Ukázka 1

Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$.

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 \mathrm{e}^{-x}$.

Najděte derivaci funkce $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ v bodě $A = [1, 2, -2]$ ve směru normály k rovině $4x - y + z = 0$.

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, 1, 1]$ jako řešení rovnice

$$z^2 + xyz\mathrm{e}^{3-x^2-y^2-z^2} = x^2 + y^2\,.$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 1)$.

Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce$f(x, y, z) = x + y + z$ na množině

$$\tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{1}{3}\,y^2 + \tfrac{1}{4}\,z^2 \leq 1\,.$$

Nechť je $f(x)$ reálná funkce jedné reálné proměnné. Napište definici tvrzení: *Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a.*

Ukázka 2

Určete definiční obor funkce $f(x) = \big(\cos x\big)^{2x} + \arccos \frac{1}{2}x$ a nalezněte rovnici normál ke grafu této funkce v bodech $\big[0; ?\big]$ a $\big[\pi; ?\big]$.

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = (x + 1)^2 \mathrm{e}^{|x-1|}$ na intervalu $\langle -2, 3 \rangle$.

Napište rovnici tečné roviny v bodě $A = [2, -1, 1]$ k ploše $\mathcal{S}$, která je v okolí bodu A definována rovnicí

$$xy \ln(x - z^2) + z\mathrm{e}^{x(y+z)} = 1\,.$$

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, -1, 1]$ jako řešení rovnice

$$z^3 = x^2 + y^2 - xz - yz + y\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[1, -1]$.

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = xy$ za podmínky $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 1$.

Napište definici *derivace funkce $f(x)$ v bodě a.*

Ukázka 3

Najděte rovnice tečen k parabole $y = \frac{1}{2}\,x^2 + 2$, které procházejí bodem $A = [1; 2]$.

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$ v jejích inflexních bodech.

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

Nechť jsou v okolí bodu $[2, 1, -1]$ pomocí soustavy rovnic

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz = 2\,, \qquad x^2 + y^2 + z^2 + 3yz + xyz = 1$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(2)$ a $z''(2)$.

Najděte lokální extrémy funkce $z = z(x, y)$, která je řešením rovnice

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0\,.$$

Nechť je $f(\mathbf{x})$ funkce definována na množině $D_f \subset \mathbb{R}^n$. Napište definice *derivace funkce $f(\mathbf{x})$ podle vektoru $\mathbf{v}$ v bode $a \in D_f^\circ$*.

Ukázka 4

Najděte limitu $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$.

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = x \sin(\ln x)$ na intervalu $\langle 1, \mathrm{e}^\pi \rangle$.

Nechť je funkce $f(x, y)$ definována vztahem $f(x, y) = F\big(u(x, y), v(x, y)\big)$, kde funkce $F(u, v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x, y) = \ln\big(x + \sqrt{1 + x^2}\big)\,, \qquad v(x, y) = x^2 + xy + y^2\,.$$

Vyjádřete $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u, v)$.

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, 1, 2]$ jako řešení rovnice

$$x^3 - y^3 + z^3 - 3xyz = 2\,.$$

Najděte její diferenciál prvního a druhého řádu v bodě $[1, 1]$.

Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y) = x + 2y$ na množině $x^2 + 4y^2 \leq 8$.

Napište *Taylorův polynom druhého řádu funkce $f(x, y)$ se středem v bodě* $[x_0, y_0]$.

Ukázka 5

Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \dfrac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x - x^2}}$.

Najděte pravoúhlý trojúhelník, ve kterém je součet přepony a jedné odvěsny roven jedné a který má největší obsah.

Najděte derivaci funkce $f(x, y) = x^2 y + \ln \dfrac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ v bodě $A = [1, 1]$ ve směru normály ke grafu funkce $y = \sqrt[3]{x}$ v bodě A.

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, 1, -1]$ jako řešení rovnice

$$(x^2 + y^2) \ln \sqrt{1 + y - z^2} + z(x + 2y + 3z) = 0\,.$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 1)$.

Bodem $[2; 5; 3]$ veďte rovinu P tak, aby byl objem čtyřstěnu, jehož vrcholy jsou počátek a prosečíky roviny P se souřadnicovými osami, co nejmenší.

Napište *Lagrangeovu větu o střední hodnotě.*

Ukázka 6

Najděte limitu $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2}{\pi} \arccos x \right)^{1/x}$.

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = \left| \mathrm{e}^{-x} \sin x \right|$ na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Nechť je funkce $f(x, y)$ řešení rovnice

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + 2f = 0\,.$$

Najděte rovnici pro funkci $F(u, v)$, která je definována vztahem $(x + y)^2 f(x, y) = F(u, v)$, kde $u = x + y$ a $v = \sqrt{\dfrac{x - y}{x + y}}$.

Nechť jsou v okolí bodu $[1, 1, 1]$ pomocí soustavy rovnic

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6\,, \qquad xyz = 1$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(1)$ a $z''(1)$.

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 2x^2 - 2xy + \frac{1}{2}\,y^2$ za podmínky $2x^2 - 4xy + \frac{1}{2}\,y^2 + 16 = 0$.

Jak najdete *úhel mezi dvěma nenulovými vektory* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Ukázka 7

Najděte otevřené intervaly, ve kterých je funkce

$$f(x) = 2 \operatorname{arctg} x - \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

konstantní, a určete hodnotu funkce $f(x)$ na každém z těchto intervalů.

Najděte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která je funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 6x}$ současně rostoucí a konvexní.

V bodě $A = [1, 1, -1]$ najděte parametrické rovnice tečny ke křivce $\mathcal{C}$, která v okolí bodu A je dána jako řešení soustavy rovnic

$$xz + 2yz + 3z^2 + (x^2 + y^2) \ln \sqrt{1 + y - z^2} = 0 \,, \qquad x^2 y + xz^2 + y^2 z - y = 0 \,.$$

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[0, -1, 1]$ jako řešení rovnice

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[0, -1]$.

Najděte lokální extrémy funkce $z = z(x, y)$, která je řešením rovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z + 2 = 0 \,.$$

Napište definici *hmromadného bodu množiny M*.

Ukázka 8

Najděte dvacátou derivaci funkce $f(x) = x^2 \sin x$.

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}$ konvexní, resp. konkávní, a určete inflexní body této funkce.

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + \frac{1}{2} z^2 - 3xz - 2y + 2z$.

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, -1, 1]$ jako řešení rovnice

$$z = 2 + xy + \operatorname{arctg} \frac{x + y}{z} \,.$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, -1)$.

Najděte obdélník s obvodem 24 cm, který vytvoří rotací kolem jedné ze svých stran těleso s největším objemem.

Jak poznáte, že je *kvadratická forma $\Phi(h_1, h_2) = a h_1^2 + 2b h_1 h_2 + c h_2^2$ indefinitní*?
