PŘEDNÁŠKA 9

KŘIVKOVÝ A PLOŠNÝ INTEGRÁL 1. DRUHU

6.1 Křivkový integrál 1. druhu

Definice 1. Množina $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **prostá regulární křivka** v $\mathbb{R}^n$ právě tehdy, když existuje vzájemně jednoznačné zobrazení

$$\boldsymbol{g}\colon (a,b) \to \mathcal{C}\,; \quad \boldsymbol{g}(t) = (g_1(t), \ldots, g_n(t))\,, \tag{6.1}$$

které má na intervalu (a,b) spojitou derivaci

$$\dot{\boldsymbol{g}}\,(t) = (g_1'(t), \ldots, g_n'(t)) \neq (0, \ldots, 0).$$

Prostá regulární křivka je tedy množina bodů $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(t)$, tj.

$$(x_1, \ldots, x_n) = (g_1(t), \ldots, g_n(t))\,,$$

$$\text{neboli} \qquad x_i = g_i(t), \;\; i = 1, \ldots, n, \tag{6.2}$$

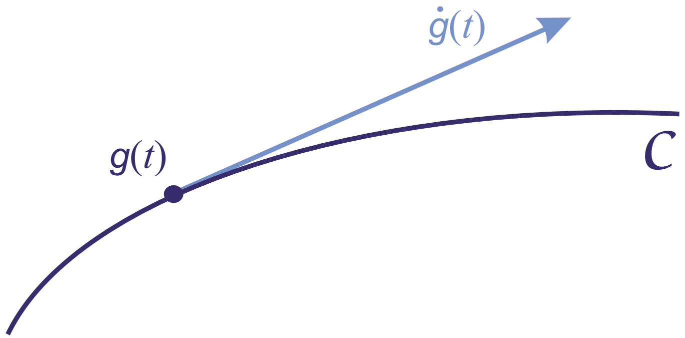
kde zobrazení $\boldsymbol{g}$ splňuje výše uvedené podmínky. Toto zobrazení se nazývá **parametrizace křivky** $\mathcal{C}$, rovnice $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(t)$, neboli rovnice (6.2), se nazývají o **parametrické rovnice křivky** $\mathcal{C}$.

Vektor

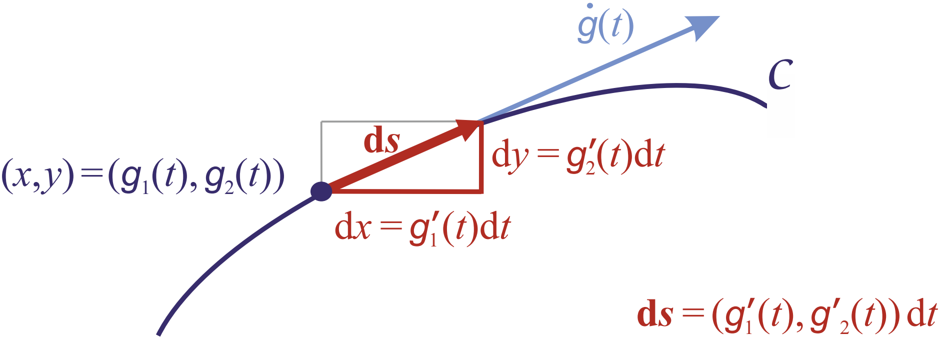
$$\dot{\boldsymbol{g}}\,(t) = (g_1'(t), \ldots, g_n'(t))$$

je **tečným vektorem ke křivce $\mathcal{C}$.**

Křivku si můžeme nejjednodušeji představit jako trajektorii pohybujícího se bodu, kde $\boldsymbol{g}(t)$ udává souřadnice bodu v čase t. Vektor $\dot{\boldsymbol{g}}\,(t)$ pak udává jeho okamžitou rychlost.



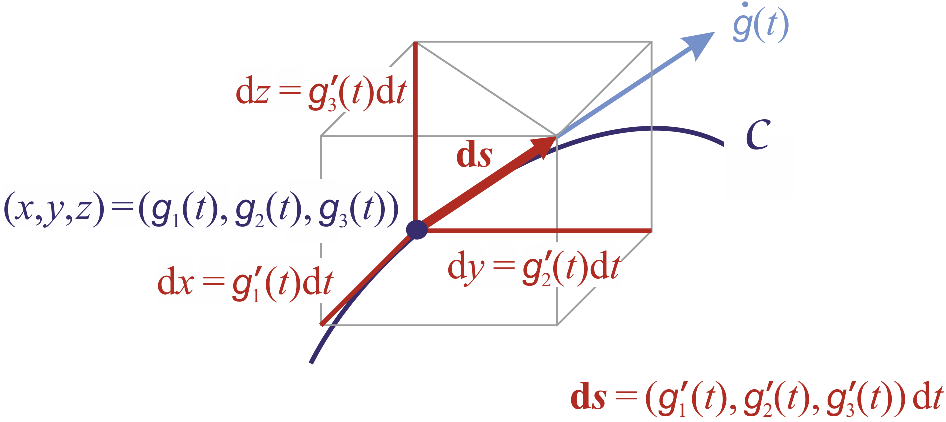
Speciální případ: křivky v $\mathbb{R}^2$



Element délky $\mathrm{d}s$ prosté regulární křivky $\mathcal{C}$ s parametrizací $\boldsymbol{g}(t)$ je roven

$$\mathrm{d}s = \|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\|\,\mathrm{d}t = \sqrt{(g_1'(t))^2 + (g_2'(t))^2}\,\mathrm{d}t \qquad (6.3)$$

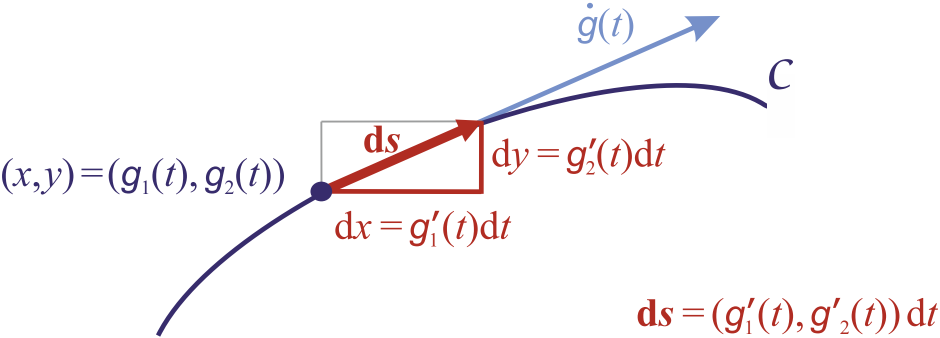
Speciální případ: křivky v $\mathbb{R}^3$



Element délky $\mathrm{d}s$ prosté regulární křivky $\mathcal{C}$ s parametrizací $\boldsymbol{g}(t)$ je roven

$$\mathrm{d}s = \|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\|\,\mathrm{d}t = \sqrt{(g_1'(t))^2 + (g_2'(t))^2 + (g_3'(t))^2}\,\mathrm{d}t \qquad (6.4)$$

Element délky křivky v $\mathbb{R}^n$



Element délky ds prosté regulární křivky $\mathcal{C}$ s parametrizací $\boldsymbol{g}(t)$ je roven

$$\mathrm{d}s = \|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\|\,\mathrm{d}t = \sqrt{(g_1'(t))^2 + \cdots + (g_n'(t))^2}\;\mathrm{d}t \qquad (6.5)$$

Křivkový integrál 1. druhu

Definice 2. Nechť $\mathcal{C}$ je prostá regulární křivka v $\mathbb{R}^n$ a nechť $\boldsymbol{g}\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je její parametrizace. Nechť $f\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$ je funkce. Existuje-li Riemannův integrál

$$\int_a^b f(\boldsymbol{g}(t))\|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\|\,\mathrm{d}t, \tag{6.6}$$

pak toto číslo značíme

$$\int_{\mathcal{C}} f\,\mathrm{d}s \equiv \int_a^b f(\boldsymbol{g}(t))\|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\|\,\mathrm{d}t \tag{6.7}$$

a nazýváme je **křivkovým integrálem 1. druhu funkce** f **přes křivku** $\mathcal{C}$ (také **neorientovaným křivkovým integrálem**).

Vlastnosti křivkového integrálu 1. druhu

Křivkový integrál funkce f přes křivku $\mathcal{C}$ byl definován pomocí jednorozměrného Riemannova integrálu, má tedy podobné vlastnosti jako Riemannův integrál funkce f na intervalu. Například:

Linearita křivkového integrálu

Jsou-li α, β reálná čísla, f, g funkce, pak rovnost

$$\int_{\mathcal{C}} (\alpha f + \beta h)\,\mathrm{d}s = \alpha \int_{\mathcal{C}} f\,\mathrm{d}s + \beta \int_{\mathcal{C}} h\,\mathrm{d}s \tag{6.8}$$

platí, má-li pravá strana smysl.

Aditivita vzhledem ke křivce

Jsou-li $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ prosté regulární křivky takové, že jejich sjednocení $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ je rovněž prostá regulární křivka a jejich průnik $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ obsahuje nejvýše krajní body oblouků, pak rovnost

$$\int_{\mathcal{C}} f\,\mathrm{d}s = \int_{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2} f\,\mathrm{d}s = \int_{\mathcal{C}_1} f\,\mathrm{d}s + \int_{\mathcal{C}_2} f\,\mathrm{d}s \tag{6.9}$$

platí, má-li pravá strana smysl.

☛ ***Příklad***. Nalezněte hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{C}} x^2 ds, \quad \text{kde} \quad \mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \ln x, x \in \langle 1, 2\rangle\}.$$

Řešení.

Zvolme parametrizaci $x = g_1(t) = t, y = g_2(t) = \ln t$.

Pak $\dot{\boldsymbol{g}}(t) = \left(1, \frac{1}{t}\right) \neq \mathrm{o}$.

$$\int_{\mathcal{C}} x^2 \,\mathrm{d}s = \int_1^2 t^2 \left\| \left(1, \frac{1}{t}\right) \right\| \mathrm{d}t = \int_1^2 t^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} \,\mathrm{d}t = \int_1^2 t\sqrt{t^2 + 1} \,\mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{lllllll} t^2 + 1 & = & u, & & 2t\,\mathrm{d}t & = & \mathrm{d}u \\ t & = & 1 & \Rightarrow & u & = & 2 \\ t & = & 2 & \Rightarrow & u & = & 5 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int_2^5 u^{1/2} \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} [u^{3/2}]_2^5 = \frac{1}{3}(5^{3/2} - 2^{3/2}).$$

☛ ***Příklad***. Nalezněte hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{C}} (x+y)ds,$$

kde $\mathcal{C}$ je úsečka s krajními body $A = (0,0), B = (1,2)$.

Řešení.

Zvolme parametrizaci $x = t, y = 2t,\ t \in \langle 0,1\rangle$. Pro takto zvolenou parametrizaci dostáváme tečné pole křivky $\dot{\boldsymbol{g}}(t) = (1,2)$ a pro jeho velikost $\|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\| = \sqrt{5}$. Nyní můžeme dosadit

$$\int_{\mathcal{C}} (x+y)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 (t+2t)\sqrt{5}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\sqrt{5}.$$

☛ ***Příklad***. Nalezněte hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{z^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s,$$

kde $\mathcal{C}$ je jeden závit šroubovice $x = r\cos t, y = r\sin t, z = rt,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Řešení. Pro zvolenou parametrizaci dostáváme tečné pole křivky

$$\dot{\boldsymbol{g}}(t) = (-r\sin t, r\cos t, r)$$

a jeho velikost $\|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\| = r\sqrt{2}$. Pak

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{z^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \frac{r^2t^2}{r^2} r\sqrt{2}\,\mathrm{d}t = \frac{8r\pi^3\sqrt{2}}{3}.$$

Některé aplikace křivkového integrálu

Délka $s(\mathcal{C})$ křivky $\mathcal{C}$:

$$s(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\| \,\mathrm{d}t$$

Hmotnost $m(\mathcal{C})$ křivky $\mathcal{C}$ s délkovou hustotou σ :

$$m(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \sigma \,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} \sigma(\boldsymbol{g}(t)) \|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\| \,\mathrm{d}t$$

Analogicky se počítá celkový **náboj**. V tomto případě může hustota σ náboje nabývat i záporných hodnot.

Statické momenty v $\mathbb{R}^2$:

$$S_y(\mathcal{C}) = \int\limits_{\mathcal{C}} x\sigma \, \mathrm{d}s = \int\limits_{t_0}^{t_1} g_2(t)\sigma(\boldsymbol{g}(t)) \|\dot{\boldsymbol{g}}\,(t)\| \, \mathrm{d}t$$

$$S_x(\mathcal{C}) = \int\limits_{\mathcal{C}} y\sigma \, \mathrm{d}s = \int\limits_{t_0}^{t_1} g_1(t)\sigma(\boldsymbol{g}(t)) \|\dot{\boldsymbol{g}}\,(t)\| \, \mathrm{d}t$$

Souřadnice $x_t(\mathcal{C})$, $y_t(\mathcal{C})$ těžiště křivky $\mathcal{C}$:

$$x_t(\mathcal{C}) = \frac{S_y(\mathcal{C})}{m(\mathcal{C})} = \frac{\int\limits_{\mathcal{C}} x\sigma \, \mathrm{d}s}{m(\mathcal{C})} \,,$$

$$y_t(\mathcal{C}) = \frac{S_x(\mathcal{C})}{m(\mathcal{C})} = \frac{\int\limits_{\mathcal{C}} y\sigma \, \mathrm{d}s}{m(\mathcal{C})}$$

Statické momenty v $\mathbb{R}^3$:

$$S_{yz}(\mathcal{C}) = \int\limits_{\mathcal{C}} x\sigma \,\mathrm{d}s = \int\limits_{t_0}^{t_1} g_1(t)\sigma(\boldsymbol{g}(t))\|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\| \,\mathrm{d}t$$

$$S_{xz}(\mathcal{C}) = \int\limits_{\mathcal{C}} y\sigma \,\mathrm{d}s = \int\limits_{t_0}^{t_1} g_2(t)\sigma(\boldsymbol{g}(t))\|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\| \,\mathrm{d}t$$

$$S_{xy}(\mathcal{C}) = \int\limits_{\mathcal{C}} z\sigma \,\mathrm{d}s = \int\limits_{t_0}^{t_1} g_3(t)\sigma(\boldsymbol{g}(t))\|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\| \,\mathrm{d}t$$

Souřadnice $x_t(\mathcal{C})$, $y_t(\mathcal{C})$, $y_t(\mathcal{C})$ těžiště křivky $\mathcal{C}$:

$$x_t(\mathcal{C}) = \frac{\int\limits_{\mathcal{C}} x\sigma \,\mathrm{d}s}{m(\mathcal{C})}, \quad y_t(\mathcal{C}) = \frac{\int\limits_{\mathcal{C}} y\sigma \,\mathrm{d}s}{m(\mathcal{C})}, \quad z_t(\mathcal{C}) = \frac{\int\limits_{\mathcal{C}} z\sigma \,\mathrm{d}s}{m(\mathcal{C})}.$$

Momenty setrvačnosti v $\mathbb{R}^2$:

$$I_x(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} y^2 \sigma \, \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} g_2^2(t) \sigma(\boldsymbol{g}(t)) \|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\| \, \mathrm{d}t$$

$$I_y(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} x^2 \sigma \, \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} g_1^2(t) \sigma(\boldsymbol{g}(t)) \|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\| \, \mathrm{d}t$$

Momenty setrvačnosti v $\mathbb{R}^3$:

$$I_x(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} (y^2 + z^2)\sigma \, \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} (g_2^2(t) + g_3^2(t))\sigma(\boldsymbol{g}(t)) \|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\| \, \mathrm{d}t$$

$$I_y(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} (x^2 + z^2)\sigma \, \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} (g_2^2(t) + g_3^2(t))\sigma(\boldsymbol{g}(t)) \|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\| \, \mathrm{d}t$$

$$I_z(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2)\sigma \, \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} (g_1^2(t) + g_2^2(t))\sigma(\boldsymbol{g}(t)) \|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\| \, \mathrm{d}t$$

6.2 Plošný integrál 1. druhu

Definice 3. Množina $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ se nazývá **prostá regulární plocha** v $\mathbb{R}^3$ právě tehdy, když existuje vzájemně jednoznačné zobrazení

$$\boldsymbol{g} : \Omega \to \mathcal{S}\,; \quad \boldsymbol{g}(u,v) = (g_1(u,v), g_2(u,v), g_3(u,v))\,, \tag{6.10}$$

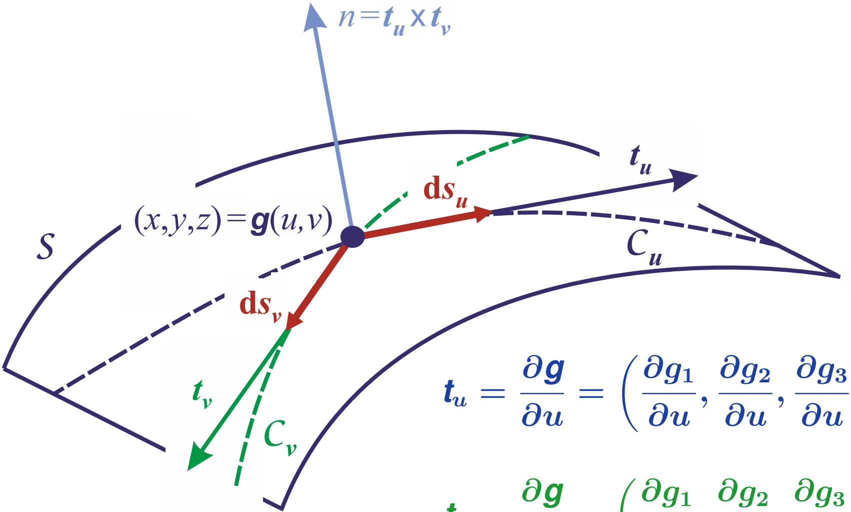
které má na množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ spojité parciální derivace

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u} = \left(\frac{\partial g_1}{\partial u}, \frac{\partial g_2}{\partial u}, \frac{\partial g_3}{\partial u}\right), \quad \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v} = \left(\frac{\partial g_1}{\partial v}, \frac{\partial g_2}{\partial v}, \frac{\partial g_3}{\partial v}\right), \tag{6.11}$$

přičemž vektory (6.11) jsou lineárně nezávislé.

Vektory (6.11) jsou lineárně nezávislé **tečné vektory k ploše $\mathcal{S}$**, jejich vektorový součin je **normálový vektor k ploše $\mathcal{S}$** (viz následující obrázek).

Uvažujme bod plochy o souřadnicích $(x, y, z) = \boldsymbol{g}(u, v)$. Pro pevné v tvoří body $\boldsymbol{g}(u, v)$ křivku $\mathcal{C}_u$, jejíž tečný vektor získáme jako derivaci parametrizace podle (v tuto chvíli jediné) proměnné u. Podobně pro pevné u tvoří body $\boldsymbol{g}(u, v)$ křivku $\mathcal{C}_v$, jejíž tečný vektor získáme jako derivaci parametrizace podle v :

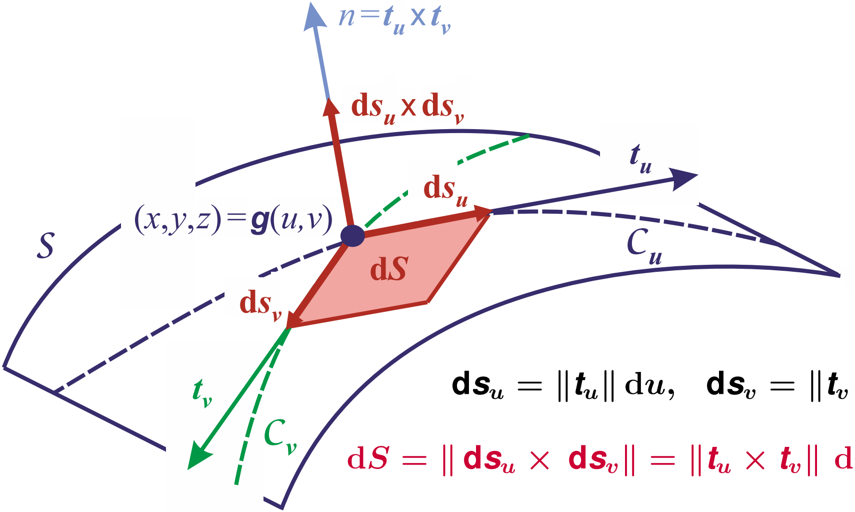


$$\boldsymbol{t}_u = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u} = \left(\frac{\partial g_1}{\partial u}, \frac{\partial g_2}{\partial u}, \frac{\partial g_3}{\partial u} \right)$$

$$\boldsymbol{t}_v = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v} = \left(\frac{\partial g_1}{\partial v}, \frac{\partial g_2}{\partial v}, \frac{\partial g_3}{\partial v} \right)$$

Element obsahu $\mathrm{d}S$

Element obsahu $\mathrm{d}S$ si můžeme představit jako obsah rovnoběžníka, jehož strany tvoří vektory $\mathbf{ds}_u$, $\mathbf{ds}_v$. Obsah tohoto rovnoběžníka je roven velikosti vektorového součinu těchto vektorů.



$$\mathbf{ds}_u = \|\boldsymbol{t}_u\|\,\mathrm{d}u, \quad \mathbf{ds}_v = \|\boldsymbol{t}_v\|\,\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}S = \|\,\mathbf{ds}_u \times \mathbf{ds}_v\| = \|\,\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v\|\;\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

tj. $$\mathrm{d}S = \left\|\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v}\right\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Plošný integrál 1. druhu v $\mathbb{R}^3$

Definice 4. Nechť $\mathcal{S}$ je prostá regulární plocha v $\mathbb{R}^3$ a nechť $\boldsymbol{g}\colon \Omega \to \mathcal{S}$ je její parametrizace. Nechť $f\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3$ je funkce. Existuje-li Riemannův integrál

$$\iint_\Omega f(\boldsymbol{g}(u,v)) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v, \tag{6.12}$$

pak toto číslo značíme $\iint_\mathcal{S} f\, \mathrm{d}S$ a nazýváme je **plošným integrálem 1. druhu funkce f přes plochu $\mathcal{S}$** (také **neorientovaným plošným integrálem**). Je tedy

$$\iint_\mathcal{S} f\, \mathrm{d}S \equiv \iint_\Omega f(\boldsymbol{g}(u,v)) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \tag{6.13}$$

$$= \iint_\Omega f(\boldsymbol{g}(u,v)) \left\| \boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v \right\| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v,$$

Je-li $\mathcal{S}$ část grafu funkce $z = h(x, y)$, pak můžeme vzít jako parametry přímo x, y, tj. zvolit parametrizaci

$$\boldsymbol{g}(x, y) = (x, y, h(x, y)), \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathrm{D}_h. \tag{6.14}$$

Zřejmě platí:

$$\boldsymbol{t}_x = \left(1, 0, \frac{\partial h}{\partial x}\right), \quad \boldsymbol{t}_y = \left(0, 1, \frac{\partial h}{\partial y}\right)$$

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_x \times \boldsymbol{t}_y = \left(-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, 1\right)$$

$$\|\boldsymbol{n}\| = \|\boldsymbol{t}_x \times \boldsymbol{t}_y\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}$$

Pro plošný integrál tedy platí: $\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S =$

$$= \iint_{\Omega} f(x, y, h(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{6.15}$$

Pro plochu $\mathcal{S}$ s parametrizací $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, g_3)$ platí:

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_3}{\partial u} \\ \frac{\partial g_2}{\partial v} & \frac{\partial g_3}{\partial v} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_3}{\partial u} \\ \frac{\partial g_1}{\partial v} & \frac{\partial g_3}{\partial v2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial u} \\ \frac{\partial g_1}{\partial v} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \end{vmatrix} \right).$$

Odtud a ze vztahu $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 \|\boldsymbol{b}\|^2 - \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}$ plyne:

$$\|\boldsymbol{n}\| = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v} \right\| = \sqrt{EG - F^2}, \tag{6.16}$$

kde

$$E = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u} \right\|^2, \quad G = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v} \right\|^2, \quad F = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u} \bullet \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v}, \tag{6.17}$$

Veličiny E, G a F se nazývají **Gaussovy koeficienty plochy**. Můžeme také psát:

$$\|\boldsymbol{n}\|^2 = \|\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v\|^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{t}_u \bullet \boldsymbol{t}_u & \boldsymbol{t}_u \bullet \boldsymbol{t}_v \\ \boldsymbol{t}_v \bullet \boldsymbol{t}_u & \boldsymbol{t}_v \bullet \boldsymbol{t}_v \end{vmatrix}$$

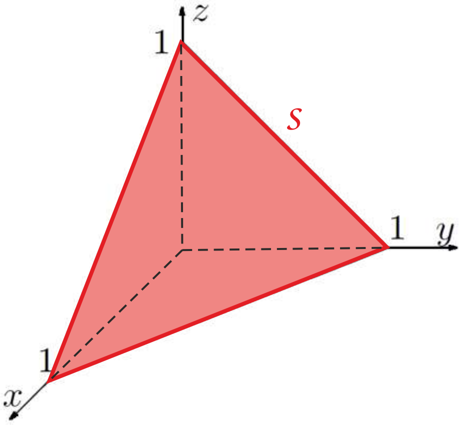
☛ ***Příklad***. Nalezněte hodnotu plošného integrálu

$$\iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{(1+x+y)^2}\, \mathrm{d}S$$

přes plochu

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+y+z=1) \wedge (x \geq 0) \wedge (y \geq 0) \wedge (z \geq 0)\}$$

Řešení.



$$z = 1 - x - y$$

Plochu budeme parametrizovat jako graf funkce

$$\boldsymbol{g}(x, y) = (x, y, 1 - x - y), \quad x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ v \geq 0$$

Pak je

$$\boldsymbol{n} = (1, 0, -1) \times (0, 1, -1) = (1, 1, 1)$$

$$\|\boldsymbol{n}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Odtud

$$\iint_S \frac{1}{(1 + x + y)^2}\, \mathrm{d}S = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{\sqrt{3}}{(1 + x + y)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y =$$

$$= \sqrt{3} \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + x} \right) \mathrm{d}x = \sqrt{3} \left[\ln(1 + x) - \frac{1}{2} x \right]_0^1 =$$

$$= \sqrt{3}(\ln 2 - \frac{1}{2}).$$

☛ ***Příklad***. Nalezněte hodnotu plošného integrálu

$$\iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}S$$

přes plochu

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (z = 1 - x^2 - y^2) \wedge (z \geq 0)\}.$$

Řešení.

a) Nejdříve budeme úlohu řešit tak, že budeme plochu $\mathcal{S}$ parametrizovat jako graf funkce:

$$\boldsymbol{g}(x, y) = (x, y, 1-x^2-y^2), \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Pak je $\|\boldsymbol{n}\| = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$, a tedy

$$\iint_{\mathcal{S}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$= 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi\,,\ \ 0 < r < 1, \\ y = r\sin\varphi\,,\ \ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3\sqrt{1 + 4r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^1 r^3\sqrt{1 + 4r^2}\,\mathrm{d}r = \left| \begin{array}{rl} 1 + 4r^2 = t, & 8r\mathrm{d}r = \mathrm{d}t \\ r = 0 \Rightarrow & t = 1 \\ r = 1 \Rightarrow & t = 5 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_1^5 \frac{t-1}{4} t^{1/2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{60}(25\sqrt{5} + 1)$$

b) Nyní budeme tutéž úlohu řešit tak, že zvolíme parametrizaci rovnou pomocí polárních souřadnic

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Dosazením do rovnic plochy dostaneme parametrizaci

$$\boldsymbol{g}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 1-r^2), \quad 0 < r < 1,\ 0 < \varphi < 2\pi.$$

Pro normálové vektorové pole pak platí

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{g}(r,\varphi)) = (\cos\varphi, \sin\varphi, -2r) \times (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0) =$$

$$= (2r^2\cos\varphi, 2r^2\sin\varphi, r)$$

$$\|\boldsymbol{n}(\boldsymbol{g}(r,\varphi))\| = \sqrt{4r^4\cos^2\varphi + 4r^4\sin^2\varphi + r^2} = r\sqrt{1+4r^2}.$$

Po dosazení dostáváme

$$\iint_{\mathcal{S}} (x^2+y^2)\ \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_0^1 r^3\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r$$

což je týž integrál, jaký jsme počítali v předchozím případě a).

Některé aplikace plošného integrálu

Plošný obsah $S(\mathcal{S})$ plochy $\mathcal{S}$:

$$S(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S$$

Hmotnost $m(\mathcal{S})$ plochy $\mathcal{S}$ s plošnou hustotou σ :

$$m(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} \sigma(x, y, z)\, \mathrm{d}S$$

Analogicky se počítá celkový **náboj**. V tomto případě může hustota σ náboje nabývat i záporných hodnot.

Statické momenty vzhledem k rovinám yz, xz a xy :

$$S_{yz}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} x\sigma(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$S_{xz}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} y\sigma(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$S_{xy}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} z\sigma(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

Souřadnice $x_t(\mathcal{S})$, $y_t(\mathcal{S})$, $y_t(\mathcal{S})$ těžiště křivky $\mathcal{S}$:

$$x_t(\mathcal{S}) = \frac{\iint_{\mathcal{S}} x\sigma(x,y,z)\,\mathrm{d}S}{m(\mathcal{S})}$$

$$y_t(\mathcal{S}) = \frac{\iint_{\mathcal{S}} y\sigma(x,y,z)\,\mathrm{d}S}{m(\mathcal{S})}$$

$$z_t(\mathcal{S}) = \frac{\iint_{\mathcal{S}} z\sigma(x,y,z)\,\mathrm{d}S}{m(\mathcal{S})}$$

Momenty setrvačnosti vzhledem k osám x, y, z :

$$\boldsymbol{I_x(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} (y^2 + z^2)\sigma(x, y, z)\,\mathrm{d}S}$$

$$\boldsymbol{I_y(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} (x^2 + z^2)\sigma(x, y, z)\,\mathrm{d}S}$$

$$\boldsymbol{I_z(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2)\sigma(x, y, z)\,\mathrm{d}S}$$