.

$\left[T_2 = 1 + \frac{1}{3}\,(x - 1) - \frac{2}{3}\,(y + 1) + \frac{1}{9}\,(x - 1)^2 + \frac{5}{9}\,(x - 1)(y + 1) + \frac{1}{9}\,(y + 1)^2\right]$

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, -1, 1]$ jako řešení rovnice

$$z^3 - zx^2 + zy^2 + xy = 0\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[1, -1]$.

$$\left[T_2 = 1 + (x-1) + \tfrac{1}{3}\,(y+1) - \tfrac{1}{9}\,(x-1)(y+1) - \tfrac{2}{9}\,(y+1)^2\right]$$

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[0, -1, 1]$ jako řešení rovnice

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[0, -1]$.

$$\left[T_2 = 1 - x - (y+1)\right]$$

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[-1, -1, 1]$ jako řešení rovnice

$$x^2 + y^2 = z^3 + xyz\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[-1, -1]$.

$$\left[T_2 = 1 - \tfrac{1}{4}\,(x+1) - \tfrac{1}{4}\,(y+1) + \tfrac{9}{64}\,(x+1)^2 - \tfrac{15}{32}\,(x+1)(y+1) + \tfrac{9}{64}\,(y+1)^2\right]$$

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, 0, 1]$ jako řešení rovnice

$$z^3 - 3xyz - x^2 + y^2 = 0\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[1, 0]$.

$$\left[T_2 = 1 + \tfrac{2}{3}\,(x-1) + y - \tfrac{1}{9}\,(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}\,(x-1)y - \tfrac{1}{3}\,y^2\right]$$

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[0, 1, 0]$ jako řešení rovnice

$$x^3 + z^3 + y^2 + xy - xz - yz = 1\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[0, 1]$.

$$\left[T_2 = x + 2(y-1) - x^2 - 2x(y-1) - (y-1)^2\right]$$

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[-1, 0, 1]$ jako řešení rovnice

$$z^4 - 4yz - x^2 - y^2 - xy = 0\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[-1, 0]$.

$$\left[T_2 = 1 - \tfrac{1}{2}\,(x+1) + \tfrac{3}{4}\,y - \tfrac{1}{8}\,(x+1)^2 + \tfrac{7}{8}\,(x+1)y + \tfrac{5}{32}\,y^2\right]$$

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, -1, -1]$ jako řešení rovnice

$$yz^3 + x^2 z + xy^2 - y^2 = 0\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[1, -1]$.

$$\left[T_2 = -1 - \tfrac{1}{2}\,(x-1) - \tfrac{1}{2}\,(y+1) - \tfrac{5}{8}\,(x-1)^2 - \tfrac{3}{2}\,(x-1)(y+1) - \tfrac{3}{8}\,(y+1)^2\right]$$

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, 1, -1]$ jako řešení rovnice

$$z^3 + xyz^2 + x^2 - y^2 = 0\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[1,1]$.

$$\Big[T_2 = -1 - 3(x-1) + (y-1) + 11(x-1)^2 - 17(x-1)(y-1) + 5(y-1)^2\Big]$$

Nechť je funkce $z = z(x,y)$ definována v okolí bodu $[1,0,-1]$ jako řešení rovnice

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[1,0]$.

$$\Big[T_2 = -1 - (x-1) - y\Big]$$

Nechť je funkce $z = z(x,y)$ definována v okolí bodu $[1,1,1]$ jako řešení rovnice

$$z^3 - xyz + x^2 - y^2 = 0\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[1,1]$.

$$\Big[T_2 = 1 - \tfrac{1}{2}\,(x-1) + \tfrac{3}{2}\,(y-1) - \tfrac{9}{8}\,(x-1)^2 + \tfrac{13}{4}\,(x-1)(y-1) - \tfrac{17}{8}\,(y-1)^2\Big]$$

Nechť je funkce $z = z(x,y)$ definována v okolí bodu $[2,1,1]$ jako řešení rovnice

$$x^3 - y^3 + z^3 - 3xyz = 2\,.$$

Najděte její diferenciál prvního a druhého řádu v bodě $[2,1]$.

$$\Big[\mathrm{d}z = 3\,\mathrm{d}x - 3\,\mathrm{d}y\,, \quad \mathrm{d}^2z = 16\,\mathrm{d}x^2 - 44\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 28\,\mathrm{d}y^2\,.\Big]$$

Nechť je funkce $z = z(x,y)$ definována v okolí bodu $[1,1,2]$ jako řešení rovnice

$$x^3 - y^3 + z^3 - 3xyz = 2\,.$$

Najděte její diferenciál prvního a druhého řádu v bodě $[1,1]$.

$$\Big[\mathrm{d}z = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y\,, \quad \mathrm{d}^2z = -\tfrac{16}{27}\,\mathrm{d}x^2 + \tfrac{4}{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.\Big]$$

Nechť je funkce $z = z(x,y)$ definována v okolí bodu $[1,-1,1]$ jako řešení rovnice

$$z^3 - x^2z + y^2z + xy = 0\,.$$

Najděte její diferenciál prvního a druhého řádu v bodě $[1,-1]$.

$$\Big[\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{d}y\,, \quad \mathrm{d}^2z = -\tfrac{2}{9}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \tfrac{4}{9}\,\mathrm{d}y^2\,.\Big]$$

Nechť je funkce $z = z(x,y)$ definována v okolí bodu $[1,1,1]$ jako řešení rovnice

$$z^3 - xyz^2 + x^2z - y^3 = 0\,.$$

Najděte její diferenciál prvního a druhého řádu v bodě $[1,1]$.

$$\Big[\mathrm{d}z = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x + 2\,\mathrm{d}y\,, \quad \mathrm{d}^2z = -\tfrac{3}{2}\,\mathrm{d}x^2 + 4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \mathrm{d}y^2\,.\Big]$$

Nechť je funkce $z = z(x,y)$ definována v okolí bodu $[1,1,1]$ jako řešení rovnice

$$z^3 - xyz^2 + x^2 - y^2 = 0\,.$$

Najděte její diferenciál prvního a druhého řádu v bodě $[1,1]$.

$$\Big[\mathrm{d}z = -\,\mathrm{d}x + 3\,\mathrm{d}y\,, \quad \mathrm{d}^2z = -10\,\mathrm{d}x^2 + 34\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 22\,\mathrm{d}y^2\,.\Big]$$

Nechť je funkce $z = z(x,y)$ definována v okolí bodu $[1,0,1]$ jako řešení rovnice

$$z^4 - 2xyz^2 + x^4 - y^3 - 2xz = 0\,.$$

Najděte její diferenciál prvního a druhého řádu v bodě $[1,0]$.

$$\Big[\mathrm{d}z = -\,\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}y\,, \quad \mathrm{d}^2z = -14\,\mathrm{d}x^2 + 12\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 2\,\mathrm{d}y^2\,.\Big]$$

Nechť jsou v okolí bodu $[2,1,-1]$ pomocí soustavy rovnic

$$x^2 + y^2 - z^2 = 4\,, \qquad x + yz = 1$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(2)$ a $z''(2)$.

$$\Big[y'' = \tfrac{5}{4}\,, \quad z'' = -\tfrac{1}{4}\,; \quad y' = -\tfrac{1}{2}\,, \quad z' = -\tfrac{3}{2}\Big]$$

Nechť jsou v okolí bodu $[1,1,1]$ pomocí soustavy rovnic

$$x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^z = 0\,, \qquad xy + xz + yz = 3$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(1)$ a $z''(1)$.

$$\Big[y'' = 1\,, \quad z'' = 0\,; \quad y' = -1\,, \quad z' = 0\Big]$$

Nechť jsou v okolí bodu $[1,-1,1]$ pomocí soustavy rovnic

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1\,, \qquad x^2 + y^2 + z^2 + 3xyz = 0$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(1)$ a $z''(1)$.

$$\Big[y'' = -7\,, \quad z'' = 3\,; \quad y' = 0\,, \quad z' = -1\Big]$$

Nechť jsou v okolí bodu $[1,1,-1]$ pomocí soustavy rovnic

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3\,, \qquad x^2y + y^2z + xz^2 = 1$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(1)$ a $z''(1)$.

$$\Big[y'' = 3\,, \quad z'' = 9\,; \quad y' = 1\,, \quad z' = 2\Big]$$

Nechť jsou v okolí bodu $[1,1,0]$ pomocí soustavy rovnic

$$z\mathrm{e}^{x^2-y^2} + (x^2+y^2)\mathrm{e}^z = 2\,, \qquad xy + xz + yz = 1$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(1)$ a $z''(1)$.

$$\Big[y'' = -14\,, \quad z'' = 8\,; \quad y' = -1\,, \quad z' = 0\Big]$$

Nechť jsou v okolí bodu $[1,1,1]$ pomocí soustavy rovnic

$$x^2+2y^2+3z^2=6\,,\qquad xyz=1$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(1)$ a $z''(1)$.

$$\Big[y''=30\,,\quad z''=-24\,;\quad y'=-2\,,\quad z'=1\Big]$$

Nechť jsou v okolí bodu $[2,1,-1]$ pomocí soustavy rovnic

$$xy+xz+yz+1=0\,,\qquad x^2-y^2+z^2=4$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(2)$ a $z''(2)$.

$$\Big[y''=-\tfrac{23}{2}\,,\quad z''=\tfrac{9}{2}\,;\quad y'=3\,,\quad z'=-1\Big]$$

Nechť jsou v okolí bodu $[1,-1,1]$ pomocí soustavy rovnic

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+1=0\,,\qquad x+y+z=1$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(1)$ a $z''(1)$.

$$\Big[y''=-1\,,\quad z''=1\,;\quad y'=-2\,,\quad z'=1\Big]$$

Nechť jsou v okolí bodu $[1,1,-1]$ pomocí soustavy rovnic

$$y=\mathrm{e}^{x+z}\,,\qquad xy=z^2$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(1)$ a $z''(1)$.

$$\Big[y''=\tfrac{4}{27}\,,\quad z''=\tfrac{1}{27}\,;\quad y'=\tfrac{1}{3}\,,\quad z'=-\tfrac{2}{3}\Big]$$

Nechť jsou v okolí bodu $[1,-1,2]$ pomocí soustavy rovnic

$$z^2-xy+yz+\sin(x+y)=3\,,\qquad xy+xz+yz+x-y=1$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(1)$ a $z''(1)$.

$$\Big[y''=1\,,\quad z''=-\tfrac{4}{3}\,;\quad y'=-1\,,\quad z'=0\Big]$$

Nechť jsou v okolí bodu $[1,2,0]$ pomocí soustavy rovnic

$$xy+xz+yz-2z=2\,,\qquad y^2+z^2-xy+\mathrm{e}^{xz}=3$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(1)$ a $z''(1)$.

$$\Big[y''=-32\,,\quad z''=52\,;\quad y'=2\,,\quad z'=-4\Big]$$

Nechť jsou v okolí bodu $[0,-1,1]$ pomocí soustavy rovnic

$$x^2+y^2+z^2+xy-xz=2\,,\qquad z^2+2xz+yz+y\sin xz=0$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(0)$ a $z''(0)$.

$$\left[y'' = \tfrac{3}{2}\,,\quad z'' = \tfrac{1}{2}\,;\quad y' = -1\,,\quad z' = 0\right]$$

Nechť jsou v okolí bodu $[2, 1, -1]$ pomocí soustavy rovnic

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz = 2\,, \qquad x^2 + y^2 + z^2 + 3yz + xyz = 1$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(2)$ a $z''(2)$.

$$\left[y'' = \tfrac{1}{2}\,,\quad z'' = \tfrac{1}{6}\,;\quad y' = 0\,,\quad z' = -1\right]$$