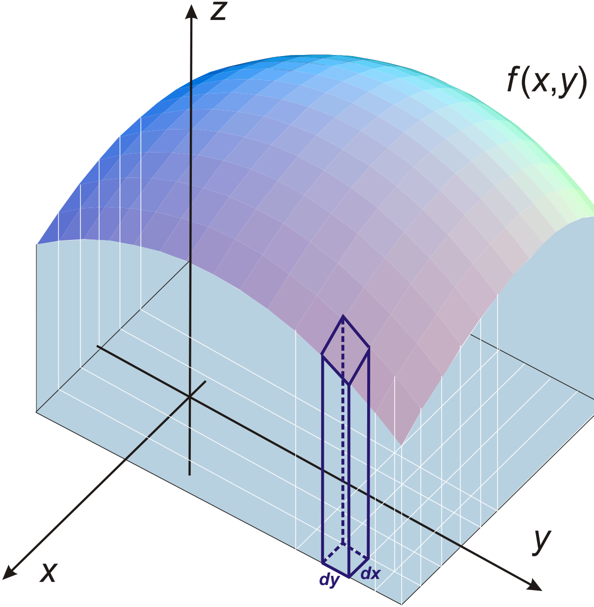
PŘEDNÁŠKA 5

RIEMANNŮV INTEGRÁL V $\mathbb{R}^n$

Zavedení Riemannova integrálu v $\mathbb{R}^2$

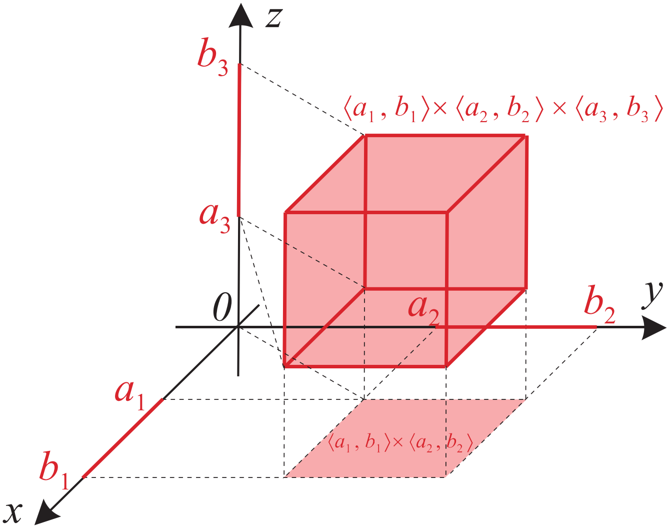
$\iint f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$



5.1 Zavedení Riemannova integrálu v $\mathbb{R}^n$

Nechť je $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$ omezený uzavřený interval, tj.

$$\mathcal{I} = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle \; ; \; a_i \, , b_i \in \mathbb{R} \, ; \; a_i \leq b_i \, . \quad (5.1)$$

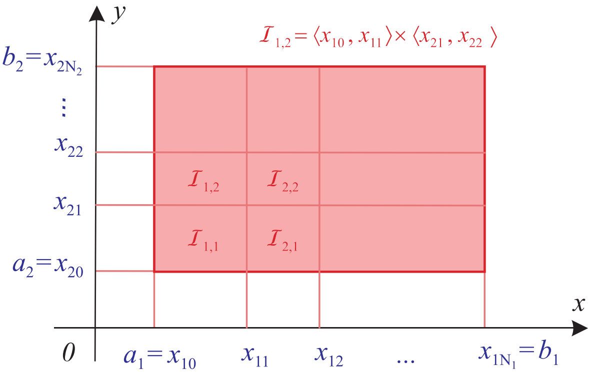


Definice 1. Nechť je $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$ interval definovaný v (1.1). Každou množinu bodů

$$\{x_{ij}\,,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ j = 0,\ 1,\ 2\ \ldots,\ N_i \in \mathbb{N}\}\,,$$

kde $$x_{i0} = a_i \leq x_{i1} \leq x_{i2} \leq \cdots \leq x_{iN_i} = b_i\,,$$

nazýváme **dělení intervalu** $\mathcal{I}$. Dělení intervalu, tj. výše uvedenou množinu bodů, budeme značit $\mathcal{D}$. Množinu všech dělení intervalu $\mathcal{I}$ budeme značit $\mathfrak{D}$.



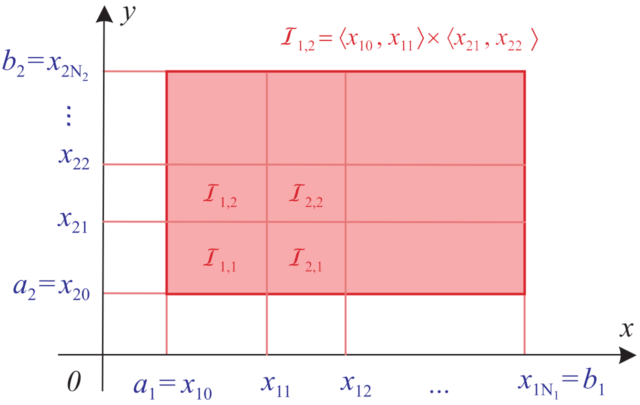
Pro každé dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\mathcal{I}$ označme $\mathcal{I}_{j_1,j_2,\ldots,j_n}$, $1 \le j_k \le N_k$, interval

$$\mathcal{I}_{j_1,j_2,\ldots,j_n} = \langle x_{j_1-1}, x_{j_1} \rangle \times \langle x_{j_2-1}, x_{j_2} \rangle \times \cdots \times \langle x_{j_n-1}, x_{j_n} \rangle \tag{5.2}$$

a

$$d_{j_1,j_2,\ldots,j_n} = (x_{j_1} - x_{j_1-1})(x_{j_2} - x_{j_2-1}) \ldots (x_{j_n} - x_{j_n-1}) \tag{5.3}$$

obsah n-dimenzionálního intervalu $\mathcal{I}_{j_1,j_2,\ldots,j_n}$.



Nechť je $f(x)$ reálná funkce omezená na intervalu $\mathcal{I}$. Pro každé dělení $\mathcal{D}$ označme

$$m_{j_1,j_2,\ldots,j_n} = \inf_{x\in\mathcal{I}_{j_1,\ldots,j_n}} \big(f(x)\big) \tag{5.4}$$

$$M_{j_1,j_2,\ldots,j_n} = \sup_{x\in\mathcal{I}_{j_1,\ldots,j_n}} \big(f(x)\big) \tag{5.5}$$

a definujme

$$s(f,\mathcal{D}) = \sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{j_2=1}^{N_2}\cdots\sum_{j_n=1}^{N_n} m_{j_1,j_2,\ldots,j_n} d_{j_1,j_2,\ldots,j_n} \tag{5.6}$$

$$S(f,\mathcal{D}) = \sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{j_2=1}^{N_2}\cdots\sum_{j_n=1}^{N_n} M_{j_1,j_2,\ldots,j_n} d_{j_1,j_2,\ldots,j_n}\,. \tag{5.7}$$

Čísla $s(f,\mathcal{D})$, resp. $S(f,\mathcal{D})$ se nazývá **dolní**, resp. **horní integrální součet funkce $f(x)$ příslušný k dělení $\mathcal{D}$**. Protože je funkce $f(x)$ omezená na $\mathcal{I}$, existují reálná čísla $m = \inf\limits_{x\in\mathcal{I}} f(x)$ a $M = \sup\limits_{x\in\mathcal{I}} f(x)$. Ze zřejmého vztahu $m \le m_{j_1,\ldots,j_n} \le M_{j_1,\ldots,j_n} \le M$ plyne, že pro každé dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\mathcal{I}$ platí nerovnost

$$m d_{\mathcal{I}} \le s(f,\mathcal{D}) \le S(f,\mathcal{D}) \le M d_{\mathcal{I}}\,, \tag{5.8}$$

kde $d_{\mathcal{I}}$ je obsah intervalu $\mathcal{I}$.

Definice 2. Nechť je $\mathcal{I}$ je interval (1.1) a $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ jeho dvě dělení. Je-li každý bod dělení $\mathcal{D}_1$ bodem dělení $\mathcal{D}_2$, nazveme dělení $\mathcal{D}_2$ **zjemněním** dělení $\mathcal{D}_1$.

Poznámka: Z definice 2 plyne, že když je dělení $\mathcal{D}_2$ zjemněním dělení $\mathcal{D}_1$, obsahuje $\mathcal{D}_2$ všechny body dělení $\mathcal{D}_1$ a třeba i některé další dělící body. Tedy každý interval $\mathcal{I}_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ dělení $\mathcal{D}_1$ je sjednocením konečného počtu intervalů $\mathcal{J}_\alpha$ dělení $\mathcal{D}_2$.

Věta. *Je-li dělení $\mathcal{D}_2$ intervalu $\mathcal{I}$ zjemněním dělení $\mathcal{D}_1$ intervalu $\mathcal{I}$, je*

$$s(f, \mathcal{D}_1) \le s(f, \mathcal{D}_2) \le S(f, \mathcal{D}_2) \le S(f, \mathcal{D}_1)\,. \tag{5.9}$$

Věta. *Jsou-li $\mathcal{D}_1$ a $\mathcal{D}_2$ dvě dělení intervalu $\mathcal{I}$, pak platí:*

$$s(f, \mathcal{D}_1) \le S(f, \mathcal{D}_2)\,. \tag{5.10}$$

Ze vztahu (1.8) plyne, že existují konečná reálná čísla $s(f), S(f)$:

$$s(f) = \sup_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} s(f,\mathcal{D}) \leq \inf_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} S(f,D) = S(f)\,. \tag{5.11}$$

Definice 3. Čísla $s(f)$, resp. $S(f)$ ze vztahu (1.11) nazýváme **dolní**, resp. **horní Riemannův integrál funkce** $f(x)$ **přes interval** $\mathcal{I}$.

Jestliže v (1.11) platí rovnost $s(f) = S(f)$, nazýváme toto číslo **(Riemannův) integrál funkce** $f(x)$ **přes interval** $\mathcal{I}$ a říkáme, že funkce $f(x)$ je **integrovatelná** na intervalu $\mathcal{I}$. Pro tento integrál používáme označení

$$\int_{\mathcal{I}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_{\mathcal{I}} f(x)\,\mathrm{d}V\,. \tag{5.12}$$

Definice 4. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená množina a $\chi_M(x)$ je tzv. **charakteristická funkce** množiny M, která je definována předpisem

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in M \\ 0 & \text{pro } x \notin M \end{cases} \tag{5.13}$$

Protože je M omezená, existuje interval $\mathcal{I} \in \mathbb{R}^n$ takový, že $M \subset \mathcal{I}$. Jestliže existuje Riemannův integrál

$$d(M) = \int_{\mathcal{I}} \chi_M(x)\,\mathrm{d}V\,,$$

říkáme, že množina M je **(Riemannovsky) měřitelná** a číslo $d(M)$ se nazýváme **mírou (obsahem) množiny** M.

Poznámka. Snadno se lze přesvědčit, že nezáleží na volbě intervalu $\mathcal{I} \subset M$.

Definice 5. Nechť je $M \subset \mathbb{R}^n$ je Riemannovsky měřitelná množina a $f(x)$ funkce omezená na množině M. Nechť je $\mathcal{I}$ interval v $\mathbb{R}^n$ takový, že $M \subset \mathcal{I}$. Definujme funkci

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in M \\ 0 & \text{pro } x \in \mathcal{I} \setminus M \end{cases}$$

Je-li funkce $\widehat{f}(x)$ integrovatelná na intervalu $\mathcal{I}$, říkáme, že funkce $f(x)$ je **integrovatelná na množině** M a píšeme

$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}V = \int_M f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \int_{\mathcal{I}} \widehat{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n\,. \tag{5.14}$$

Množinu všech funkcí, které mají Riemannův integrál přes množinu M budeme značit $\mathfrak{R}(M)$.

Poznámka. Opět se lze snadno přesvědčit, že nezáleží na volbě intervalu $M \subset \mathcal{I}$.

Věta. *Nechť jsou funkce f, f_1, $f_2 \in \mathfrak{R}(M)$ a $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Pak jsou také funkce $cf \in \mathfrak{R}(M)$ a $f_1 + f_2 \in \mathfrak{R}(M)$ a platí*

$$\int_M cF(x)\,\mathrm{d}V = c\int_M f(x)\,\mathrm{d}V\,, \tag{5.15}$$

$$\int_M (f_1(x) + f_2(x))\,\mathrm{d}V = \int_M f_1(x)\,\mathrm{d}V + \int_M f_2(x)\,\mathrm{d}V\,. \tag{5.16}$$

Důsledek. *Jsou-li funkce $f_k \in \mathfrak{R}(M)$, $c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$, pak je $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_r f_r(x) \in \mathfrak{R}(M)$ a platí:*

$$\int_M (c_1 f_1(x) + \cdots + c_r f_r(x))\ \mathrm{d}V =$$

$$= c_1 \int_M f_1(x)\,\mathrm{d}V + \cdots + c_r \int_M f_r(x)\,\mathrm{d}V\,. \tag{5.17}$$

Velmi důležitou roli v teorii integrálu hrají tzv. množiny nulové míry.

Definice 6. Jestliže je $M \subset \mathbb{R}^n$ měřitelná množina taková, že

$$d(M) = \int_M \chi_M(x)\,\mathrm{d}V = 0\,,$$

nazýváme množinu M **množinou míry nula** nebo **množinou nulové míry**.

Definice 7. Jestliže nějaká vlastnost $V(x)$ platí pro všechna $x \in M$ mimo bodů z množiny $N \subset M$ a množina N má míru nula, budeme říkat, že vlastnost $V(x)$ platí **skoro všude** na množině M.

Věta. *Nechť je $f(x) = 0$ skoro všude na M. Pak je*

$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}V = 0$$

Věta. *Nechť je M měřitelná množina taková, že její hranice ∂M má míru nula. Pak každá funkce, která je na M spojitá a omezená, je na množině M integrovatelná.*

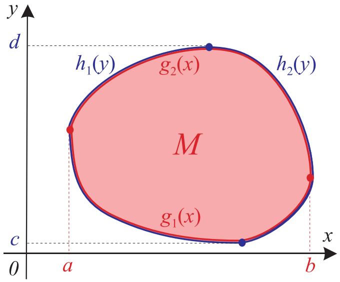
5.2 Speciální případy

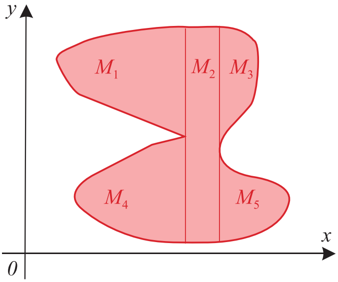
5.2.1 Dvojný integrál – Riemannův integrál v $\mathbb{R}^2$

Riemannův integrál v $\mathbb{R}^2$ se nazývá rovněž **dvojný integrál** a značí se obvykle

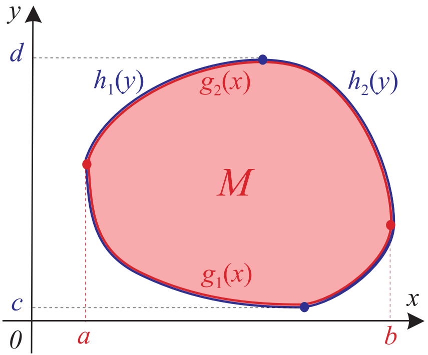
$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}V = \iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

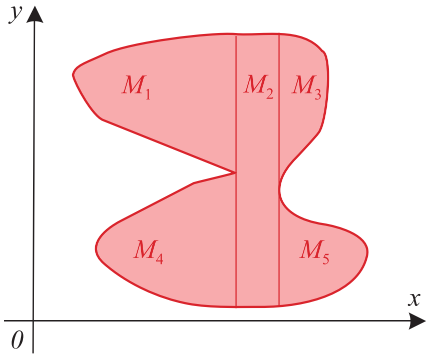
Při studiu dvojných integrálů budeme zpravidla pro jednoduchost předpokládat, že množina M je tzv. **přípustná oblast**, tj. omezená množina, jejíž hranici tvoří konečně mnoho prostých křivek.





Pro ještě větší jednoduchost a názornost budeme předpokládat, že hranici přípustné oblasti lze popsat jako graf dvou funkcí, $\boldsymbol{g_1(x)}$, $\boldsymbol{g_2(x)}$, resp. $\boldsymbol{h_1(y)}, \boldsymbol{h_2(y)}$.



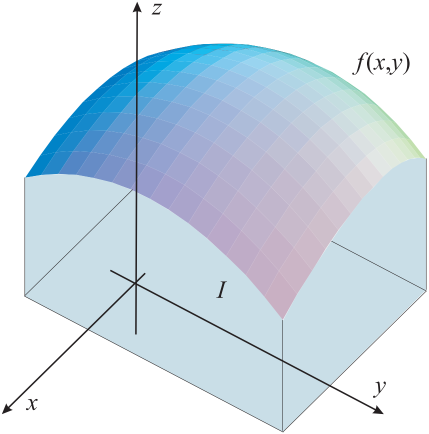


Není-li možné hranici takto popsat, rozdělíme oblast tak, jak to znázorňuje obr. vpravo.

Geometrický význam dvojného integrálu

Uvažujme funkci f a interval $\mathcal{I}$, nechť je $f \geq 0$ na $\mathcal{I}$. Existuje-li Riemannův integrál $\int_{\mathcal{I}} f \, \mathrm{d}V$, lze se na jeho hodnotu dívat jako na **objem tělesa V ohraničeného grafem dané funkce:**

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in \mathcal{I},\ 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$



Další aplikace dvojného integrálu

Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je přípustná oblast.

- Plošný obsah rovinného obrazce M :

$$\mu(M) = \iint_M \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$

- Hmotnost tenké desky M :

$$m(M) = \iint_M \sigma(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,,$$

  kde $\sigma(x,y)$ značí plošnou hustotu. Veličina $\sigma(x,y)$ může rovněž udávat hustotu náboje a výsledný integrál **celkový náboj tenké desky**.

- Statické momenty rovinného obrazce M :

$$S_x(M) = \iint_M y\sigma(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,, \qquad S_y(M) = \iint_M x\sigma(x,y)$$

  kde $\sigma(x,y)$ je plošná hustota.

- Souřadnice těžiště rovinného obrazce M :

$$x_t(M) = \frac{S_y(M)}{m(M)}, \qquad y_t(M) = \frac{S_x(M)}{m(M)}.$$

5.3 Metody výpočtu Riemannova integrálu

5.3.1 Fubiniova věta

Zaveďme následující označení:

$$z = (x, y) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{r+s} = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s\,,\ x \in \mathbb{R}^r\,,\ y \in \mathbb{R}^s\,,$$

tj. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_r),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_s),\ r + s = n,$

$$z = (x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_s).$$

Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$, budeme psát

$$\begin{array}{ll} M_x = \{y \in \mathbb{R}^s\,;\ (x, y) \in M\}\,, & M_y = \{x \in \mathbb{R}^r\,;\ (x, y) \in M\}\,. \\ M^x = \{x \in \mathbb{R}^r\,;\ M_x \neq \emptyset\}\,, & M^y = \{y \in \mathbb{R}^s\,;\ M_y \neq \emptyset\}\,. \end{array}$$

Je-li $f(z) = f(x, y)$ funkce definovaná na množině $M \subset \mathbb{R}^n$, definujme funkce $f^x : M_x \to \mathbb{R}$ a $f^y : M_y \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f^x(y) = f^y(x) = f(x, y)\,.$$

Jestliže je $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$ interval, platí rovnost

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_y \times \mathcal{I}_x = \mathcal{I}^x \times \mathcal{I}^y = \mathcal{I}^x \times \mathcal{I}_x = \mathcal{I}_y \times \mathcal{I}^y \,.$$

Je zřejmé, že pro objem těchto intervalů platí rovnosti

$$V(\mathcal{I}) = V(\mathcal{I}^x) \cdot V(\mathcal{I}_x) = V(\mathcal{I}^y) \cdot V(\mathcal{I}_y) \,.$$

Pomocí Riemannova integrálu lze tuto rovnost zapsat jako

$$\int_{\mathcal{I}} \chi_{\mathcal{I}}(z) \, \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{I}^x} \left(\int_{\mathcal{I}_x} \chi_x(y) \, \mathrm{d}V_y \right) \mathrm{d}V_x = \\ = \int_{\mathcal{I}^y} \left(\int_{\mathcal{I}_y} \chi_y(x) \, \mathrm{d}V_x \right) \mathrm{d}V_y \,, \quad (5.18)$$

kde symbol $\mathrm{d}V_x$, resp. $\mathrm{d}V_y$, znamená, že integrujeme přes proměnnou x, resp. y.
Vztah (1.18) zobecňuje následující věta.

Věta (Fubini) *Nechť je funkce $f(x, y)$ definovaná na $M \subset \mathbb{R}^n$. Nechť existuje integrál*

$$\int_M f(x, y)\, \mathrm{d}V \tag{5.19}$$

a pro skoro všechna $x \in \mathcal{M}^x$, resp. $y \in \mathcal{M}^y$, existují integrály

$$F(x) = \int_{M_x} f^x(y)\, \mathrm{d}V_y = \int_{M_x} f^x(y)\, \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_s\,, \tag{5.20}$$

resp.

$$G(y) = \int_{M_y} f^y(x)\, \mathrm{d}V_x = \int_{M_y} f^y(x)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_r\,. \tag{5.21}$$

Jestliže rozšíříme funkci $F(x)$ na množinu M^x, resp. $G(y)$ na množinu M^y, v bodech, kde není definována, nulou, pak platí:

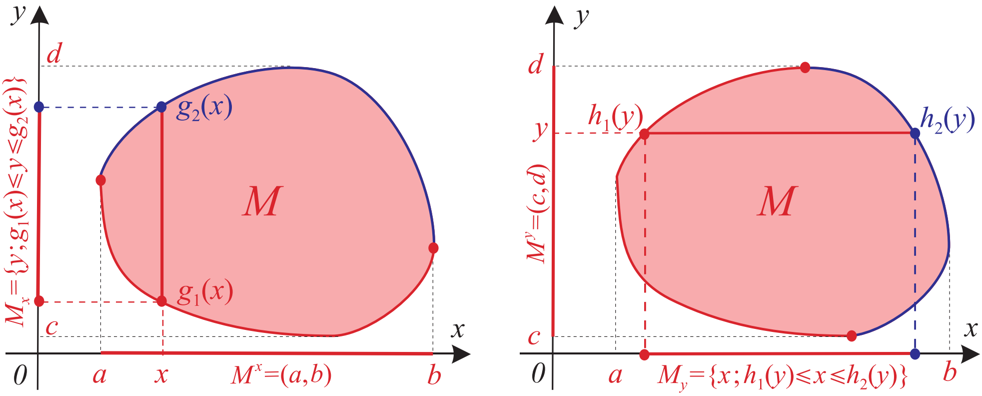
$$\int_M f(x, y)\, \mathrm{d}V = \int_{M^x} F(x)\, \mathrm{d}V_x = \int_{M^y} G(y)\, \mathrm{d}V_y\,, \tag{5.22}$$

tj.

$$\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}V = \int_{M^x}\left(\int_{M_x} f^x(y)\,\mathrm{d}y_1\ldots\mathrm{d}y_s\right)\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_r = \\ = \int_{M^y}\left(\int_{M_y} f^y(x)\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_r\right)\,\mathrm{d}y_1\ldots\mathrm{d}y_s\,.$$

Podle této věty lze Riemannův integrál v $\mathbb{R}^n$ najít pomocí výpočtu dvou Riemannových integrálů v prostorech menší dimenze. Postupnou aplikací této věty je pak možné najít integrál v $\mathbb{R}^n$, pokud existuje, pomocí výpočtu n jednorozměrných Riemannových integrálů.

Speciální případ: $\mathbb{R}^2$



Při hledání Riemannova integrálu v $\mathbb{R}^2$ budeme zpravidla používat Fubiniovu větu v následujícím znění:

Věta (Fubiniova pro $\mathbb{R}^2$). *Nechť M je omezená množina, jejíž hranici lze popsat pomocí dvojic funkcí $g_1(x), g_2(x)$ a $h_1(y), h_2(y)$ - viz obr. výše. Nechť existuje dvojný integrál*

$$f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Existuje-li jeden z integrálů

$$F(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy,\ x \in \langle a, b\rangle\,,$$

$$G(y) = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x,\ y \in \langle c, d\rangle,$$

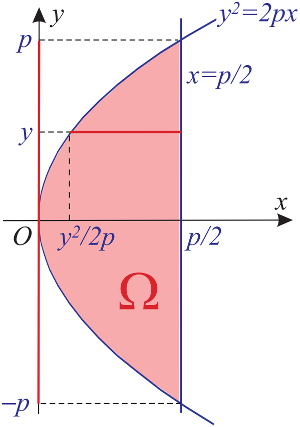
pak existuje i druhý a platí:

$$f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy\right) dx =$$

$$= \int_c^d G(y)dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dx\right) dy\,.$$

☛ ***Příklad***. Nalezněte integrál $\iint_\Omega xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde Ω je oblast ohraničená parabolou $y^2 = 2px$ a přímkou $x = p/2$.

Řešení.



$$\iint_\Omega xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-p}^{p}\left(\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} xy^2\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-p}^{p}\left(y^2\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{-p}^{p}\left(y^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-p}^{p}\left(y^2\left(\frac{p^2}{8} - \frac{y^4}{8p^2}\right)\right)\mathrm{d}y =$$

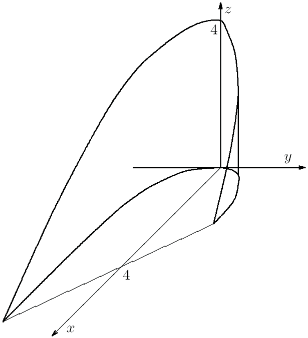
$$= \frac{p^2}{8}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-p}^{p} - \frac{1}{8p^2}\left[\frac{y^7}{7}\right]_{-p}^{p} = \frac{p^5}{21}$$

Speciální případ: $\mathbb{R}^3$

☛ ***Příklad***. Nalezněte objem tělesa M popsaného nerovnostmi

$$x + 2y + z \le 4, \quad 2y^2 \le x, \quad z \ge 0.$$

Řešení. Těleso M je část parabolického válce:



Integrand je spojitý a omezený na kompaktním integračním oboru M, takže všechny integrály uvedené v předpokladech Fubiniho věty existují. Do rovnice roviny $x+2y+z=4$ dosadíme $z=0$ a $x=y^2$. Dostaneme kvadratickou rovnici $y^2-y-2=0$ pro hodnoty y_0 a y_1.

Pro integraci můžeme tedy volit $y_0=-2$, $y_1=1$, $a(y)=2y^2$, $b(y)=4-2y$, $c(x,y)=0$, $d(x,y)=4-x-2y$. Pak

$$\iiint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-2}^{1}\int_{2y^2}^{4-2y}\int_{0}^{4-x-2y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{81}{5}.$$