PŘEDNÁŠKA 1–2

NEURČITÝ INTEGRÁL

1.1 Primitivní funkce

Definice 1. Nechť je dána funkce f definovaná v otevřeném (omezeném nebo neomezeném) intervalu (a, b). Každou funkci F, pro kterou platí:

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro každé } x \in (a, b),$$

nazveme **primitivní funkcí k funkci f v intervalu** (a, b).

☛ ***Příklad 1.1.***

(a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = x^3$ v intervalu $(-\infty, +\infty)$.

(b) $F(x) = -x^{-1}$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = x^{-2}$ v intervalu $(-\infty, 0)$ a v intervalu $(0, +\infty)$, nikoli však např. v intervalu $(-1, 5)$, kde leží bod $0 \notin D_f$.

Poznámka. Je-li F primitivní funkce k funkci f v intervalu (a, b), pak zřejmě i každá funkce tvaru $G(x) = F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, je primitivní funkcí k funkci f v (a, b). Následující věta říká, že tímto jsou již všechny primitivní funkce vyčerpány:

Věta. *Jsou-li F, G dvě primitivní funkce k funkci f v intervalu (a, b), pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$, že pro všechna $x \in (a, b)$ platí:*

$$G(x) = F(x) + c\,.$$

Důkaz. Uvažujme funkci $H(x) = G(x) - F(x)$. Funkce F, G jsou primitivní funkce k funkci f, proto pro každé $x \in (a, b)$ platí:

$$H'(x) = (G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Z Cauchyho věty o střední hodnotě pak plyne, že $H(x)$ je na intervalu (a, b) konstantní, tj. $H(x) = c\,.$

Definice 2. Má-li funkce f nějakou primitivní funkci na intervalu (a, b), pak množinu všech jejích primitivních funkcí v (a, b) nazýváme **neurčitým integrálem funkce f v intervalu** (a, b). Pro neurčitý integrál funkce f používáme symbol $\int f$ nebo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Symbol $\int$ se nazývá **integrační znak**, funkce f se nazývá **integrand**. Proměnná x se nazývá **integrační proměnná** (nezáleží na tom, jaký symbol použijeme k označení integrační proměnné).

Poznámka. Je-li funkce F primitivní k funkci f v intervalu (a, b), pak píšeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c\,.$$

Konstanta c se nazývá **integrační konstanta**. Chceme-li z integrálu získat jednu primitivní funkci, musíme pevně zvolit hodnotu integrační konstanty.

Věta (Aditivita integrálu vzhledem k integračnímu oboru).

1. *Má-li funkce* f *integrál v intervalu* (a, b) *a je-li* I *otevřený podinterval intervalu* (a, b)*, pak funkce* f *má integrál také v intervalu* I*.*
2. *Má-li funkce* f *integrál v intervalech* $I_1, I_2, \cdots, I_m$ *a je-li jejich sjednocení* $I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_m$ *interval, pak má funkce* f *integrál také v intervalu* I *.*

Poznámka. Tvrzení 2 se používá i v případech, kdy sjednocení I integračních oborů I_n není interval. Tuto skutečnost ilustruje následující příklad.

☛ ***Příklad 1.2.***

$$\begin{aligned} x \in (0,\infty)\ : &\quad (\ln x)' = 1/x\,; \\ x \in (-\infty,0)\ : &\quad (\ln(-x))' = 1/x\,. \end{aligned}$$

Je tedy

$$\begin{aligned} \textstyle\int 1/x\,\mathrm{d}x = \ln x + c &\quad \text{v intervalu } (0,\infty)\,; \\ \textstyle\int 1/x\,\mathrm{d}x = \ln(-x) + c &\quad \text{v intervalu } (-\infty,0)\,. \end{aligned}$$

Funkce $\ln|x|$ je tedy primitivní funkcí k funkci $1/x$ jak v intervalu $(-\infty,0)$, tak i v intervalu $(0,\infty)$. Proto obvykle píšeme:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c \quad \text{v } M = (-\infty,0)\cup(0,\infty).$$

Je třeba si uvědomit, že tento zápis není zcela korektní: množina M je sjednocením dvou disjunktních intervalů, integrační konstantu c proto může být zvolena libovolně na každém z obou intervalů.

Věta (Linearita integrálu).

1. *Nechť funkce F, resp. G je primitivní funkce k funkci f, resp. g v intervalu (a, b) a nechť r je číslo. Pak funkce $F + G$ je primitivní funkce k funkci $f + g$ a funkce rF je primitivní funkce k funkci rf v intervalu (a, b).*
2. *Nechť funkce f, g mají neurčité integrály v intervalu (a, b) a nechť r je číslo. Pak také funkce $f + g$ a funkce rf má neurčitý integrál v intervalu (a, b) a platí:*

$$\begin{aligned} \int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x &= \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x\,, \\ \int r f(x)\,\mathrm{d}x &= r \int f(x)\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

3. *Nechť funkce $f_1, f_2, \cdots, f_m$ mají neurčité integrály v (a, b) a nechť $r_1, r_2, \cdots, r_m$ jsou konstanty. Pak také funkce $r_1 f_1 + r_2 f_2 + \cdots + r_m f_m$ má integrál v intervalu (a, b) a platí:*

$$\int (r_1 f_1(x) + r_2 f_2(x) + \cdots + r_n f_n(x))\,\mathrm{d}x =$$

$$= r_1 \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + r_2 \int f_2(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + r_n \int f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta (Neurčitý integrál spojité funkce).
Je-li funkce $f(x)$ *spojitá na intervalu* $\langle a, b\rangle$, *existuje k ní na intervalu* (a, b) *primitivní funkce.*

Věta (Neurčitý integrál derivace).
Je-li $f'(x)$ *spojitá na intervalu* (a, b), *je*

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + c.$$

1.2 Základní integrační vzorce

Známé vzorce z diferenciálního počtu nám dávají následující výsledky (c je integrační konstanta):

1) $\displaystyle\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$ $\quad x \in \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{Z},\ n > 0;$
$\quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{Z},\ n < -1,$
$\quad x > 0$ pro $n \in \mathbb{R},\ n \notin \mathbb{Z}.$

2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c,$ $\quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

3) $\displaystyle\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + c;$ $\quad x \in \mathbb{R}.$

4) $\displaystyle\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c,$ $\quad x \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1.$

5) $\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c,$ $\quad x \in \mathbb{R}.$

6) $\displaystyle\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + c,$ $\quad x \in \mathbb{R}.$

7) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c,$

$$x \in \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right), k \in$$

8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + c,$

$$x \in (2k\pi, (2k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$$

9) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \arcsin x + c, \\ -\arccos x + c, \end{cases} \qquad x \in (-1, 1).$$

10) $$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + c, \\ -\operatorname{arccotg}\ x + c, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

11) $$\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + c; \qquad x \in \mathbb{R}.$$

12) $$\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + c; \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$$13)\quad \int \frac{1}{\cosh^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tgh} x + c,$$

$$14)\quad \int \frac{1}{\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{cotgh} x + c,$$

$$15)\quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{argsinh} x + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c$$

$$16)\quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{argcosh} x + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c$$

$$16)\quad \int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|,$$

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \operatorname{argtgh} x, \quad \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \operatorname{argcotgh} x$$

☛ ***Příklad 1.3.***

Vypočítejte následující integrály:

(a) $I = \int (5x^4 - 2x^3 - 3x + 7)\,\mathrm{d}x$

Řešení. Podle věty o linearitě integrálu lze psát:

$$I = \int (5x^4 - 2x^3 - 3x + 7)\,\mathrm{d}x =$$

$$= 5\int x^4\,\mathrm{d}x - 2\int x^3\,\mathrm{d}x - 3\int x\,\mathrm{d}x + 7\int 1\,\mathrm{d}x =$$

$$= 5\left(\frac{x^5}{5} + c_1\right) - 2\left(\frac{x^4}{4} + c_2\right) - 3\left(\frac{x^2}{2} + c_4\right) + 7(x + c_5) =$$

$$= x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 7x + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(b) $$I = \int \frac{2x^3 - 3\sqrt{x} + 5}{x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení. Po vydělení čitatele integrandu jmenovatelem stačí opět využít základní vzorce:

$$I = \int \frac{2x^3 - 3\sqrt{x} + 5}{x}\,\mathrm{d}x = \int (2x^2 - 3x^{-\frac{1}{2}} + 5x^{-1})\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\int x^2\,\mathrm{d}x - 3\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + 5\int x^{-1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\left(\frac{x^3}{3} + c_1\right) - 3\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c_2\right) + 5\left(\ln|x| + c_3\right) =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - 6\sqrt{x} + \ln|x| + c\,, \qquad x \in (0, +\infty)\,.$$

(c) $\boldsymbol{I = \int \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x}$

Řešení. Uvědomme si, že $(\mathrm{e}^{4x})' = 4\mathrm{e}^{4x}$, proto abychom při zpětné derivaci primitivní funkce získali funkci zadanou, musí být:

$$\boldsymbol{I = \int \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{4x}}{4} + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.}$$

(d) $\boldsymbol{I = \int \cos(3x-2)\,\mathrm{d}x}$

Řešení. Protože $(\cos(3x-2))' = 3\sin(3x-2)$, bude:

$$\boldsymbol{I = \int \cos(3x-2)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(3x-2)}{3} + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.}$$

1.3 Metoda integrace per partes

Věta (Itegrace per partes). *Nechť funkce u, v jsou spojitě diferencovatelné v intervalu (a, b). Pak platí:*

$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{1.1}$$

Důkaz. Z věty o derivování součinu plyne:

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \text{v intervalu} \quad (a, b),$$

proto v intervalu (a, b) platí:

$$\begin{aligned} \int (uv)' &= \int (u'v + uv') \\ uv + c &= \int u'v + \int uv' \\ \int u'v &= uv - \int uv' + c \end{aligned}$$

Poslední rovnost je ekvivalentní s dokazovaným vztahem.

Využití metody per partes ke zjednodušení integrované funkce

☛ ***Příklad 1.4.***

Vypočítejte integrál $\int x \cos x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Abychom integrovanou funkci skutečně zjednodušili, je dobré zvolit pro derivování funkci x (v opačném případě by v se integrandu objevilo x^2, což by bylo ještě komplikovanější):

$$\int x \cos x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \cos x \, , & u = \sin x \\ v = x \, , & v' = 1 \end{array} \right| =$$

$$= x \sin x - \int \sin x \, \mathrm{d}x = x \sin x + \cos x + c \, , \qquad x \in \mathbb{R} \, .$$

☛ ***Příklad 1.5.***

Vypočítejte integrál $\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Postupným derivováním funkce x^2 zjednodušíme integrand na jedinou goniometrickou funkci:

$$\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \sin x \,, & u = -\cos x \\ v = x^2 \,, & v' = 2x \end{array} \right| =$$

$$= x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x) \, \mathrm{d}x = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u' = \cos x \,, & u = \sin x \\ v = x \,, & v' = 1 \end{array} \right| = -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x \, \mathrm{d}x \right) =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c \,, \qquad x \in \mathbb{R} \,.$$

☛ ***Příklad 1.6.***

Vypočítejte integrál $\int (x^2 + 2x - 5)\, \mathrm{e}^{3x}\, \mathrm{d}x$.

Řešení. Integrand postupně zjednodušíme:

$$\int (x^2 + 2x - 5)\, \mathrm{e}^{3x}\, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^{3x}\,, & u = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} \\ v = x^2 + 2x - 5\,, & v' = 2x + 2 \end{array} \right| =$$

$$= \tfrac{1}{3}\left(x^2 + 2x - 5\right) \mathrm{e}^{3x} - \tfrac{1}{3}\int (2x + 2)\mathrm{e}^{3x}\, \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^{3x}\,, & u = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} \\ v = 2x + 2\,, & v' = 2 \end{array} \right| =$$

$$= \tfrac{1}{3}\left(x^2 + 2x - 5\right) \mathrm{e}^{3x} - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}(2x + 2)\mathrm{e}^{3x} - \tfrac{2}{3}\int \mathrm{e}^{3x}\, \mathrm{d}x\right) =$$

$$= \tfrac{1}{3}\left(x^2 + 2x - 5\right) \mathrm{e}^{3x} - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}(2x + 2)\mathrm{e}^{3x} - \tfrac{2}{9}\mathrm{e}^{3x}\right) + c =$$

$$= \left(\tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{4}{9}x - \tfrac{49}{27}\right) \mathrm{e}^{3x} + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

☛ ***Příklad 1.7.***

Vypočítejte integrál $\int x^3 e^{5x}\,dx$.

Řešení. Integrand postupně zjednodušíme:

$$\int x^3 e^{5x}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u' = e^{5x}, & u = \frac{1}{5}e^{5x} \\ v = x^3, & v' = 3x^2 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{5}x^3 e^{5x} - \frac{3}{5}\int x^2 e^{5x}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u' = e^{5x}, & u = \frac{1}{5}e^{5x} \\ v = x^2, & v' = 2x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{5}x^3 e^{5x} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{5}x^2 e^{5x} - \frac{2}{5}\int x e^{5x}\,dx\right) = \left| \begin{array}{ll} u' = e^{5x}, & u = \frac{1}{5}e^{5x} \\ v = x, & v' = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{5}x^3 e^{5x} - \frac{3}{25}x^2 e^{5x} + \frac{6}{25}\left(\frac{1}{5}x e^{5x} - \frac{1}{5}\int e^{5x}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{5}x^3 e^{5x} - \frac{3}{25}x^2 e^{5x} + \frac{6}{125}x e^{5x} - \frac{6}{625}e^{5x} + c, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Poznámka. V předchozích příkladech jsme vypočítali:

$$\int (x^2 + 2x - 5)\, \mathrm{e}^{3x}\, \mathrm{d}x = \left(\tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{4}{9}x - \tfrac{49}{27}\right) \mathrm{e}^{3x} + c\,,$$

$$\int x^3 \mathrm{e}^{5x}\, \mathrm{d}x = \left(\tfrac{1}{5}x^3 - \tfrac{3}{25}x^2 + \tfrac{6}{125}x - \tfrac{6}{625}\right) \mathrm{e}^{5x} + c\,.$$

Rozmyslete si, že obecně platí:

$$\int P(x)\mathrm{e}^{kx}\, \mathrm{d}x = Q(x)e^{kx}\,.$$

Pokud si toto uvědomíme, můžeme příklady tohoto typu vyřešit bez opakovaného per partes jednoduše tak, že nalezneme polynom $Q(x)$ tak, aby platilo:

$$\left(Q(x)e^{kx}\right)' = P(x)\mathrm{e}^{kx}.$$

☛ ***Příklad 1.8.***

Pomocí odhadu vypočítejte integrál $\int (x^2 + 2x - 5)\, \mathrm{e}^{3x}\, \mathrm{d}x$.

Řešení. Podle předchozí poznámky platí:

$$\int (x^2 + 2x - 5)\, \mathrm{e}^{3x}\, \mathrm{d}x = (Ax^2 + Bx + C)\, \mathrm{e}^{3x} .$$

K vyřešení příkladu stačí nalézt konstanty A, B, C tak, aby

$$\big((Ax^2 + Bx + C)\, \mathrm{e}^{3x}\big)' = (x^2 + 2x - 5)\, \mathrm{e}^{3x} ,$$

tedy

$$\begin{aligned}
(2Ax + B)\, \mathrm{e}^{3x} + \big(Ax^2 + Bx + C\big) \cdot 3\mathrm{e}^{3x} &= (x^2 + 2x - 5)\, \mathrm{e}^{3x} \\
\big(3Ax^2 + (2A + 3B)x + (B + 3C)\big)\, \mathrm{e}^{3x} &= (x^2 + 2x - 5)\, \mathrm{e}^{3x} \\
3Ax^2 + (2A + 3B)x + (B + 3C) &= x^2 + 2x - 5
\end{aligned}$$

$$3Ax^2 + (2A + 3B)x + (B + 3C) = x^2 + 2x - 5$$

Aby se funkce na obou stranách rovnaly, musí se rovnat koeficienty u jednotlivých mocnin proměnné x :

$$\begin{array}{llrcl} x^2 & \dots & 3A & = & 1 \\ x^1 & \dots & 2A + 3B & = & 2 \\ x^0 & \dots & B + 3C & = & -5 \end{array}$$

Řešením této soustavy lineárních rovnic je

$$A = \tfrac{1}{3}, \quad B = \tfrac{4}{9}, \quad C = -\tfrac{49}{27},$$

takže

$$\int (x^2 + 2x - 5)\, \mathrm{e}^{3x}\, \mathrm{d}x = \left(\tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{4}{9}x - \tfrac{49}{27}\right) \mathrm{e}^{3x} + c\,.$$

☛ ***Příklad 1.9.***

Vypočítejte integrál $\int x^5 \ln x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Tentokrát si uvědomíme, že ke zjednodušení dojde, budeme-li derivovat funkci $\ln x$:

$$\int x^5 \ln x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = x^5 \,, & u = \dfrac{x^6}{6} \\ v = \ln x \,, & v' = \dfrac{1}{x} \end{array} \right| = \tfrac{1}{6} x^6 \ln x - \tfrac{1}{6} \int \frac{x^6}{x} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \tfrac{1}{6} x^6 \ln x - \tfrac{1}{6} \int x^5 \, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{6} x^6 \ln x - \tfrac{1}{36} x^6 + c \,, \qquad x \in \mathbb{R} \,.$$

☛ ***Příklad 1.10.***

Vypočítejte integrál $\int \ln x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Na první pohled integrand není součinem dvou funkcí, přesto lze metodu per partes s úspěchem použít. Při integraci by nám velmi pomohlo, kdybychom mohli funkci $\ln x$ nahradit její derivací $1/x$. K tomu si stačí zadaný integrand představit jako součin $1 \ln x$:

$$\int 1 \ln x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = 1 \,, & u = x \\ v = \ln x \,, & v' = \dfrac{1}{x} \end{array} \right| =$$

$$= x \ln x - \int \frac{x}{x} \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int 1 \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + c \,, \qquad x \in \mathbb{R} \,.$$

Nepřímé nalezení neurčitého integrálu: per partes vedoucí na řešení rovnice

V některých situacích se přímé integraci vyhneme tím, že opakováním metody per partes dospějeme k rovnici obsahující na obou stranách hledaný neurčitý integrál. Rovnici pak stačí vyřešit, aniž bychom prováděli integraci celého integrandu (typickým příkladem je součin funkcí e^x, $\sin x$, $\cos x$, které se při derivování či integrování buď nemění, nebo se po určité době opakují):

$$\boldsymbol{I = h(x) + kI}\,.$$

V následujícím příkladu aplikujeme metodu per partes dvakrát, čímž obdržíme na pravé straně opět původní integrál.

☛ ***Příklad 1.11.***

Vypočítejte integrál $\int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x$.

Řešení.

$$\int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^x \,, & u = \mathrm{e}^x \\ v = \cos x \,, & v' = -\sin x \end{array} \right| =$$

$$= \mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^x \,, & u = \mathrm{e}^x \\ v = \sin x \,, & v' = \cos x \end{array} \right| =$$

$$= \mathrm{e}^x \cos x + \left(\mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x \right)$$

Tím jsme získali rovnici, kterou snadno vyřešíme:

$$\begin{aligned} \int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x \\ 2 \int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x \\ \int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \left(\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x \right) \end{aligned}$$

Poznámka. Integrály typu $\int \mathrm{e}^{kx}(P(x)\cos\omega x + Q(x)\sin\omega x)\,\mathrm{d}x$ kde $P(x)$, resp. $Q(x)$, je polynom stupně n_1,, resp. n_2, a k a ω nejsou současně rovny nule, vždy vycházejí ve tvaru

$$\int \mathrm{e}^{kx}(P(x)\cos\omega x + Q(x)\sin\omega x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{kx}(R(x)\cos\omega x + S(x)\sin\omega x),$$

kde $R(x)$ a $S(x)$ jsou polynomy stupně $n = \max(n_1; n_2)$ s neznámými koeficienty, které najdeme derivací podobně jako na str. 21.

☛ ***Příklad 1.12.***

Najděte integrál $\int \mathrm{e}^{-x}(3\cos 2x - (4x+1)\sin 2x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení.

Řešení hledáme ve tvaru

$$\mathrm{e}^{-x}\left((Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x\right) .$$

Derivací a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin proměnné x dostaneme

$$\int \mathrm{e}^{-x}(3\cos 2x - (4x+1)\sin 2x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \mathrm{e}^{-x}\left(\left(\tfrac{8}{5}x + \tfrac{11}{25}\right)\cos 2x + \left(\tfrac{4}{5}x + \tfrac{23}{25}\right)\sin 2x\right) .$$

Poznámka.
Integrály typu

$$\int \sin ax\ \cos bx\, \mathrm{d}x, \qquad \int \sin ax\ \sin bx\, \mathrm{d}x\ ,$$

$$\int \cos ax\ \cos bx\, \mathrm{d}x, \qquad a \neq b,$$

můžeme počítat dvojím použitím metody per partes, anebo rychleji tak, že součin v integrandu převedeme na součet pomocí vztahů

$$\sin\alpha\ \cos\beta = (\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))/2,$$
$$\sin\alpha\ \sin\beta = (\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))/2,$$
$$\cos\alpha\ \cos\beta = (\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))/2.$$

☛ ***Příklad***

$$\int \sin 5x \cos x\, \mathrm{d}x = (1/2)\int (\sin 6x + \sin 4x)\, \mathrm{d}x =$$

$$= -(1/12)\cos 6x - (1/8)\cos 4x + c.$$

1.4 Substituční metoda integrování

Věta (První věta o substituci v neurčitém integrálu) *Nechť v intervalu J existuje integrál na levé straně rovnosti*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.2}$$

a rovná se $F(x)$. Nechť funkce $x = \varphi(t)$ je diferencovatelná v intervalu I takovém, že $\varphi(I) \subset J$. Pak v intervalu I existuje integrál na pravé straně rovnosti (1.2) a rovná se $F\big(\varphi(t)\big)$.

Důkaz. Nechť F je primitivní funkce k funkci f v intervalu J. Protože funkce φ zobrazuje interval I do intervalu J, jsou složené funkce $F(\varphi(t))$ a $f(\varphi(t))$ definované v intervalu I a podle věty o derivaci složené funkce platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,, \quad t \in I.$$

Odtud plyne dokazované tvrzení.

Poznámka. První věta o substituci je užitečná v případech, kdy je integrál „připravený“ ve tvaru

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Pak stačí ověřit, že jsou splněny předpoklady věty.

☛ ***Příklad 1.13.***

Vypočítejte integrál $\int \mathrm{e}^{5t+3}\,\mathrm{d}t\,.$

Řešení. Integrand je spojitý v $\mathbb{R}$, integrál proto existuje. Označme:

$$x = \varphi(t) = 5t+3, \qquad \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = 5\,\mathrm{d}t\,.$$

Všechny předpoklady věty jsou splněny a lze psát:

$$\int \mathrm{e}^{5t+3}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{5}\int \mathrm{e}^{5t+3}5\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{5}\int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{5}\mathrm{e}^{x}+c =$$
$$= \tfrac{1}{5}\mathrm{e}^{5t+3}+c\,, \quad t\in\mathbb{R}\,.$$

☛ ***Příklad 1.14.***

Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{e^t}{(e^t+2)^3}\,dt\,.$

Řešení. Integrand je spojitý v $\mathbb{R}$, integrál proto existuje v $\mathbb{R}$,. Postupujme podobně jako v předchozím příkladu:

$$\int \frac{e^t}{(e^t+2)^3}\,dt = \left| \begin{array}{c} x = e^t + 2 \\ dx = e^t\,dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx =$$

$$= \frac{x^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{4x^4} + c = -\frac{1}{4(e^t+2)^4} + c\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Poznámka. Samozřejmě nezáleží na tom, jakými písmeny jsou jednotlivé proměnné označeny.

☛ *Příklad 1.15.*

Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{(\ln x)\sqrt{(5+\ln^2 x)^3}}{x}\,\mathrm{d}x$ v intervalu $I = (0,+\infty)$.

Řešení.

$$\int \frac{(\ln x)\sqrt{(5+\ln^2 x)^3}}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{(5+\ln^2 x)^3}}\,(\ln x)\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{(5+\ln^2 x)^3}}\,(2\ln x)\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} t = 5+\ln^2 x \\ \mathrm{d}t = (2\ln x)\,\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = -2\sqrt{t} + c =$$

$$= -2\sqrt{5+\ln^2 x} + c\,, \quad x \in (0,+\infty)\,.$$

Věta (Druhá věta o substituci v neurčitém integrálu) *Nechť v intervalu I existuje integrál na levé straně rovnosti*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.3}$$

a rovná se $F(t)$, nechť funkce $x = \varphi(t)$ má nenulovou derivaci v každém bodě intervalu I a nechť zobrazuje interval I na interval $J = \varphi(I)$. Pak v intervalu J existuje integrál na pravé straně rovnosti (1.3) a rovná se $F\big(\psi(x)\big)$, kde $\psi(x)$ je inverzní funkce k funkci $x = \varphi(t)$.

Důkaz. Funkce φ je podle předpokladu prostá v intervalu I. Označme $t = \psi(x)$ funkci inverzní k funkci φ. Tato funkce zobrazuje interval J na interval I.
Podle předpokladu existuje funkce G, diferencovatelná v I taková, že $G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,,\ t \in I\,.$ Označme

$$F(x) = G(\psi(x))\,.$$

Podle věty o derivaci složené funkce existuje v intervalu J derivace F' a platí $F'(x) = G'(\psi(x))\psi'(x) = G'(t)\psi'(x) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \cdot 1/\varphi'(t) = f(x)$, $x \in J$.

Poznámka. Místo předpokladu $\varphi'(t) \neq 0$ pro všechna $t \in I$ stačí požadovat, aby funkce φ byla ryze monotónní a aby bylo $\varphi'(t) = 0$ pro nejvýše konečný počet bodů $t \in I$.

☛ ***Příklad 1.16.***

Vypočítejte integrál $\int \dfrac{5}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\,,\, x \in (-1,1)$.

Řešení. Integrand je spojitý v intervalu $J = (-1,1)$, takže integrál v tomto intervalu existuje. Abychom odstranili odmocninu v integrandu, využijeme identitu $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ a substituci:

$$x = \varphi(t) = \sin t\,; \quad \varphi(t) \text{ zobrazuje } (-\pi/2, \pi/2) \text{ na } (-1,1)\,;$$
$$\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t\,; \quad \varphi'(t) = (\sin t)' = \cos t \neq 0\,;$$
$$\sqrt{1-x^2} = |\cos t| = \cos t > 0\,;$$
$$t = \arcsin x$$

$$\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{5}{\cos t} \cos t\,\mathrm{d}t = 5 \int 1\,\mathrm{d}t = 5t + c =$$
$$= 5 \arcsin x + t, \quad x \in (-1,1)\,.$$

1.5 Integrace racionálních funkcí

Věta (Rozkladu na součet parciálních zlomků)
Nechť $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ je racionální lomená funkce a nechť jmenovatel $Q(x)$ lze psát ve tvaru

$$Q(x) = a(x-x_1)^{k_1} \cdots (x-x_r)^{k_r} \cdot (x^2+2p_1x+q_1)^{l_1} \cdots (x^2+2p_sx+q_s)^{l}$$

kde polynomy $x^2+2p_ix+q_i$, $i = 1, \ldots, s$, jsou v reálném oboru nerozložitelné. Potom lze $R(x)$ vyjádřit – až na pořadí sčítanců – právě jedním způsobem ve tvaru

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{l_k} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2+2p_ix+q_i)^j},$$

kde $p(x)$ je polynom, A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} jsou reálné konstanty; rovnost platí pro všechna $x \in \mathbf{D}_R$, tj. pro všechna reálná x různá od kořenů polynomu $Q(x)$ ve jmenovateli.

☛ ***Příklad 1.17.***

Rozložte funkci na součet parciálních zlomků:

$$\boldsymbol{R(x) = \frac{3x+5}{x^2-3x+2}}$$

Řešení. Polynom ve jmenovateli má kořeny $\mathbf{1}$ a $\mathbf{2}$, proto:

$$\boldsymbol{R(x) = \frac{3x+5}{x^2-3x+2} = \frac{3x+5}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}}\,.$$

Při hledání koeficientů $\boldsymbol{A, B}$ převeďme oba zlomky vpravo na společného jmenovatele. Aby byl výsledek identický s původní zadanou funkcí, musí být v čitateli identické funkce, tj. koeficienty u všech mocnin proměnné $\boldsymbol{x}$ musí být shodné.

$$\frac{3x+5}{(x-1)(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$3x + 5 = (A+B)x + (-2A-B)$$

$$\begin{array}{llcl} x^1 & \ldots \quad 3 & = & A+B \\ x^0 & \ldots \quad 5 & = & -2A-B \\ \hline \end{array}$$

$$A = -8, \quad B = 11$$

Celkem je tedy

$$R(x) = \frac{3x+5}{x^2-3x+2} = -\frac{8}{x-1} + \frac{11}{x-2}\,.$$

☛ ***Příklad 1.18.***

Rozložte funkci na součet parciálních zlomků:

$$R(x) = \frac{3x+5}{(x-1)^2(x-2)}$$

Řešení.

$$R(x) = \frac{3x+5}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2}$$

$$\frac{3x+5}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2}{(x-1)(x-2)}$$

$$\begin{aligned} 3x+5 &= A(x^2-3x+2) + B(x-2) + C(x^2-2x+1) \\ 3x+5 &= (A+C)x^2 + (-3A+B-2C)x + (2A-2B+C) \end{aligned}$$

Aby byly funkce na obou stranách rovnice identické, musí platit:

$$\begin{array}{rcl} x^2 \ \dots \ 0 & = & A + C \qquad\qquad (\rightarrow \ A = -C) \\ x^1 \ \dots \ 3 & = & -3A + B - 2C \\ x^0 \ \dots \ 5 & = & 2A - 2B + C \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 3 & = & -A + B \\ 5 & = & A - 2B \\ \hline \end{array}$$

$$B = -8, \quad A = -11, \quad C = 11$$

Celkem je tedy

$$R(x) = \frac{3x+5}{(x-1)^2(x-2)} = -\frac{11}{x-1} - \frac{8}{(x-1)^2} + \frac{11}{x-2}\,.$$

Poznámka. Uvědomme si, že pokud bychom hledali rozklad pouze ve tvaru

$$R(x)=\frac{3x+5}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-2},$$

získali bychom podmínku

$$\begin{aligned}
3x+5 &= A(x-2)+B(x-1)^2\\
3x+5 &= A(x-2)+B(x^2-2x+1)\\
3x+5 &= Bx^2+(A-2B)x+(-2A+B)
\end{aligned}$$

a příslušnou soustavu rovnic, která nemá řešení (máme jen dvě proměnné a tři rovnice, z nichž žádná není lineární kombinací ostatních):

$$\begin{array}{rcl}
x^2 \ \dots \ 0 &=& B\\
x^1 \ \dots \ 3 &=& A-2B\\
x^0 \ \dots \ 5 &=& -2A+B\\
\hline
\end{array}$$

$$B=0, \quad A=3 \ \wedge \ A=-\frac{5}{2}$$

Výpočet integrálu racionální funkce

Danou racionální funkci nejprve rozložíme na součet parciálních zlomků. Není-li stupeň polynomu v čitateli menší než stupeň polynomu ve jmenovateli, provedeme nejprve částečné dělené polynomů. Poté stačí zintegrovat jednotlivé zlomky.

Pro nejjednodušší parciální zlomky zřejmě platí:

$$\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \ln|x-a| + c$$

Pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $x \in (-\infty, a)$ nebo $x \in (a, \infty)$ platí:

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + c$$

☛ ***Příklad 1.19.***

Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2-3x}$.

Řešení.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2-3x} = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{2-3x}(-3)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\ln|2-3x| + c.$$

☛ ***Příklad 1.20.***

Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+5)^3}$.

Řešení.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+5)^3} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(2x+5)^3}\,2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x+5)^{-3}\,2\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+5)^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{4(2x+5)^2} + c\,.$$

☛ ***Příklad 1.21.***

Vypočítejte integrál $I = \displaystyle\int \frac{3x+5}{(x-1)^2(x-2)}\,\mathrm{d}x\,.$

Řešení. Po rozkladu na parciální zlomky obdržíme:

$$I = \int \left(-\frac{11}{x-1} - \frac{8}{(x-1)^2} + \frac{11}{x-2}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= -11 \ln|x-1| - 8\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + 11 \ln|x-2| + c =$$

$$= 11 \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + \frac{8}{x-1} + c\,.$$

Na následujících příkladech si ukážeme, jak si poradit v případech, kdy je ve jmenovateli kvadratický nerozložitelný polynom. Je-li v čitateli jen konstanta, směřujeme k funkci arctg .

☛ ***Příklad 1.22.***

Vypočítejte integrál $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+x^2}\,.$

Řešení. Polynom ve jmenovateli je v reálném oboru nerozložitelný. Integrace povede na arctg :

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\left(\frac{x^2}{2}+1\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + c\,.$$

Podobně dostaneme:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c, \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

☛ ***Příklad 1.23.***

Vypočítejte integrál $\boldsymbol{I = \int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2 + 2}}$.

Řešení.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\left(\frac{3x^2}{2}+1\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \int \frac{1}{\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 1} \sqrt{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + c\,.$$

☛ ***Příklad 1.24.***

Vypočítejte integrál $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2 - 3x + 6}$.

Řešení.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2 - 3x + 6} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - \frac{3}{2}x + 3} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 3} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{39}{16}} =$$

$$\frac{16}{2\cdot 39}\,\frac{\sqrt{39}}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{39}}(x - \frac{3}{4})\right)^2 + 1}\,\frac{4}{\sqrt{39}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{4}{\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{4}{\sqrt{39}}\left(x - \frac{3}{4}\right) + c = \frac{2}{\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{4x - 3}{\sqrt{39}} + c.$$

Je-li v čitateli lineární funkce, budeme vždy zlomek rozkládat na součet dvou zlomků, z nichž jeden má v čitateli derivaci jmenovatele, a vede tedy na logaritmus, a druhý má v čitateli jen konstatntu a vede na arcustangens:

☛ ***Příklad 1.25.***

Vypočítejte integrál $I = \int \frac{3x+5}{2x^2-3x+6}\,\mathrm{d}x\,.$

Řešení.

$$I = \frac{3}{4}\int \frac{4x-3}{2x^2-3x+6}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\frac{3}{4}\cdot 3+5}{2x^2-3x+6}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{3}{4}\ln\left|2x^2-3x+6\right| + \frac{33}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{4x-3}{\sqrt{39}} + c.$$

Pro výpočet integrálu

$$K_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}, \quad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}.$$

využíváme rekurentní vztah

$$K_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} K_n, \quad n = 1, 2, \ldots, x \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

který lze odvodit pomocí metody per partes:

$$K_n = \int 1 \cdot \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = 1, & u = x \\ v = \dfrac{1}{(x^2+a^2)^n}, & v' = -\dfrac{2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \left[\frac{1}{(x^2+a^2)^n} - a^2 \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}} \right] \mathrm{d}x = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nK_n$$

Odtud již snadno plyne (1.4).

1.6 Převedení integrandu na racionální funkci

Pomocí druhé věty o substituci lze řadu integrálů převést na integrály racionální funkce.

Integrand obsahuje goniometrické funkce

Integrály typu

$$\int R(\sin^2 x, \cos x) \sin x \, \mathrm{d}x$$

převádíme substitucí $t = \cos x$, $\mathrm{d}t = -\sin x \, \mathrm{d}x$ na integrál z racionální lomené funkce v proměnné t.

☛ ***Příklad***. Máme vypočítat integrál $\int \sin^3 x \, \mathrm{d}x$.

Řešení.

$$\int \sin^3 x \, \mathrm{d}x = \int \sin^2 x \sin x \, \mathrm{d}x = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, \mathrm{d}x =$$

$$-\int (1 - t^2) \, \mathrm{d}t = t^3/3 - t + c = (\cos^3 x)/3 - \cos x + c.$$

Integrály typu

$$\int R(\sin x, \cos^2 x) \cos x \, \mathrm{d}x$$

převádíme substitucí $t = \sin x, \; \mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x$ na integrál z racionální lomené funkce v proměnné t.

Podobně převádíme integrály typu

$$\int \sin^m x \cos^n x \, \mathrm{d}x, \quad \text{kde} \quad m, n \in \mathbb{N},$$

je-li alespoň jedno z čísel m, n liché. Jsou-li obě čísla sudá, využíváme vztahy

$$\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2; \quad \cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2, \tag{1.5}$$

případně u vyšších mocnin i vícekrát po sobě.

☛ ***Příklad***

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \int (1 - \cos 2x)/2 \, \mathrm{d}x = x/2 - (\sin 2x)/4 + c.$$

☛ ***Příklad***

$$\int \cos^4 x \, \mathrm{d}x = \int (\cos^2 x)^2 \, \mathrm{d}x = (1/4) \int (1 + \cos 2x)^2 \, \mathrm{d}x =$$

$$= (1/4) \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, \mathrm{d}x =$$

$$= x/4 + (\sin 2x)/4 + (1/4) \int (\cos^2 2x) \, \mathrm{d}x =$$

$$= x/4 + (\sin 2x)/4 + (1/8) \int (1 + \cos 4x) \, \mathrm{d}x =$$

$$= 3x/8 + (\sin 2x)/4 + (\sin 4x)/32 + c.$$

☛ ***Příklad***

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} \sin x\,\mathrm{d}x =$$

$$-\int \frac{1 - z^2}{1 + z^2}\,\mathrm{d}z = z - 2\operatorname{arctg} z + c = \cos x - 2\operatorname{arctg}(\cos x) + c.$$

☛ ***Příklad***

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\cdots = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| + c.$$

Integrály typu

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)\,\mathrm{d}x,$$

jejichž integrand obsahuje pouze sudé mocniny goniometrických funkcí $\sin x$, $\cos x$ a součiny $\sin x \cos x$, lze převést

substitucí $t = \operatorname{tg} x$ opět na integrál z racionální lomené

funkce v proměnné t.

Je totiž

$$
\begin{aligned}
x &= \operatorname{arctg} t, \qquad \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\
\cos^2 x &= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}\\
\sin^2 x &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}\\
\sin x \cos x &= \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t}{1+t^2}.
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

☛ ***Příklad***

$$\int \operatorname{tg}^4 x \, \mathrm{d}x = \left| t = \operatorname{tg} x, \ \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \right| = \int \frac{t^4 - 1 + 1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int (t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3 - t + \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + c.$$

☛ ***Příklad.*** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x}.$

Řešení. Pro $x \neq \pi/2 + k\pi$, k celé, platí

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 5}\,\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - 4z + 5} = \int \frac{\mathrm{d}z}{(z-2)^2 + 1} = \operatorname{arctg}(z-2) + c =$$

$$= \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x - 2) + c.$$

Univerzální substituce pro $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$

Substitucí $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ se každý integrál, jehož integrand je racionální funkce proměnných $\sin x$ a $\cos x$, převede na integrál, jehož integrand je racionální funkce jedné proměnné, a to na každém intervalu neobsahujícím $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}$$

$$t^2 = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$t^2(1+\cos x) = 1-\cos x \quad \Longrightarrow \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} \quad \Longrightarrow \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Takto získané integrandy však bývají složité (jmenovatele jsou často polynomy vysokých stupňů), a proto tuto substituci používáme jen tehdy, nelze-li použít některou z předchozích substitucí.

☛ ***Příklad***. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x,\ x \neq (2k+1)\pi.$

$$\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}, & \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\[2ex] \mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, & \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1-\dfrac{2t}{1+t^2}}{1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2-2t+1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1+t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = t - \ln(1+t^2) + c =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \ln\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) + c, \quad x \neq (2k+1)\pi.$$

Integrály typu $\int \sin ax\ \cos bx\,\mathrm{d}x$, $\int \sin ax\ \sin bx\,\mathrm{d}x$, $\int \cos ax\ \cos bx\,\mathrm{d}x$, $a \neq b$, počítáme tak, že součin v integrandu převedeme na součet pomocí vztahů

$$\begin{aligned} \sin\alpha\ \cos\beta &= (\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))/2,\\ \sin\alpha\ \sin\beta &= (\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))/2,\\ \cos\alpha\ \cos\beta &= (\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))/2. \end{aligned} \tag{1.7}$$

☛ ***Příklad***

$$\int \sin 5x \cos x\,\mathrm{d}x = (1/2)\int(\sin 6x+\sin 4x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -(1/12)\cos 6x - (1/8)\cos 4x + c.$$

Integrály typu $\int R(e^{\alpha x})\,\mathrm{d}x$, $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$, převádíme substitucí

$$e^{\alpha x} = t, \quad x = \frac{1}{\alpha}\ln t, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha t}\,\mathrm{d}t$$

na integrál z racionální lomené funkce $\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int R(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

☛ ***Příklad***

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+e^x)^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)^2} = \ln\left|\frac{t}{1+t}\right| + \frac{1}{1+t} + c =$$
$$= \ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right| + \frac{1}{1+e^x} + c$$

☛ ***Příklad***

$$\int \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{1+e^{2x}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + c = \operatorname{arctg} e^x + c$$

Integrály typu

$$\int R(\ln x) \frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{1.8}$$

převádíme substitucí $\ln x = t$, $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ na integrál z racionální lomené funkce $\int R(t)\,\mathrm{d}t$.

☛ ***Příklad***

$$\int \frac{\ln x}{1+\ln x} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \left| \begin{array}{c} \ln x = t \\ \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \end{array} \right| = \int \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= t - \ln|t+1| + c = \ln x - \ln|1+\ln x| + c.$$

Integrand obsahuje odmocniny podílu lineárních funkcí

Pro integrály typu

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right) \mathrm{d}x, \; n \in \mathbb{N}, \; a, b, c, e \in \mathbb{R}, \; ae-bc \neq 0,$$

volíme substituci

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+e}, \quad x = \frac{et^n - b}{a - ct^n}, \quad \mathrm{d}x = \frac{(ae-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2} \mathrm{d}t.$$

Je-li n sudé, je nutno předpokládat $(ax+b)/(cx+e) \geq 0$, neboť $t^n \geq 0$. Podle věty o substituci platí

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right) \mathrm{d}x = \int R\left(\frac{et^n - b}{a - ct^n}, t\right) \frac{(ae-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2} \mathrm{d}t.$$

Integrál na pravé straně je integrál z racionální funkce v proměnné

☛ ***Příklad***

$$I = \int \sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left| t^3 = \frac{2x+1}{x+1},\ x = \frac{t^3-1}{2-t^3},\ \ \mathrm{d}x = \frac{3t^2}{(2-t^3)^2}\,\mathrm{d}t \right| =$$

$$= \int t\left(\frac{2-t^3}{t^3-1}\right)^2 \frac{3t^2}{(2-t^3)^2}\,\mathrm{d}t = 3\int \frac{t^3}{(t^3-1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Tento integrál z racionální funkce již umíme vypočítat (proveďte sami výpočet!) a dostaneme

$$I = \frac{t}{1-t^3} + \frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{6}\ln(t^2+t+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c,$$

kde za t musíme dosadit $t = \sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}}$.

☛ ***Příklad***

$$I = \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \frac{\left[\sqrt{1-\sqrt{x}}\right]^2}{\sqrt{1+\sqrt{x}}\sqrt{1-\sqrt{x}}} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

$$I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int (1-x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = -2(1-x)^{1/2}+c = -2\sqrt{1-x}$$

$$I_2 = \int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} = t,\ x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ \mathrm{d}x = \dfrac{2t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Tento integrál již umíme spočítat. Dostaneme $I_2 = \operatorname{arctg} t - t/(1+t^2) + c$, kde za t musíme dosadit $t = \sqrt{x/(1-x)}$. Je tedy

$$I = I_1 - I_2 = -2\sqrt{1-x} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}} - \sqrt{x(1-x)} + c.$$

☛ ***Příklad***

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x - 2\sqrt{(x+1)(x-1)})\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int (x-\sqrt{(x+1)(x-1)})\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}(x-1)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left| t^2 = \frac{x+1}{x-1},\ x = \frac{t^2+1}{t^2-1},\ x-1 = \frac{2}{t^2-1},\ \ \mathrm{d}x = \frac{-4t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4\int t\frac{2}{t^2-1}\,\frac{t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} + 8\int \frac{t^2}{(t^2-1)^3}\,\mathrm{d}t,$$

což je integrál z racionální funkce, který již dovedeme spočítat.

Integrand obsahuje odmocniny kvadratických trojčlenů

.

Budeme se zabývat integrály typu

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,\mathrm{d}x, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0. \tag{1.9}$$

Aby úloha měla smysl, musí být

$$ax^2 + bx + c \geq 0. \tag{1.10}$$

Připomeňme, že nerovnost (1.10) může být splněna na celé reálné ose $\mathbb{R}$, a to v případě, že kvadratická rovnice $ax^2+bx+c = 0$ nemá různé reálné kořeny a $a > 0$, na sjednocení $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$ v případě, že má dva reálné kořeny $x_1 < x_2$ a současně je $a > 0$, na intervalu (x_1, x_2), má-li dva reálné kořeny $x_1 < x_2$ a současně je $a < 0$, a konečně není splněna nikde, je-li $a < 0$ a rovnice nemá reálné kořeny.

1. Eulerova substituce

V případě $a > 0$ můžeme integrál (1.9) převést na integrál z racionální funkce pomocí tzv. **1. Eulerovy substituce**

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - x\sqrt{a}. \tag{1.11}$$

Umocníme obě strany rovnosti a dostaneme $ax^2 + bx + c = t^2 - 2tx\sqrt{a} + ax^2$. Členy ax^2 se ruší a dostáváme lineární rovnici pro x. Je tedy

$$x = \frac{t^2 - c}{b + 2t\sqrt{a}}, \qquad \mathrm{d}x = 2\frac{t^2\sqrt{a} + bt + c\sqrt{a}}{(b + 2t\sqrt{a})^2}\,\mathrm{d}t. \tag{1.12}$$

Po dosazení do (1.9) dostáváme integrál z racionální funkce v proměnné t.

Příklad Máme vypočítat integrál $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2+6x+7}}$.

Řešení. Jelikož je diskriminant $D = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = -20 < 0$, je integrand spojitý na $\mathbb{R}$. Je $a = 2 > 0$, takže lze použít 1. Eulerovu substituci.

$$\sqrt{2x^2+6x+7} = t - x\sqrt{2},\ x = \frac{t^2-7}{6+2t\sqrt{2}},\ \mathrm{d}x = 2\frac{t^2\sqrt{2}+6t+7}{(6+2t\sqrt{2})^2}$$

$$I = \int 2\frac{1}{\left(t-\sqrt{2}\dfrac{t^2-7}{6+2t\sqrt{2}}\right)}\frac{t^2\sqrt{2}+6t+7\sqrt{2}}{(6+2t\sqrt{2})^2}\,\mathrm{d}t = \int\frac{\mathrm{d}t}{3+t\sqrt{2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|3+t\sqrt{2}| + c =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|3+2x+\sqrt{2}\sqrt{2x^2+6x+7}| + c,\ x \in \mathbb{R}.$$

2. Eulerova substituce.

V případě, že je $c > 0$, lze použít tzv. **2. Eulerovu substituci**

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}. \tag{1.13}$$

Opět umocníme obě strany rovnice na druhou a obdržíme $ax^2 + bx + c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c$. Nyní se zruší c a můžeme krátit obě strany x. Dostaneme lineární rovnici pro x z níž vypočteme

$$x = \frac{2t\sqrt{c} - b}{a - t^2}, \quad \mathrm{d}x = 2\frac{t^2\sqrt{c} - bt + a\sqrt{c}}{(a - t^2)^2}\,\mathrm{d}t. \tag{1.14}$$

Po dosazení do integrálu (1.9) dostáváme integrál z racionální funkce.

☛ ***Příklad***. Máme vypočítat integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

Řešení. Diskriminant je opět záporný, takže počítáme na celé množině $\mathbb{R}$. Je $c = 1 > 0$, lze tedy použít 2. Eulerovu substituci.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2-x+1} = xt-1 \\ x = \dfrac{1-2t}{1-t^2}, \ \ \mathrm{d}x = -2\dfrac{t^2-t+1}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= 2\int \frac{t^2-t+1}{t(1-t)(1+t)^2}\ \mathrm{d}t.$$

3. Eulerova substituce Je-li $D = b^2 - 4ac > 0$, pak lze trojčlen pod odmocninou rozložit $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, kde $x_1 \neq x_2$ jsou kořeny polynomu $ax^2 + bx + c$. Integrál (1.9) můžeme nyní převést na integrál z racionální funkce pomocí tzv. **3. Eulerovy substituce**

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1). \tag{1.15}$$

Odtud $a(x-x_1)(x-x_2) = t^2(x-x_1)^2$ a po krácení dvojčlenem $x-x_1$ dostáváme rovnici $a(x-x_2) = t^2(x-x_1)$, z níž vyjádříme x pomocí t

$$x = \frac{ax_2 - x_1t^2}{a - t^2}, \qquad \mathrm{d}x = 2a\frac{(x_2 - x_1)t}{(a - t^2)^2}\,\mathrm{d}t. \tag{1.16}$$

Po dosazení do integrálu (1.9) dostaneme integrál z racionální funkce v proměnné t.

☛ ***Příklad***. Máme vypočítat integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)\sqrt{4-x^2}}$.

Řešení. Integrál počítáme pro $4 - x^2 > 0$, tj. pro $|x| < 2$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)\sqrt{4-x^2}} =$$

$$\left| \sqrt{4-x^2} = (2-x)t,\ x = 2\frac{t^2-1}{1+t^2},\ \mathrm{d}x = \frac{8t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \right| =$$

$$= \int \frac{1}{\left(4\frac{(t^2-1)^2}{(1+t^2)^2}+4\right)\left(2-2\frac{t^2-1}{1+t^2}\right)t}\frac{8t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t.$$

Dostali jsme integrál z racionální funkce, který již dovedeme spočítat.

Poznámka Eulerovými substitucemi lze za uvedených podmínek převést $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,\mathrm{d}x$ na integrál z racionální funkce. Viděli jsme, že jak převod integrandu na racionální funkci, tak i její integrace může představovat dosti zdlouhavý a pracný proces. Ukážeme si ještě další možnosti, jak lze odstranit odmocniny z integrandů v některých speciálních případech.

Integrály typu $\int R(x, \sqrt{x^2+\alpha^2})\,\mathrm{d}x$ převádíme substitucí

$$x = \alpha \sinh t, \quad \mathrm{d}x = \alpha \cosh t\,\mathrm{d}t$$

na integrál z racionální funkce

$$\int R(x, \sqrt{x^2+\alpha^2})\,\mathrm{d}x = |x = \alpha\sinh t,\ \mathrm{d}x = \alpha\cosh t\,\mathrm{d}t| =$$

$$= \int R(\alpha\sinh t, \sqrt{\alpha^2(1+\sinh^2 t)}) \cdot \alpha\cosh t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int R(\alpha\sinh t, \alpha\cosh t)\alpha\cosh t\,\mathrm{d}t.$$

Tento integrál můžeme počítat podobně, jako jsme počítali integrály z goniometrických funkcí, nebo můžeme použít definici hyperbolických funkcí a převést jej na integrál z integrandu obsahujícího pouze exponenciální funkce.

☛ ***Příklad***. Máme vypočítat integrál $\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Substituce $x = \sinh t$ dává

$$\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{\sinh^2 t + 1}\cosh t\,\mathrm{d}t = \int \cosh^2 t\,\mathrm{d}t =$$

$$(1/4)\int (e^t + e^{-t})^2\,\mathrm{d}t = (1/4)\int (e^{2t} + 2 + e^{-2t})\,\mathrm{d}t =$$

$$= e^{2t}/8 + t/2 - e^{-2t}/8 + c,$$

kde za t je nutno ještě dosadit $t = \operatorname{argsinh} x$.

Integrály typu $\int R(x, \sqrt{x^2 - \alpha^2})\, \mathrm{d}x$ převádíme substitucí $x = \alpha / \cos t$ na integrály z racionální lomené funkce v sinech a kosinech

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - \alpha^2})\; \mathrm{d}x = \left| x = \frac{\alpha}{\cos t},\; \mathrm{d}x = \frac{\alpha \sin t}{\cos^2 t}\, \mathrm{d}t \right| =$$

$$= \int R\left(\frac{\alpha}{\cos t}, \alpha \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} \right) \cdot \frac{\alpha \sin t}{\cos^2 t}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int R\left(\frac{\alpha}{\cos t}, \alpha \frac{|\sin t|}{|\cos t|} \right) \frac{\alpha \sin t}{\cos^2 t}\, \mathrm{d}t = \int R_1(\sin t, \cos t)\, \mathrm{d}t,$$

což je integrál z racionální funkce lomené R_1 v sinech a kosinech.

Integrály typu $\int R(x, \sqrt{\alpha^2 - x^2})\,\mathrm{d}x$ převádíme substitucí $x = \alpha \sin t$ na integrály z racionální funkce v sinech a kosinech

$$\int R(x, \sqrt{\alpha^2 - x^2})\,\mathrm{d}x = |x = \alpha \sin t,\ \mathrm{d}x = \alpha \cos t\,\mathrm{d}t| =$$

$$= \int R(\alpha \sin t, \alpha\sqrt{1 - \sin^2 t})\alpha \cos t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int R(\alpha \sin t, \alpha|\cos t|)\alpha \cos t\,\mathrm{d}t = \int R_3(\sin t, \cos t)\,\mathrm{d}t.$$