PŘEDNÁŠKA 12

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU

13.1 Cauchyova úloha pro homogenní lineární diferenciální rovnici 1. řádu

Definice 1. **Homogenní lineární diferenciální rovnicí 1. řádu** budeme rozumět rovnici

$$\dot{x} = h(t)x\,, \tag{13.1}$$

kde $h(t)$ je nějaká reálná funkce reálné proměnné.

Rovnici (13.1) zapisujeme často také ve tvaru

$$\dot{x} - h(t)x = 0\,,$$

proto se pro ni vedle názvu homogenní rovnice používá i název **rovnice s nulovou pravou stranou**. O funkci $h(t)$ budeme předpokládat, že je definovaná a spojitá buď na celé množině $\mathbb{R}$, nebo na konečném množství intervalů v $\mathbb{R}$. V dalším můžeme tedy všechny úvahy provádět pro hodnoty proměnné t z nějakého intervalu $\subset \mathbb{R}$, na němž je funkce $h(t)$ spojitá.

Definice 2. Řešením rovnice (13.1) na intervalu $I \subset$ budeme nazývat takovou reálnou funkci $u(t)$, která má v každém bodě intervalu I derivaci a splňuje identitu

$$\dot{u}(t) = h(t)u(t) \quad \text{pro všechna} \quad t \in I\,. \tag{13.2}$$

Protože předpokládáme, že řešení $u(t)$ má v intervalu I derivaci, musí být v tomto intervalu spojité. Podle předpokladu je také funkce $h(t)$ spojitá, takže z rovnosti (13.2) plyne, že řešení $u(t)$ má na celém intervalu I dokonce spojitou derivaci.

Je zřejmé, že funkce $u(t) = 0$ pro všechna $t \in$ je řešením rovnice (13.1). Takové řešení nazýváme **triviálním řešením**.

Hledejme nyní **netriviální řešení** $u(t)$ rovnice (13.1). Netriviální řešení musí být v nějakém bodě nenulové, a jelikož je spojité, musí pak být nenulové na nějakém celém nedegenerovaném intervalu $I \subset$. Na takovém intervalu můžeme rovnost (13.2) přepsat na tvar

$$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = h(t)\,, \quad t \in I\,.$$

Na obou stranách přejdeme k primitivním funkcím. Přitom integrační konstantu z praktických důvodů, které brzy poznáme, budeme zapisovat ve tvaru $\ln|c|$, kde c je libovolné nenulové reálné číslo. Dostaneme tak rovnost

$$\ln|u(t)| = \int h(t)\,\mathrm{d}t + \ln|c|\,.$$

Přechodem k funkci inverzní dostáváme

$$|u(t)| = |c|\,e^{\int h(t)\,\mathrm{d}t}\,, \quad t \in I\,. \tag{13.3}$$

Vidíme, že toto netriviální řešení je nenulové na celém svém definičním oboru. Je tedy buď všude kladné, nebo všude záporné. To nám umožňuje vypořádat se s absolutními hodnotami ve vztahu (13.3) jednoduše tak, že je vynecháme a dostaneme hledané netriviální řešení rovnice (13.1)

$$u(t) = ce^{\int h(t)\,\mathrm{d}t}, \quad t \in I\,. \tag{13.4}$$

Jelikož funkce $h(t)$ je podle předpokladu spojitá na celém intervalu , je i integrál na pravé straně (13.4) definován pro všechna $t \in$. To znamená, že funkce (13.4) je řešením rovnice (13.1) na celém intervalu , na němž je koeficient $h(t)$ spojitá funkce.

Uvědomme si, že vztahy (13.2) a (13.4) jsou ekvivalentní v tom smyslu, že každá funkce $u(t)$, která vyhovuje rovnosti (13.2), je dána předpisem (13.4), a každá funkce daná předpisem (13.4) vyhovuje rovnosti (13.2). To znamená, že každé netriviální řešení rovnice (13.1) je dáno předpisem (13.4). Navíc vztah (13.4) můžeme rozšířit i na případ triviálního řešení tím, že dovolíme, aby konstanta c směla nabývat i hodnotu 0. Později uvidíme, že každé řešení homogenní rovnice (13.1) lze dostat z předpisu (13.4) vhodnou volbou konstanty c. Proto pro předpis (13.4) používáme název **obecný tvar řešení** rovnice (13.1) a zapisujeme jej pomocí symbolu $u(t; c)$

$$u(t; c) = ce^{\int h(t)\,\mathrm{d}t}, \quad t \in \ . \tag{13.5}$$

K tomuto názvu je třeba podotknout, že v řadě učebnic se používá pro funkci (13.5) název **obecné řešení** rovnice (13.1). Avšak řešení rovnice (13.1) je podle definice reálná funkce jedné proměnné t, zatímco funkce (13.5) je funkcí dvou proměnných, a to t a c. Odtud plyne poněkud groteskní důsledek, že obecné řešení rovnice (13.1) není jejím řešením. Toto je důvod, proč zavádíme podstatně výstižnější název – obecný tvar řešení.

Cauchyova úloha pro homogenní lineární rovnici

V obecném tvaru řešení rovnice (13.1) se vyskytuje jeden volný parametr c. Praxe nás však zpravidla staví do situace, kdy máme najít jedno konkrétní řešení, které v zadaném **počátečním okamžiku** τ nabývá zadanou **počáteční hodnotu** ξ. Tuto podmínku zapisujeme ve tvaru

$$x(\tau) = \xi \tag{13.6}$$

a nazýváme ji **počáteční podmínkou**.

Definice 3. Úlohu najít řešení rovnice (13.1) splňující počáteční podmínku (13.6), tj.

$$\dot{x} = h(t)x\,, \quad x(\tau) = \xi, \tag{13.7}$$

nazýváme **Cauchyova** (nebo také **počáteční**) **úloha pro homogenní lineární diferenciální rovnici 1. řádu**.

Abychom zdůraznili, že řešení Cauchyovy úlohy závisí i na počátečních podmínkách τ a ξ, budeme pro řešení Cauchyovy úlohy používat vedle stručného zápisu $u(t)$ i poněkud podrobnější zápis $u(t; \tau, \xi)$, a to zejména v situacích, kdy máme rozlišovat mezi několika řešeními téže rovnice pro několik různých počátečních podmínek. Uvědomme si, že uvedený zápis připomíná funkce tří proměnných t, τ a ξ. Jako řešení konkrétní Cauchyovy úlohy při pevně daných počátečních údajích τ a ξ je to však stále funkce jen jediné proměnné, a to času t. Na druhé straně se však často v praxi vyšetřuje i závislost řešení na změnách hodnot τ a ξ. (Obvykle se uvažují malé změny, představující různé náhodné poruchy.)

Používaná terminologie "počáteční okamžik"a "počáteční hodnota"je poněkud zavádějící. Je-li totiž funkce $u(t)$, $t \in$, řešením úlohy (13.7), pak sice musí platit $\tau \in$, ale není nutné, aby okamžik τ byl počátečním bodem intervalu . V našich úvahách se dokonce budeme setkávat téměř výhradně se situací, kdy řešení úlohy (13.7) je definováno v nějakém okolí bodu τ.

Řešení $u(t; \tau, \xi)$ Cauchyovy úlohy (13.7) najdeme tak, že do

☛ ***Příklad 1.*** Máme najít obecný tvar řešení rovnice

$$\dot{x} + t^2 x = 0 \tag{13.8}$$

a řešení Cauchyovy úlohy

$$\dot{x} + t^2 x = 0\,,\ \ x(3) = 5\,. \tag{13.9}$$

Řešení. Funkce $h(t) = -t^2$ je spojitá na celé reálné ose $\mathbb{R}$. Rovnice má triviální řešení $u(t) = 0$ definované pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Budeme hledat netriviální řešení $u(t) \neq 0$. Vyjdeme ze vztahu (13.2), který pro naši rovnici má tvar

$$\dot{u}(t) = -t^2 u(t)\,,\ \ t \in \mathbb{R}\,.$$

Upravíme jej na tvar

$$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = -t^2$$

a obě strany zintegrujeme. Dostaneme

$$\int \frac{\dot{u}(t)}{u(t)}\,\mathrm{d}t = -\int t^2\,\mathrm{d}t\,,$$

neboli

$$\ln|u(t)| = -\frac{1}{3}\,t^3 + \ln|c|\,.$$

Zde opět vyjadřujeme integrační konstantu pomocí logaritmu. Zřejmá úprava dává

$$\ln\left|\frac{u(t)}{c}\right| = -\frac{1}{3}\,t^3\,.$$

Odtud přechodem k inverzní funkci na obou stranách rovnosti dostáváme

$$u(t) = ce^{-\frac{1}{3}t^3}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Nalezli jsme tak obecný tvar řešení rovnice (13.8)

$$u(t;c) = ce^{-\frac{1}{3}t^3}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{13.10}$$

Nyní budeme hledat řešení Cauchyovy úlohy (13.9). Do předpisu (13.10) pro obecný tvar řešení $u(t;c)$ dosadíme $t = 3$ a $u(3;c) = 5$. Dostaneme rovnost

$$u(3;c) = 5 = ce^{-\frac{1}{3}3^3} = ce^{-9}.$$

Odtud $c = 5e^9$. Dosadíme do (13.10) a dostaneme řešení Cauchyovy úlohy (13.9)

$$u(t; 3, 5) = 5e^{-\frac{1}{3}t^3+9}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13.11}$$

☛ ***Příklad 2.*** Máme najít obecný tvar řešení rovnice

$$\dot{x} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, x \tag{13.12}$$

a řešení Cauchyovy úlohy

$$\dot{x} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, x\,, \;\; x(0) = -7\,. \tag{13.13}$$

Řešení. Funkce $h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ je definovaná a spojitě diferencovatelná na intervalu $= (-1,1)$. Na tomto intervalu má rovnice jak triviální řešení $u(t) = 0$, tak i nekonečně mnoho netriviálních řešení. Pro netriviální řešení $u(t) \neq 0$ dostáváme rovnost

$$\int \frac{\dot{u}(t)}{u(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}\,, \qquad t \in (-1,1),$$

a po integraci

$$\ln|u(t)| = \arcsin t + \ln|c|\,, \qquad t \in (-1,1)\,.$$

Odtud

$$u(t) = ce^{\arcsin t}, \quad t \in (-1, 1)\,.$$

Obecný tvar řešení rovnice (13.12) tedy je

$$u(t; c) = ce^{\arcsin t}, \quad t \in (-1, 1)\,. \tag{13.14}$$

Nyní budeme hledat řešení Cauchyovy úlohy (13.13). Do předpisu (13.14) pro obecný tvar řešení dosadíme $t = 0$ a $u(0; c) = -7$. Dostaneme rovnost $u(0; c) = -7 = ce^{\arcsin 0} = c$. Dosadíme do (13.14) a dostaneme řešení Cauchyovy úlohy (13.13)

$$u(t; 0, -7) = -7e^{\arcsin t}, \quad t \in (-1, 1)\,. \tag{13.15}$$

☛ ***Příklad 3.*** Máme zjistit, jak se chovají řešení rovnice

$$\dot{x} = kx\,, \tag{13.16}$$

kde k je reálná konstanta, pro $t \to \infty$ a $t \to -\infty$.

Řešení. Zřejmě jde o rovnici (13.1), kde $h(t) = k$ pro $t \in \mathbb{R}$. Po snadném výpočtu máme

$$u(t;c) = ce^{kt}\,, \quad t\,,\ c \in \mathbb{R}\,.$$

Vidíme, že asymptotické chování těchto řešení závisí na znaménku čísla k.

Je-li $k > 0\,,$ pak $\lim u(t;c) = \begin{cases} \infty & \text{pro} \quad t \to \infty\,, \quad c > 0\,, \\ -\infty & \text{pro} \quad t \to \infty\,, \quad c < 0\,, \\ 0 & \text{pro} \quad t \to -\infty\,. \end{cases}$

Je-li $k < 0\,,$ pak $\lim u(t;c) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad t \to \infty\,, \\ \infty & \text{pro} \quad t \to -\infty\,, \quad c > 0\,, \\ -\infty & \text{pro} \quad t \to -\infty\,, \quad c < 0\,. \end{cases}$

Pro $k = 0$ je $u(t) = c$ konstantní řešení, takže obě limity jsou rovny konstantě c. Speciálně pro volbu $c = 0$ je $u(t)$ triviální řešení, tj. obě limity jsou nulové pro všechna $k \in \mathbb{R}$.

13.1.1 Cauchyova úloha pro nehomogenní lineární diferenciální rovnici

Definice 4. Nehomogenní lineární diferenciální rovnicí 1. řádu budeme rozumět diferenciální rovnici tvaru

$$\dot{x} = h(t)x + q(t)\,, \quad t \in \ . \tag{13.17}$$

Opět budeme naše úvahy provádět na nějakém intervalu , na němž jsou funkce $h(t)$ a $q(t)$ spojité a funkce $q(t)$ na něm není identicky nulová. Často se tato rovnice zapisuje ve tvaru

$$\dot{x} - h(t)x = q(t)\,, \quad t \in \ . \tag{13.18}$$

Z tohoto zápisu je patrné, proč o nehomogenní rovnici (13.17) mluvíme jako o **rovnici s nenulovou pravou stranou**.

Definice 5. Řešením rovnice (13.17) na intervalu budeme rozumět reálnou funkci $v(t)$, která je definovaná na intervalu , má derivaci v každém bodě intervalu a splňuje identitu

$$\dot{v}(t) = h(t)v(t) + q(t) \quad \text{pro všechna } t \in \ . \tag{13.19}$$

Když hledáme řešení rovnice (13.17), vycházíme ze znalosti obecného tvaru řešení $u(t;c)$ příslušné homogenní rovnice

$$\dot{x} = h(t)x\,, \quad t \in\,, \tag{13.20}$$

které, jak víme z (13.4), má tvar

$$u(t;c) = ce^{\int h(t)\,\mathrm{d}t}\,, \quad t \in\ . \tag{13.21}$$

Nechť $w(t)$ je nějaké jedno řešení nehomogenní rovnice (13.17), které budeme nazývat **partikulárním řešením** a nechť $v(t)$ je libovolné řešení rovnice (13.17). Snadno se ověří, že rozdíl $v(t) - w(t)$ je řešením příslušné homogenní rovnice (13.20), a tedy

$$v(t) - w(t) = u(t;c)$$

pro nějakou volbu konstanty c. To znamená, že každé řešení nehomogenní rovnice lze psát ve tvaru

$$\boxed{v(t;c) = u(t;c) + w(t)\,, \quad t \in\,,} \tag{13.22}$$

kde $u(t;c)$ je obecný tvar řešení příslušné homogenní rovnice a $w(t)$ je nějaké jedno známé řešení nehomogenní rovnice. Jednoparametrický systém funkcí $v(t;c)$ budeme nazývat **obecným tvarem řešení** nehomogenní rovnice (13.17).

Metoda odhadu pro $q(t) = Q_r(t)e^{\sigma t}$

Abychom našli obecný tvar řešení nehomogenní rovnice, potřebujeme znát nějaké její partikulární řešení. Nyní popíšeme **metodu odhadu tvaru řešení**, která umožňuje takové řešení najít pro rovnice, jejichž pravé strany jsou vytvořené jako součty součinů funkcí t^k, $e^{\sigma t}$, $\sin \omega t$ a $\cos \omega t$. Takové funkce nazýváme **kvázipolynomy** a mluvíme pak o diferenciální rovnici s **kvázipolynomiální pravou stranou**.

Budeme hledat partikulární řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice

$$\dot{x} + ax = Q_r(t)e^{\sigma t}\,, \tag{13.23}$$

kde koeficient a je reálná konstanta, $Q_r(t)$ je polynom stupně r a exponent σ v exponenciální funkci na pravé straně je rovněž reálná konstanta. Partikulární řešení rovnice (13.23) budeme hledat ve tvaru

$$w(t) = t^k R(t) e^{\sigma t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{13.24}$$

kde $R(t)$ je polynom stupně r, jehož koeficienty můžeme najít např. metodou neurčitých koeficientů a exponent k u proměnné t je 1 v případě, že $\sigma = -a$, jinak je nula.
Analogicky postupujeme i při řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice tvaru

$$\dot{x} + ax = \sum_{j=1}^{s} Q_{r_j}(t) e^{\sigma_j t}, \tag{13.25}$$

kde $Q_{r_j}(t)$, $j = 1, 2, \ldots, s$, je polynom stupně r_j. V tomto případě můžeme úlohu (13.25) převést na s úloh typu (13.23). Snadno se totiž ověří, že pro lineární rovnice platí toto tvrzení:

Jsou-li funkce $w_j(t)$ pro $j = 1, 2, \ldots, m$ řešeními rovnice

$$\dot{x} + ax = g_j(t)\,, \quad j = 1, 2, \ldots, m\,, \tag{13.26}$$

pak funkce $w(t) = w_1(t) + w_2(t) + \cdots + w_m(t)$ je řešením rovnice

$$\dot{x} + ax = g_1(t) + g_2(t) + \cdots + g_m(t)\,. \tag{13.27}$$

Tato vlastnost lineárních rovnic se také nazývá **princip superpozice**.

Podle tohoto tvrzení stačí najít pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$ řešení $w_j(t)$ rovnice (13.23) s $Q_r(t)e^{\sigma t} = Q_{r_j}(t)e^{\sigma_j t}$ a součet $w_1(t) + w_2(t) + \cdots + w_m(t)$ takto nalezených řešení bude řešením rovnice (13.25). Často však postupujeme při výpočtu tak, že i řešení rovnice (13.25) hledáme najednou ve tvaru

$$w(t) = t^{k_1} R_1(t) e^{\sigma_1 t} + t^{k_2} R_2(t) e^{\sigma_2 t} + \cdots + t^{k_s} R_s(t) e^{\sigma_s t}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{13.28}$$

kde $R_j(t)$ je polynom stupně r_j a exponent $k_j = 1$ jestliže $\sigma_j = -a$, jinak $k_j = 0$.

☛ ***Příklad 4.*** Máme najít obecný tvar řešení rovnice

$$\dot{x} - 2x = -9te^{-t}\,. \tag{13.29}$$

Řešení. Máme najít obecný tvar řešení nehomogenní lineární rovnice s kvázipolynomiální pravou stranou typu (13.23). Obecný tvar řešení příslušné homogenní rovnice je

$$u(t,c) = ce^{2t}\,,\; t \in \mathbb{R}.$$

Jelikož pro koeficient $\sigma = -1$ v exponentu pravé strany platí $\sigma = -1 \neq -a = 2$, hledáme partikulární řešení $w(t)$ podle (13.24) ve tvaru

$$w(t) = (at + b)e^{-t}\,. \tag{13.30}$$

Vypočteme derivaci $\dot{w}(t) = (a - at - b)e^{-t}$ a dosadíme do rovnice (13.29). Dostaneme rovnost

$$(a - at - b)e^{-t} - 2(at + b)e^{-t} = -9te^{-t}\,.$$

Odtud porovnáním koeficientů u stejných funkcí dostaneme $a = 3$, $b = 1$. Dosadíme do (13.30) a dostaneme partikulární řešení

$$w(t) = (3t + 1)e^{-t}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Obecným tvarem řešení rovnice (13.29) je tedy jednoparametrický systém funkcí

$$v(t;c) = u(t;c) + w(t) = ce^{2t} + (3t+1)e^{-t}, \quad t, c \in \mathbb{R}.$$

☛ ***Příklad 5.*** Máme najít obecný tvar řešení rovnice

$$\dot{x} - 2x = 8te^{2t}\,. \tag{13.31}$$

Řešení. Máme najít obecný tvar řešení nehomogenní lineární rovnice s kvázipolynomiální pravou stranou typu (13.23). Obecný tvar řešení příslušné homogenní rovnice je

$$u(t,c) = ce^{2t}\,,\ t \in \mathbb{R}.$$

Jelikož pro koeficient $\sigma = 2$ v exponentu pravé strany platí $\sigma = 2 = -a = 2$, hledáme partikulární řešení $w(t)$ podle (13.24) ve tvaru

$$w(t) = t(at+b)e^{2t} = (at^2+bt)e^{2t}\,. \tag{13.32}$$

Vypočteme derivaci $\dot{w}(t) = (2at + b + 2at^2 + 2bt)e^{2t}$ a dosadíme do rovnice (13.31). Dostaneme rovnost

$$(2at + b + 2at^2 + 2bt)e^{2t} - 2(at^2+bt)e^{2t} = 8te^{2t}\,.$$

Odtud porovnáním koeficientů u stejných funkcí dostaneme $a = 4$, $b = 0$. Dosadíme do (13.32) a dostaneme partikulární řešení

$$w(t) = 4te^{2t}\,,\quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Obecným tvarem řešení rovnice (13.31) je tedy jednoparametrický systém funkcí

$$v(t;c) = ce^{2t} + 4te^{2t}\,, \quad t, c \in \mathbb{R}\,.$$

☛ ***Příklad 6.*** Máme najít obecný tvar řešení rovnice

$$\dot{x} - 3x = e^t + e^{3t} + t\,. \qquad (13.33)$$

Řešení. Hledáme obecný tvar řešení nehomogenní rovnice s kvázipolynomiální pravou stranou typu (13.25) s $s = 3$, $r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = 1$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 0$. Obecný tvar řešení homogenní rovnice je

$$u(t;c) = ce^{3t}\,,\ t, c \in \mathbb{R}.$$

Pro exponenty exponenciálních funkcí v jednotlivých sčítancích na pravé straně platí $\sigma_1 = 1 \neq -a = 3$, $\sigma_2 = 3 = -a = 3$ a $\sigma_3 = 0 \neq -a = 3$, takže partikulární řešení $w(t)$ hledáme podle (13.28) ve tvaru

$$w(t) = ae^t + bte^{3t} + (ct + d)\,. \qquad (13.34)$$

Vypočteme derivaci funkce $w(t)$ a dosadíme do rovnice (13.33). Dostaneme rovnost

$$ae^t + (b + 3bt)e^{3t} + c - 3ae^t - 3bte^{3t} + 3ct - 3d = e^t + e^{3t} + t\,. \qquad (13.35)$$

Jelikož funkce e^t, e^{3t}, t, 1 jsou lineárně nezávislé, musí být koeficienty v lineárních kombinacích na obou stranách rovnosti (13.35) stejné. Porovnáním těchto koeficientů dostaneme

$$a = -\frac{1}{2}\,,\ b = 1\,,\ c = -\frac{1}{3}\,, d = -\frac{1}{9}\,.$$

Dosadíme do (13.34) a dostaneme partikulární řešení

$$w(t) = -\frac{1}{2}e^t + t\,e^{3t} - \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Obecným tvarem řešení rovnice (13.33) je tedy jednoparametrický systém funkcí

$$v(t;c) = ce^{3t} - \frac{1}{2}e^t + t\,e^{3t} - \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}\,, \quad t, c \in \mathbb{R}\,.$$

Metoda odhadu pro $q(t) = Q_r(t)\cos\omega t$

Postupem popsaným výše můžeme hledat také partikulární řešení rovnice

$$\dot{x} + ax = Q_r(t)\cos\omega t\,, \tag{13.36}$$

resp.

$$\dot{x} + ax = Q_r(t)\sin\omega t\,, \tag{13.37}$$

kde $Q_r(t)$ je polynom r–tého stupně a ω je libovolné reálné číslo. Partikulární řešení rovnice (13.36) i rovnice (13.37) hledáme ve tvaru

$$w(t) = R_1(t)\cos\omega t + R_2(t)\sin\omega t\,, \tag{13.38}$$

kde $R_1(t)$, $R_2(t)$ jsou vhodné polynomy r–tého stupně.

Analogicky postupujeme i v případě rovnice

$$\dot{x} + ax = Q_r(t)\, e^{\sigma t} \cos \omega t\,, \tag{13.39}$$

resp.

$$\dot{x} + ax = Q_r(t)\, e^{\sigma t} \sin \omega t\,. \tag{13.40}$$

V těchto případech hledáme řešení ve tvaru

$$w(t) = e^{\sigma t}(R_1(t) \cos \omega t + R_2(t) \sin \omega t)\,,\ t \in \mathbb{R}\,, \tag{13.41}$$

kde $R_1(t)$ a $R_2(t)$ jsou opět polynomy stupně r, jejichž koeficienty můžeme najít např. metodou neurčitých koeficientů.
Pro řešení obecnějších rovnic tohoto typu platí následující tvrzení.

Věta. *Nechť je dána nehomogenní lineární diferenciální rovnice*

$$\dot{x} + ax = P_r(t)e^{\sigma t}\cos\omega t + Q_s(t)e^{\sigma t}\sin\omega t\,, \tag{13.42}$$

kde $P_r(t)$, resp. $Q_s(t)$ je polynom s reálnými koeficienty stupně r, resp. s, čísla σ, ω jsou reálná, $\omega \neq 0$. Pak rovnice (13.42) má řešení tvaru

$$w(t) = e^{\sigma t}(R_1(t)\cos\omega t + R_2(t)\sin\omega t)\,, \tag{13.43}$$

kde $R_1(t)$, $R_2(t)$ jsou polynomy s reálnými koeficienty, jejichž stupeň je roven většímu ze stupňů r, s polynomů $P_r(t)$, $Q_s(t)$.

Metoda variace konstanty

Obecný tvar řešení homogenní rovnice $u(t;c)$ už umíme najít. Abychom našli obecný tvar řešení nehomogenní rovnice $v(t;c)$, musíme najít nějaké partikulární řešení $w(t)$ rovnice (13.17). Toto řešení budeme hledat ve tvaru (13.21), avšak místo konstanty c budeme psát prozatím neznámou funkci $c(t)$. Tento postup se nazývá **variace konstanty**. Vycházíme tedy z rovnosti

$$w(t) = c(t)e^{\int h(t)\,\mathrm{d}t}\,. \tag{13.44}$$

Derivováním obou stran dostaneme

$$\dot{w}(t) = \dot{c}(t)e^{\int h(t)\,\mathrm{d}t} + c(t)h(t)e^{\int h(t)\,\mathrm{d}t}\,.$$

Funkce $w(t)$ a $\dot{w}(t)$ dosadíme do vztahu (13.17) za x a $\dot{x}$. Získáme tak podmínku pro funkci $c(t)$

$$\dot{c}(t)e^{\int h(t)\,\mathrm{d}t} + c(t)h(t)e^{\int h(t)\,\mathrm{d}t} = h(t)c(t)e^{\int h(t)\,\mathrm{d}t} + q(t)\,,$$

kterou můžeme zapsat ve tvaru

$$\dot{c}(t) = q(t)e^{-\int h(t)\,\mathrm{d}t}\,. \tag{13.45}$$

Pravá strana této rovnosti je spojitá funkce na intervalu . Proto k ní existuje primitivní funkce, např.

$$c(t) = \int q(t)\, e^{-\int h(t)\,\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}t\,. \tag{13.46}$$

Vzhledem k tomu, že stačí najít jedno libovolné partikulární řešení rovnice (13.17), nezáleží na tom, jakou primitivní funkci volíme, tj. jak volíme integrační konstantu. Máme tedy

$$w(t) = c(t)\, e^{\int h(t)\,\mathrm{d}t}\,, \quad t \in \,,$$

kde funkce $c(t)$ je dána předpisem (13.46). Hledaný obecný tvar řešení nehomogenní rovnice (13.17) je pak dán předpisem

$$v(t;c) = u(t;c) + c(t)\, e^{\int h(t)\,\mathrm{d}t}\,, \quad t \in \,, \tag{13.47}$$

nebo po dosazení za $u(t;c)$ a $c(t)$

$$v(t;c) = c e^{\int h(t)\,\mathrm{d}t} + e^{\int h(t)\,\mathrm{d}t} \int q(t)\, e^{-\int h(t)\,\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}t\,, \quad t \in \,. \tag{13.48}$$

Tento předpis pro obecný tvar řešení nehomogenní rovnice (13.17) vypadá značně složitý. Při konkrétním výpočtu však nepoužíváme zpravidla přímo tento předpis, ale postup, jímž jsme k němu dospěli.

☛ ***Příklad 7.*** Hledejme obecný tvar řešení rovnice

$$\dot{x} = -\frac{x}{t} + 3t\,. \tag{13.49}$$

Řešení. Zde je $h(t) = -\frac{1}{t}$, $t \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ a $q(t) = 3t$, $t \in \mathbb{R}$. Řešení budeme hledat na intervalu $= (-\infty, 0)$. Postup pro volbu $= (0, \infty)$ je stejný.

Nejdříve nalezneme standardním postupem podle (13.4) obecný tvar řešení příslušné homogenní rovnice

$$u(t; c) = c e^{\int \left(-\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t} = \frac{c}{t}\,.$$

Obecný tvar řešení nehomogenní rovnice hledáme podle (13.22) jako součet

$$v(t; c) = u(t; c) + w(t) = \frac{c}{t} + w(t)\,, \tag{13.50}$$

kde partikulární řešení $w(t)$ budeme hledat podle (13.44) ve tvaru

$$w(t) = \frac{c(t)}{t}\,. \tag{13.51}$$

Funkci $w(t)$ a její derivaci

$$\dot{w}(t) = \frac{\dot{c}(t)}{t} - \frac{c(t)}{t^2}$$

dosadíme do rovnice (13.49). Dostaneme tak podmínku pro funkci $\dot{c}(t)$

$$\dot{c}(t) = 3t^2\,.$$

Odtud integrací dostáváme hledaný koeficient partikulárního řešení

$$c(t) = \int 3t^2 \,\mathrm{d}t = t^3\,.$$

Nyní dosadíme nalezenou funkci $c(t)$ do (13.51) a příslušné partikulární řešení $w(t)$ dosadíme do (13.50). Dostaneme hledaný obecný tvar řešení rovnice (13.49)

$$v(t;c) = \frac{c}{t} + t^2\,, \quad t \in (-\infty, 0)\,. \tag{13.52}$$

Cauchyova úloha pro nehomogenní rovnici

Definice 6. Cauchyovou (nebo také **počáteční**) **úlohou pro nehomogenní lineární diferenciální rovnici** rozumíme úlohu nalézt řešení dané nehomogenní lineární rovnice, vyhovující dané počáteční podmínce:

$$\dot{x} = h(t)x + q(t)\,, \quad x(\tau) = \xi. \tag{13.53}$$

Řešením Cauchyovy úlohy (13.53) budeme i nyní rozumět jakékoli řešení $v(t)$ příslušné rovnice, které navíc splňuje počáteční podmínku $v(\tau) = \xi$. Abychom zdůraznili, že řešení Cauchyovy úlohy závisí i na počátečních podmínkách τ a ξ, budeme vedle stručného zápisu $v(t)$ používat i podrobnější zápis $v(t;\tau,\xi)$. Připomeňme si opět, že uvedený zápis připomíná funkci tří proměnných t, τ a ξ. Jako řešení konkrétní Cauchyovy úlohy při pevně daných počátečních údajích τ a ξ je to však stále funkce jen jediné proměnné, a to času t.

Známe-li obecný tvar řešení $v(t;c)$ nehomogenní rovnice v úloze

(13.53), pak řešení $v(t;\tau,\xi)$ Cauchyovy úlohy (13.53) najdeme tak, že do obecného tvaru řešení $v(t;c)$ dosadíme za t, resp. x počáteční hodnoty τ, resp. ξ. Dostaneme tak vztah $v(\tau,c)=\xi$, z něhož můžeme určit hodnotu konstanty c.

☛ ***Příklad 8.*** Hledejme řešení Cauchyovy úlohy

$$\dot{x} = -\frac{1}{t}\,x + 3t\,, \quad x(1) = 3\,. \tag{13.54}$$

Řešení. Z (13.52) víme, že

$$v(t;c) = \frac{c}{t} + t^2\,, \quad t \in \;.$$

Jelikož je $\tau = 1$, musíme volit $= (0, \infty)$. Dosadíme-li do tohoto obecného tvaru řešení za proměnnou t počáteční okamžik $\tau = 1$ a za proměnnou x počáteční hodnotu $\xi = 3$, dostaneme pro konstantu c podmínku

$$v(1, c) = c + 1 = 3\,,$$

a tedy $c = 2$. Řešení $v(t; 1, 3)$, splňující stanovenou počáteční podmínku, má tedy tvar

$$v(t;1,3) = \frac{2}{t} + t^2\,, \quad t \in (0, \infty)\,. \tag{13.55}$$

Uvědomme si ještě, že počáteční okamžik byl dán uvnitř intervalu $(0, \infty)$, a proto jsme dostali řešení definované pouze v tomto intervalu. Funkce

(13.55) je sice definovaná i na intervalu $(-\infty, 0)$, ale na tomto intervalu není řešením zadané Cauchyovy úlohy. Tato Cauchyova úloha totiž vzhledem k podmínce $\tau = 1$ na intervalu $(-\infty, 0)$ žádné řešení mít nemůže.

☛ ***Příklad***Hledejme řešení Cauchyovy úlohy

$$\dot{x} = x\mathrm{cotg}\, t + e^t \sin t\,, \quad x(\tau) = \xi\,, \tag{13.56}$$

pro $(\tau, \xi) \in (\pi, 2\pi) \times \mathbb{R}$.

Řešení. Obecný tvar řešení rovnice (13.56) je

$$v(t; c) = c \sin t + e^t \sin t\,, \quad t \in (k\pi, (k+1)\pi)\,,$$

takže musí platit

$$v(\tau, c) = c \sin \tau + e^\tau \sin \tau = \xi\,.$$

Odtud

$$c = \frac{\xi - e^\tau \sin \tau}{\sin \tau}\,.$$

Řešením Cauchyovy úlohy (13.56) je tedy funkce

$$v(t; \tau, \xi) = \left(\frac{\xi}{\sin \tau} - e^\tau + e^t \right) \sin t\,, \quad t \in (\pi, 2\pi)\,.$$

Definičním oborem řešení Cauchyovy úlohy (13.56) je interval $(\pi, 2\pi)$, protože je $\tau \in (\pi, 2\pi)$ a funkce $h(t)$ i $q(t)$ jsou v tomto intervalu spojité.