Příklad 5

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x + y$ za podmínek $x^3 + y^3 = 3xy$, $x, y > 0$.

$\left[\text{v bodě } \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \text{ je lokální maximum.}\right]$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ za podmínky $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$.

$\left[\text{v bodě } [0,0] \text{ je lokální minimum, v bodě } [2,-2] \text{ je lokální maximum.}\right]$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = xy$ za podmínky $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 1$.

$\left[\text{v bodě } [4,6] \text{ je lokální minimum.}\right]$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = xyz$ za podmínky $x + y + z = 3$.

$\left[\begin{array}{l}\text{v bodě } [1,1,1] \text{ je lokální maximum;} \\ \text{v bodech } [3,0,0],\ [0,3,0] \text{ a } [0,0,3] \text{ není lokální extrém.}\end{array}\right]$

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ za podmínky $xyz = 1$.

$\left[\text{v bodě } [1,1,1] \text{ je lokální minimum.}\right]$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = xy^2z^3$ za podmínek $x+y+z = 1$, $x, y, z > 0$.

$\left[\text{v bodě } \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \text{ je lokální maximum.}\right]$

Najděte lokální extrémy funkce $z = z(x,y)$, která je řešením rovnice

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0\,.$$

$\left[\text{lokální minimum } z = 1 \text{ v bodě } [-2,0,1],\ \text{lokální maximum } z = -\frac{8}{7} \text{ v bodě } \left[\frac{16}{7}, 0, -\frac{8}{7}\right].\right]$

Najděte lokální extrémy funkce $z = z(x,y)$, která je řešením rovnice

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 4yz + 4x - z + 4 = 0\,.$$

$\left[\begin{array}{l}\text{lokální minimum } z = 1 \text{ v bodě } [-1,-1,1], \\ \text{lokální maximum } z = -2 \text{ v bodě } \left[-1,2,-2\right].\end{array}\right]$

Najděte lokální extrémy funkce $z = z(x,y)$, která je řešením rovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z + 2 = 0\,.$$

$\left[\begin{array}{l}\text{lokální minimum } z = 0 \text{ v bodě } [-1,-1,0], \\ \text{lokální maximum } z = -8 \text{ v bodě } \left[-5,-5,-8\right].\end{array}\right]$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ za podmínky $x^2 + 3xy + y^2 + 4 = 0$.

$\left[\begin{array}{l}\text{lokální minimum 8 v bodech } [2,-2] \text{ a } [-2,2]\,, \\ \text{lokální maxima nemá}\,.\end{array}\right]$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ za podmínky $2x^2 - 3xy - 2y^2 + 25 = 0$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{lokální minimum } 10 \text{ v bodech } [1,3] \text{ a } [-1,-3]\,, \\ \text{lokální maxima nemá}\,.\end{array}\right]$$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = xy$ za podmínky $x^2 - 4xy + y^2 = 6$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{lokální minimum } -1 \text{ v bodech } [1,-1] \text{ a } [-1,1]\,, \\ \text{lokální maxima nemá}\,.\end{array}\right]$$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = xy$ za podmínky $x^2 - 4xy + y^2 + 8 = 0$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{lokální minimum } 4 \text{ v bodech } [2,2] \text{ a } [-2,-2]\,, \\ \text{lokální maximmum nemá}\,.\end{array}\right]$$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ za podmínky $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 100$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{lokální minimum } 40 \text{ v bodech } [6,-2] \text{ a } [-6,2]\,, \\ \text{lokální maxima nemá}\,.\end{array}\right]$$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = 2xy$ za podmínky $4x^2 + 6xy + y^2 = 20$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{lokální maximum } 4 \text{ v bodech } [1,2] \text{ a } [-1,-2]\,, \\ \text{lokální minima nemá}\,.\end{array}\right]$$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2+4xy+4y^2$ za podmínky $x^2+8xy+4y^2-24 = 0$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{lokální minimum } 16 \text{ v bodech } \big[2,1\big] \text{ a } \big[-2,-1\big]\,, \\ \text{lokální maxima nemá}\,.\end{array}\right]$$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = xy$ za podmínky $x^2 - 3xy + y^2 = 20$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{lokální minimum } -4 \text{ v bodech } [2,-2] \text{ a } [-2,2]\,, \\ \text{lokální maximum nemá}\,.\end{array}\right]$$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ za podmínky $x^2 + 5xy + 4y^2 = 18$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{lokální minimum } 8 \text{ v bodech } [2,1] \text{ a } [-2,-1]\,, \\ \text{lokální maxima nemá}\,.\end{array}\right]$$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = 2x^2 + \frac{1}{2}\,y^2$ za podmínky $2x^2 - 4xy - y^2 + 30 = 0$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{lokální minimum } 10 \text{ v bodech } [1,4] \text{ a } [-1,-4]\,, \\ \text{lokální maxima nemá}\,.\end{array}\right]$$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = xy$ za podmínky $x^2 + 5xy + 4y^2 = 18$.

$$\begin{bmatrix} \text{lokální maximum 2 v bodech } [2,1] \text{ a } [-2,-1]\,, \\ \text{lokální minima nemá}\,. \end{bmatrix}$$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ za podmínky $x^2 - 4xy + y^2 = 6$.

$$\begin{bmatrix} \text{lokální minimum 2 v bodech } [1,-1] \text{ a } [-1,1]\,, \\ \text{lokální maximum nemá}\,. \end{bmatrix}$$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ za podmínky $x^2 - 3xy + y^2 = 20$.

$$\begin{bmatrix} \text{lokální minimum 8 v bodech } [2,-2] \text{ a } [-2,2]\,, \\ \text{lokální maximum nemá}\,. \end{bmatrix}$$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ za podmínky $x^2 + 4xy + y^2 + 8 = 0$.

$$\begin{bmatrix} \text{lokální minimum 8 v bodech } [2,-2] \text{ a } [-2,2]\,, \\ \text{lokální maximum nemá}\,. \end{bmatrix}$$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ za podmínky $x^2 + 4xy - 2y^2 = 40$.

$$\begin{bmatrix} \text{lokální minimum 20 v bodech } [4,2] \text{ a } [-4,-2]\,, \\ \text{lokální maxima nemá}\,. \end{bmatrix}$$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = 2x^2 - 2xy + \frac{1}{2}\,y^2$ za podmínky $2x^2 - 4xy + \frac{1}{2}\,y^2 + 16 = 0$.

$$\begin{bmatrix} \text{lokální minimum 0 v bodech } \big[2,4\big] \text{ a } \big[-2,-4\big]\,, \\ \text{lokální maxima nemá}\,. \end{bmatrix}$$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = 3x^2 + 4xy$ za podmínky $x^2 + 4xy - 2y^2 + 15 = 0$.

$$\begin{bmatrix} \text{lokální minimum } -5 \text{ v bodech } [1,-2] \text{ a } [-1,2]\,, \\ \text{lokální maxima nemá}\,. \end{bmatrix}$$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = xy$ za podmínky $2x^2 + 4xy + \frac{1}{2}\,y^2 - 3 = 0$.

$$\begin{bmatrix} \text{lokální maximum } \frac{1}{2} \text{ v bodech } \big[\frac{1}{2},1\big] \text{ a } \big[-\frac{1}{2},-1\big]\,, \\ \text{lokální minima nemá}\,. \end{bmatrix}$$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = 2x^2 + \frac{1}{2}\,y^2$ za podmínky $2x^2 - 4xy - y^2 = 20$.

$$\begin{bmatrix} \text{lokální minimum 10 v bodech } [2,-2] \text{ a } [-2,2]\,, \\ \text{lokální maxima nemá}\,. \end{bmatrix}$$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = 2xy$ za podmínky $4x^2 + 8xy + y^2 + 32 = 0$.

$$\begin{bmatrix} \text{lokální maximum } -16 \text{ v bodech } \big[2,-4\big] \text{ a } \big[-2,4\big]\,, \\ \text{lokální minima nemá}\,. \end{bmatrix}$$

Najděte maximum a minimum funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ na elipse $x^2 + xy + y^2 = 12$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{maximum 24 je v bodech } \left[2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}\right] \text{ a } \left[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right], \\ \text{minumum 8 je v bodech } [2,2] \text{ a } [-2,-2].\end{array}\right]$$

Najděte maximum a minimum funkce $f(x,y) = x^2+5xy+y^2$ na elipse $x^2+2xy+2y^2 = 10$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{maxumim 15 je v bodech } [2,1] \text{ a } [-2,-1], \\ \text{minumum } -35 \text{ je v bodech } [4,-3] \text{ a } [-4,3].\end{array}\right]$$

Najděte maximum a minimum funkce $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ na kružnici $x^2 + y^2 = 8$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{maximum 12 je v bodech } [2,-2,] \text{ a } [-2,2], \\ \text{minimum 4 je v bodech } [2,2] \text{ a } [-2,-2].\end{array}\right]$$

Najděte maximum a minimum funkce $f(x,y) = 3xy - y^2$ na elipse $x^2 + 2xy + 2y^2 = 10$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{maximum 5 je v bodech } [2,1] \text{ a } [-2,-1], \\ \text{minimum } -45 \text{ je v bodech } [4,-3] \text{ a } [-4,3].\end{array}\right]$$

Najděte maximum a minimum funkce $f(x,y) = 2x^2 - 3xy - 2y^2$ na kružnici $x^2 + y^2 = 40$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{maximum 100 je v bodech } [6,-2,] \text{ a } [-6,2], \\ \text{minimum } -100 \text{ je v bodech } [2,6] \text{ a } [-2,-6].\end{array}\right]$$

Najděte maximum a minimum funkce $f(x,y) = xy$ na elipse $x^2 + xy + 4y^2 = 30$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{maximum 6 je v bodech } \left[2\sqrt{3}, \sqrt{3}\right] \text{ a } \left[-2\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right], \\ \text{minimum } -10 \text{ je v bodech } \left[2\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right] \text{ a } \left[-2\sqrt{5}, \sqrt{5}\right].\end{array}\right]$$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 + y$ na množině $x^2 + y^2 \le 1$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{maximum } \tfrac{5}{4} \text{ v bodech } \left[\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\right] \text{ a } \left[-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\right], \\ \text{minimum } -1 \text{ v bodě } [0,-1].\end{array}\right]$$

Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = x + 2y$ na množině $x^2 + 4y^2 \le 8$.

$$\left[\text{maximum 4 v bodě } [2,1], \text{ minimum } -4 \text{ v bodě } [-2,-1].\right]$$

Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2+y^2$ na množině $x^2+xy+y^2 \le 3$.

$$\left[\text{minimum 0 v bodě } [0,0], \text{ maximum 6 v bodech } \left[\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right] \text{ a } \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right].\right]$$

Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ na množině

$$x^2 - 2x + 2y^2 + 4y \le 0\,.$$

$$\left[\text{minimum 0 v bodě } [0,0], \text{ maximum 12 v bodě } [2,-2].\right]$$

Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ na množině

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 1\,.$$

$$\left[\text{maximum 3 v bodě } \left[\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right], \text{ minimum } -3 \text{ v bodě } \left[-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}\right].\right]$$

Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce$f(x,y,z)=x+y+z$ na množině

$$\tfrac{1}{2}\,x^2+\tfrac{1}{3}\,y^2+\tfrac{1}{4}\,z^2\le 1\,.$$

$\left[\text{maximum 3 v bodě } \left[\frac{2}{3},1,\frac{4}{3}\right],\ \text{minimum } -3 \text{ v bodě } \left[-\frac{2}{3},-1,-\frac{4}{3}\right].\right]$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x,y,z)=3x^2-2xy+3y^2+z^2$ na množině $x^2+y^2+z^2\le 50$.

$\left[\text{minimum 0 v bodě } [0,0,0],\ \text{maximum 200 v bodech } [5,-5,0] \text{ a } [-5,5,0].\right]$

Jaké rozměry musí mít krabice ve tvaru kvádru (bez víka), která má objem $V=32\,\ell$ a nejmenší povrch? $\left[\text{dno je čtverec se stranou } 4\,\text{dm a výška je } 2\,\text{dm.}\right]$

Jaké rozměry má otevřená vana, která má průřez půlkruh a daný povrch stěn $S=27\pi\,\mathrm{m}^2$ a která má největší objem? $\left[\text{půlkruh má poloměr } 3\,\text{m a délka vany je } 6\,\text{m.}\right]$

Najděte obdélník s obvodem 24 cm, který vytvoří rotací kolem jedné ze svých stran těleso s největším objemem.

$\left[\text{obdélník rotuje kolem strany délky } 4\,\text{cm a druhá strana má délku } 8\,\text{cm.}\right]$

Najděte poloosy elipsy $x^2-2xy+3y^2=2$.

Návod: Daná elipsa má střed v počátku souřadnic. Proto jsou poloosy rovny maximální a minimální vzdálenosti bodu elipsy od počátku souřadnic.

$\left[\text{elipsa má poloosy } a=\sqrt{2+\sqrt{2}} \text{ a } b=\sqrt{2-\sqrt{2}}.\right]$

Bodem $[2;5;3]$ veďte rovinu P tak, aby byl objem čtyřstěnu, jehož vrcholy jsou počátek a prosečíky roviny P se souřadnicovými osami, co nejmenší.

$\left[\text{rovnice roviny je } \tfrac{1}{2}\,x+\tfrac{1}{5}\,y+\tfrac{1}{3}\,z=3\,.\right]$

Kolmo k řece šířky 8 m je přiveden kanál o šířce 1 m. Jakou maximální délku může mít kláda, kterou lze splavit z řeky do kanálu? $\left[5\sqrt{5}\,\mathrm{m}\,.\right]$
