

Spojitost funkce.

Dodefinujte funkci f v bodě x_0 tak, aby byla v tomto bodě spojitá, pokud je to možné:

- a) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$, $x_0 = 0$ [$f(0) = 1$]
- b) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} 3x}{x}$, $x_0 = 0$ [$f(0) = 3$]
- c) $f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x}$, $x_0 = 0$ [$f(0) = 0$]
- d) $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$, $x_0 = 0$ [nelze dodefinovat]
- e) $f(x) = \begin{cases} x & x \in (0, 1) \\ 2 - x & x \in (1, 2) \end{cases}$, $x_0 = 1$ [$f(1) = 1$]
- f) $f(x) = \ln |x|$, $x_0 = 0$ [nelze dodefinovat]

Rozhodněte, které z uvedených funkcí jsou spojité:

- a) $f(x) = \ln \sqrt{1 - x^2}$ [spojitá v $(-1, 1)$]
- b) $f(x) = \frac{4x + 1}{\cos x - 1}$ [spojitá v D_f]
- c) $f(x) = e^{-|x-1|}$ [spojitá v \mathbb{R}]
- d) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$ [není spojitá v bodech $k\pi$]

Rozhodněte, které z uvedených funkcí jsou spojité

- a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in (-\infty, 1) \\ 2x - 1 & x \in \langle 1, +\infty \rangle \end{cases}$ [spojitá]
- b) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 1 - e^{-x} & x \in (0, +\infty) \end{cases}$ [spojitá]
- c) $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ [nespojitá v bodě 0]
- d) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ [nespojitá v bodě 0]

Ukažte, že rovnice $f(x) = 0$ má kořen a nalezněte jeho přibližnou hodnotu

- a) $f(x) = x^3 + 3x - 6$ [$x_0 \doteq 1,2875$]
- b) $f(x) = 2e^x + x^2 + 18x - 6$ [$x_0 \doteq 0,196$]

Rozhodněte, které z funkcí jsou na uvedené množině omezené:

- a) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $x \in (0, +\infty)$; b) $f(x) = e^{-x^2+1}$, $x \in (-\infty, +\infty)$;
- c) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$, $x \in (0, +\infty)$; d) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in \langle -2, 2 \rangle$.

[a) omezená; b) omezená; c) pouze zdola omezená; d) omezená]

Rozhodněte, zda má funkce f inverzní funkci a určete ji

- a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ [$f^{-1}(x) = 1 + x^2$; $x \in \langle 0, +\infty \rangle$]
- b) $f(x) = |x-1|$ [nemá inverzní funkci]

Funkci f dodefinujte v bodě x_0 tak, aby byla spojitá, pokud je to možné

- a) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad x_0 = 0$ [$f(0) = 0$]
- b) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}, \quad x_0 = -1$ [$f(-1) = -2$]
- c) $f(x) = \frac{x - 1}{x^3 - 1}, \quad x_0 = 1$ [$f(1) = \frac{1}{3}$]
- d) $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}, \quad x_0 = 0$ [nelze dodefinovat]
- e) $f(x) = \frac{x}{|x|}, \quad x_0 = 0$ [nelze dodefinovat]
- f) $f(x) = \frac{x^2}{\operatorname{sgn} x}, \quad x_0 = 0$ [$f(0) = 0$]
-

Rozhodněte, zda jsou uvedené funkce spojité:

- a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ [spojitá v $(-1, 1)$]
- b) $f(x) = \sin \sqrt{1+x^2}$ [spojitá v \mathbb{R}]
- c) $f(x) = \ln |x-1|$ [spojitá v $(-\infty, 1)$ a $(1, +\infty)$]
- d) $f(x) = e^{-|x|}$ [spojitá v \mathbb{R}]
- e) $f(x) = |x^2 - 4|$ [spojitá v \mathbb{R}]
- f) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 \cdot \cos x)$ [nespojité v $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$]
-

Rozhodněte, zda jsou uvedené funkce spojité:

- a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in (-\infty, 0) \\ 1 & x \in (0, 1) \\ \sin \frac{\pi}{2}x & x \in (1, +\infty) \end{cases}$ [nespojité v bodě 0]
- b) $f(x) = \begin{cases} \cos x & x \in (-\infty, 0) \\ x & x \in (0, 3) \\ 3 & x \in (3, +\infty) \end{cases}$ [nespojité v bodě 0]
- c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in (-\infty, 0) \\ 2 & x \in (0, 1) \\ x + 1 & x \in (1, +\infty) \end{cases}$ [nespojité v bodě 0]
- d) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ racionální} \\ 0 & x \text{ iracionální} \end{cases}$ [není spojitá v žádném bodě]
-

Určete čísla a a b tak, aby funkce f byla spojitá:

- a) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ a + e^x & x \in (0, +\infty) \end{cases}$ [$a = -1$]
- b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in (-\infty, 0) \\ ax + b & x \in (0, 1) \\ \sqrt{x} & x \in (1, +\infty) \end{cases}$ [$a = 1, b = 0$]

- c) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & x \in (-\infty, 0) \\ x + 2 & x \in (0, 3) \\ b & x \in (3, +\infty) \end{cases}$ [neexistuje]
- d) $f(x) = \begin{cases} a & x \in (-\infty, -\frac{\pi}{2}) \\ 2 \cos x + 3 & x \in (-\frac{\pi}{2}, \pi) \\ b & x \in (\pi, +\infty) \end{cases}$ [$a = 3, b = 1$]
- e) $f(x) = \begin{cases} a & x \in (-\infty, -1) \\ \frac{(x-1)^2}{x^2-1} & x \in (-1, 1) \\ b & x \in (1, +\infty) \end{cases}$ [neexistuje]
-

Ukažte, že uvedená rovnice má kořen a přibližně jej najděte:

- a) $x^5 - 2x^4 - x^2 - 5 = 0$ [$x_0 \in (2,346, 2,347)$]
- b) $\sin x - x + 1 = 0$ [$x_0 \in (1,93, 1,94)$]
- c) $\operatorname{tg} x - 2x = 0, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$ [$x_0 \in (1,16, 1,17)$]
-

Rozhodněte, které z funkcí jsou na uvedené množině omezené:

- a) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 2}, \quad x \in (0, +\infty)$ [je omezená]
- b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, \quad x \in (-2, 2)$ [není omezená, není definovaná v bodech ± 1]
- c) $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}, \quad x \in (1, +\infty)$ [je omezená]
- d) $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}, \quad x \in (0, \frac{1}{2})$ [je omezená]
- e) $f(x) = \sin \sqrt{1+x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$ [je omezená]
- f) $f(x) = 2|x| - x^2, \quad x \in (-1, 2)$ [je omezená]
-

Dodefinujte funkci $f(x)$ tak, aby byla spojitá v \mathbb{R} :

- a) $f(x) = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$ [$f(0) = 0$]
- b) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x-1}}$ [$f(1) = 0$]
- c) $f(x) = \frac{x-1}{|x^2-1|}$ [nelze dodefinovat v bodech 1 a -1]
- d) $f(x) = (x^2 - 4) \ln |x + 2|$ [$f(-2) = 0$]
-

Nechť $F = f \circ g$ a $G = g \circ f$. Rozhodněte, zda jsou funkce F a G spojité, jestliže

- a) $f(x) = \operatorname{sgn} x; g(x) = x(1-x^2)$ [F není spojitá v bodech 1, 0, -1 ; G je spojitá]
- b) $f(x) = \operatorname{sgn} x; g(x) = 1 + \frac{1}{2} \cos x$ [F je spojitá; G není spojitá v bodě 0]
-