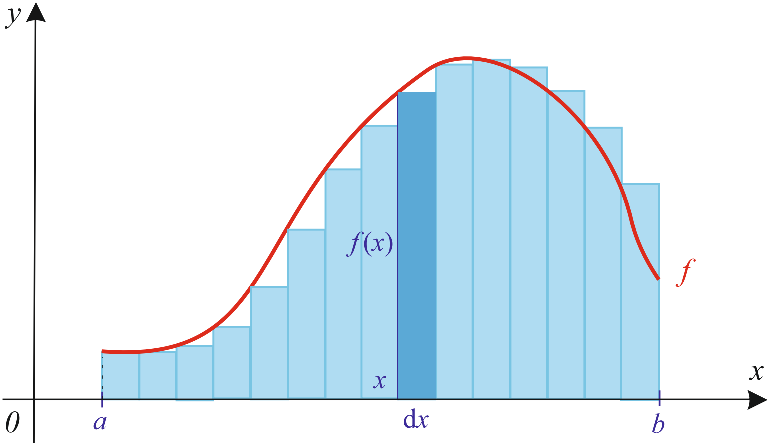
KAPITOLA 2

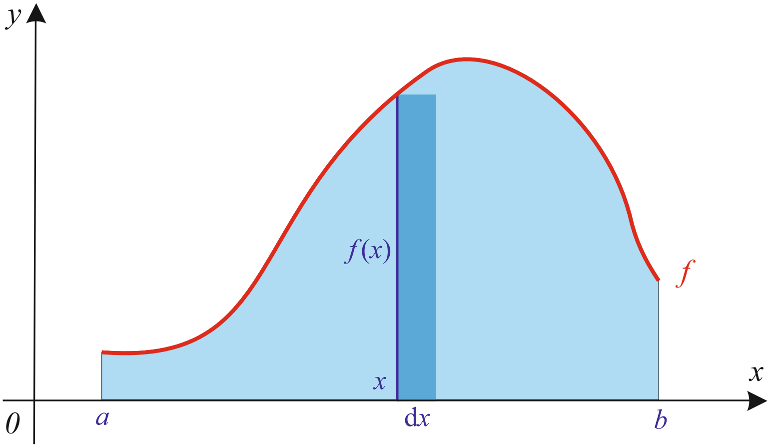
URČITÝ INTEGRÁL

2.1 Riemannův integrál – intuitivní nástin

Než uvedeme matematickou definici, pokusme se alespoň přibližně představit, o co v této části půjde půjde. Hledáme-li obsah oblasti mezi grafem nějaké nezáporné funkce $f(x)$ na omezeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a osou x, můžeme to udělat tak, že tuto oblast „rozřežeme na komínky“:



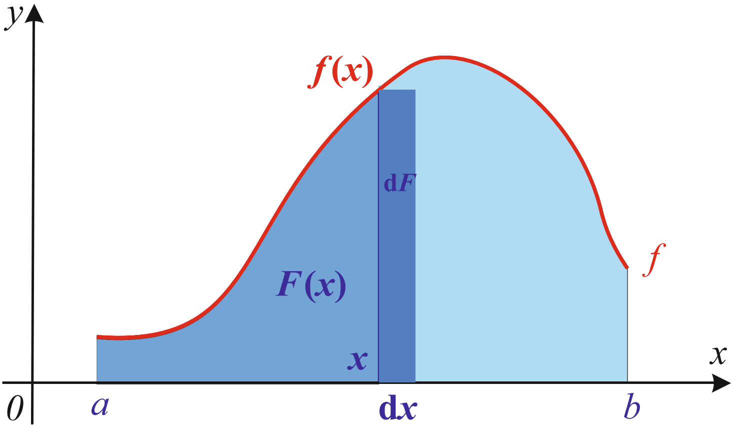
Není-li funkce f příliš „divoká“, pak budeme-li komínky zužovat, jejich celkový obsah se bude přibližovat obsahu pod grafem funkce. Takovéto limitě se bude říkat **Riemannův integrál** a používá se pro ni symbol $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



Na výraz $f(x)\,\mathrm{d}x$ se na jedné straně můžeme dívat jako na obsah „komínku“, na druhé také jako na diferenciál funkce $F(x)$, pro kterou je $F'(x) = f(x)$, tj. primtivní funkce k funkci $f(x)$.

K témuž integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ tedy můžeme dospět buď tak, že sčítáme obsahy „komínků“, anebo přírůstky primitivní funkce $F(x)$. Zjemňováním pak (za předpokladů uvedených v následující části) získáme obsah modře vyznačené oblasti, anebo také celkovou změnu funkce F :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{2.1}$$



Vztah (2.2) se nazývá **Newton-Leibnizova formule** a pro jakékoli naše počítání je zcela zásadní. Výraz vlevo označuje tzv. **Riemannův integrál**, jehož matematická definice vychází z geometrické představy o aproximaci obsahu rovinné oblasti (tj. sčítání obsahů „komínků“), zatímco výraz vpravo představuje tzv. **Newtonův integrál** definovaný jako rozdíl hodnot primitivní funkce v koncovém a počátečním bodě daného intervalu. Tento rozdíl se obvykle zapisuje stručně jako $[F(x)]_a^b$.

Zatímco s praktickým počítáním Riemannova integrálu bychom měli problémy, Newtonův nalezneme snadno pomocí metod, které jsme se naučili pro neurčitý integrál.

Díky vztahu (2.2) tak máme návod na výpočet: Nalezneme primitivní funkci a nakonec jen dosadíme meze a odečteme:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \tag{2.2}$$

Při používání Newton–Leibnizovy formule nezáleží na tom, kterou z funkcí primitivních funkcí použijeme:

$$[F(x) + c]_a^b = (F(b)+c)-(F(a)+c) = F(b)-F(a) = [F(x)]_a^b \,.$$

Zatímco u neurčitého integrálu jsme nakonec vždy přičítali libovolnou konstantu, zde nemusíme (stejně by se nám odečetla).

☛ ***Příklad 1.***

a) $$\int_0^1 x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$$

b) $$\int_0^1 (2x+1)\,\mathrm{d}x = \left[x^2 + x\right]_0^1 = (1+1) - (0+0) = 2$$

c) $$\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = 1 - (-1) = 2$$

d) $$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} x]_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \pi/4$$

Ve složitějších případech máme vždy možnost vypočítat si primitivní funkci bokem a na konci dosadit meze. Obvykle je ale i jednodušší pracovat přímo s určitým integrálem, jen si musíme uvědomit, že použijeme-li substituci, změní se meze tak, aby odpovídaly nové proměnné, a použijeme-li per partes, pak jakmile se nějaký výraz ocitne mimo integrál, musíme dosadit meze – viz části 2.5 a 2.6.

☛ ***Příklad 2.*** Vypočítejte $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Kdybychom počítali neurčitý integrál, psali bychom:

$$\int x \sin x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \sin x & u = -\cos x \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x =$$

$$= -x \cos x + \sin x \,,$$

proto

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x = \left[-x \cos x + \sin x\right]_0^{\pi} = (-\pi \cdot (-1) + 0) - (0 + 0) = \pi \,.$$

Místo

$$\left[-x\cos x+\sin x\right]_0^\pi=(-\pi\cos\pi+\sin\pi)-(-0\cos 0+\sin 0)$$

také můžeme napsat (členy vpravo jsou jen přeskupené):

$$\left[-x\cos x\right]_0^\pi+\left[\sin x\right]_0^\pi=(-\pi\cos\pi+0\cos 0)+(\sin\pi-\sin 0),$$

což je totéž, jako kdybychom rovnou psali:

$$\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{ll} u'=\sin x, & u=-\cos x \\ v=x, & v'=1 \end{array}\right|=$$

$$=\left[-x\cos x\right]_0^\pi+\int\limits_0^\pi\cos x\,\mathrm{d}x=\pi+\left[\sin x\right]_0^\pi=\pi\,.$$

Obecně můžeme napsat:

$$\int\limits_a^b u'v=\left[uv\right]_a^b-\int\limits_a^b uv', \qquad (2.3)$$

☛ ***Příklad 3.*** Vypočítejte $I = \int\limits_0^{2\pi} 8x^2 \sin x \cos x \,\mathrm{d}x$

Řešení. Nyní bude třeba použít per partes dvakrát za sebou. Budeme-li počítat rovnou určitý integrál, pak do členů obsahujících uv vždy hned dosadíme meze, a tím je nahradíme číslem, celkem tak náš zápis bude i jednodušší, než kdybychom počítali zvlášť neurčitý integrál a meze dosadili až nakonec.

$$I = \int\limits_0^{2\pi} 4x^2 \sin 2x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = 4\sin 2x, & u = -2\cos 2x \\ v = x^2, & v' = 2x \end{array} \right| =$$

$$= \left[-2x^2 \cos 2x\right]_0^{2\pi} + \int\limits_0^{2\pi} 4x \cos 2x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = 4\cos 2x, & u = 2\sin 2x \\ v = x, & v' = 1 \end{array} \right| =$$

$$= -8\pi^2 + \left[2x \sin 2x\right]_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} 2\sin 2x \,\mathrm{d}x = -8\pi^2 + 0 + \left[\cos 2x\right]_0^{2\pi} = -8\pi^2.$$

☛ ***Příklad 4.*** $\int_{-1}^{2} 2x \sin(x^2 + 1)\, dx.$

Řešení.

$$\int_{-1}^{2} 2x \sin(x^2+1)\, dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 + 1 \\ dt = 2x\, dx \\ x = -1 \Rightarrow t = 2 \\ x = 2 \Rightarrow t = 5 \end{array} \right| = \int_{2}^{5} \sin t\, dt =$$

$$= [-\cos t]_2^5 = (\cos 2 - \cos 5).$$

Poznámka. Postupovat můžeme také tak, že nalezeneme neurčitý integrál a meze dosadíme až nakonec. Ve výsledku však bývá jednodušší pracovat rovnou s určitým integrálem – při substituci si přepočítáme meze a potom se už nemusíme vracet zpátky k původní proměnné, tak jako u neurčitého integrálu.

Poslední problém, na který narazíme, je ten, že funkce nemusí být na celém daném intervalu konečná, anebo že nekonečná je některá z mezí. V těchto případech se hovoří o tzv. **nevlastním Riemannovu integrálu** – viz část 2.8.

Stručně řečeno, Riemannův integrál je definovaný pro případ, že interval $\langle a, b\rangle$ je omezený a také integrovaná funkce je omezená na $\langle a, b\rangle$. Je-li problém jen s dolní mezí, tj. funkce „utíká“ do $\pm\infty$ anebo je dolní mez $-\infty$, ale pro libovolné konečné $y > a$ je funkce omezená $\langle y, b\rangle$, pak nalezneme integrál $\int_y^b f(x)dx$ a nakonec jeho limitu

$$\lim_{y\to a_+} \int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{\alpha\to-\infty} \int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Podobně je-li problém jen s horní mezí, pak počítáme limitu

$$\lim_{y\to b_-} \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{y\to+\infty} \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

To je také způsob, jakým se rozšiřuje definice Riemannova integrálu na nevlastní – viz definice 8.

Je-li limita konečná, pak se říká, že integrál **konverguje** , je-li nekonečná nebo neexistuje, říká se, že integrál **diverguje** .

☛ ***Příklad 5.*** Vypočítejte $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)}$.

Řešení. Horní mez je nekonečná, proto hledáme

$$\int_2^{y} \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)} = \int_2^{y} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \left[\ln|x-1| - \ln|x|\right]_2^y =$$

$$\left[\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right]_2^y = \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| - \ln\left|\frac{1}{2}\right| = \ln\left(\frac{y-1}{y}\right) + \ln 2\,.$$

Hledaný integrál pak je

$$\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)} = \lim_{y\to+\infty} \left(\ln\left(\frac{y-1}{y}\right) + \ln 2\right) = \ln 1 + \ln 2 = \ln 2\,.$$

Kdybychom rozdíl logaritmů nepřevedli na logaritmus podílu, měli bychom problém s limitou typu "$\infty - \infty$".

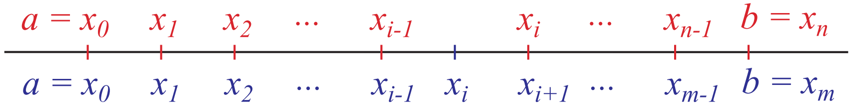
2.2 Riemannův integrál

Definice 1. Nechť $I = \langle a, b \rangle$ omezený interval v $\mathbb{R}$. **Dělením D intervalu $\langle a, b \rangle$** nazveme každou konečnou posloupnost bodů

$$x_0 = x \le x_1 \le x_2 \le \cdots < x_{n-1} \le x_n = b\,.$$

Definice 2. Řekneme, že dělení D' intervalu $\langle a, b \rangle$ je **zjemněním dělení** D právě tehdy, když je každý dělící bod dělení D dělícím bodem dělení D'.

Dělení D:



Dělení D' - zjemnění dělení D

Definice 3. Nechť je funkce f omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme

$$m_i = \inf_{x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x)\,, \qquad M_i = \sup_{x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x)\,.$$

Pro každé dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ sestrojme součty

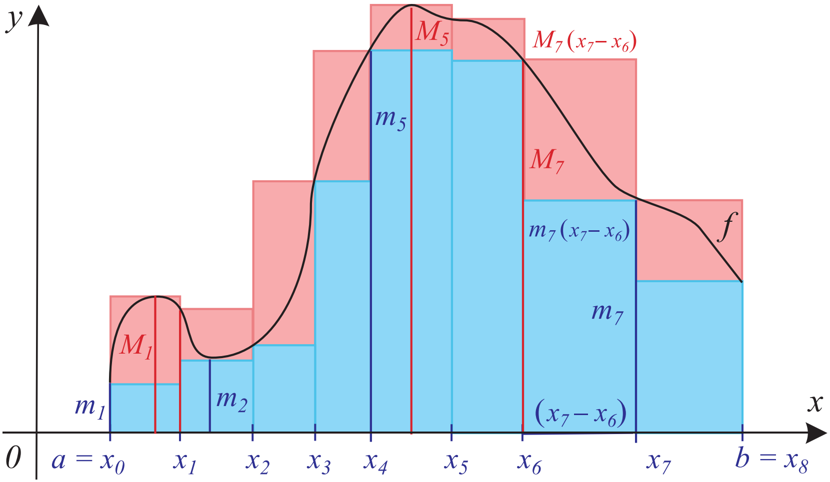
$$s_D = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})\,, \qquad S_D = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})\,.$$

Číslo s_D se nazývá **dolní Riemannův součet** a S_D **horní Riemannův součet funkce $f(x)$ příslušný k dělení** D.

Poznámka. Protože pro každé i je $m_i \le M_i$, platí nerovnost

$$s_D \le S_D.$$

Geometrická interpretace



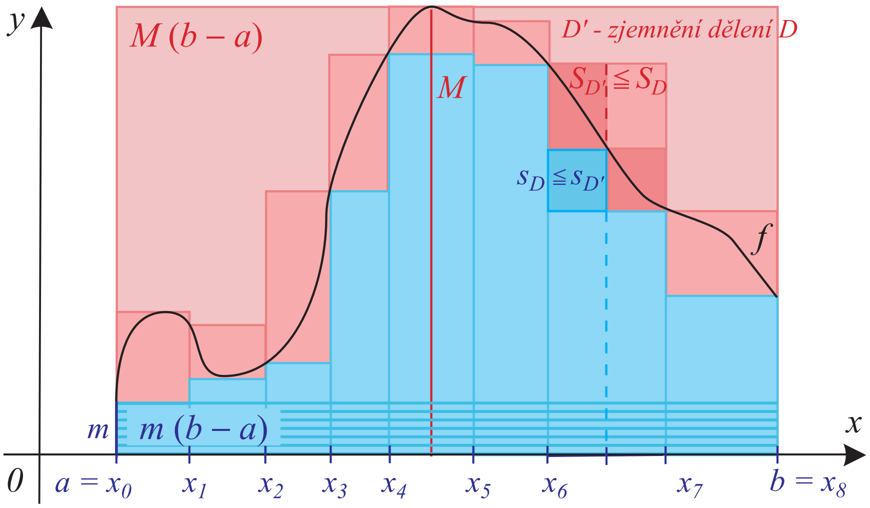
Dolní součet představuje obsah vepsaného obrazce složeného z obdélníků, který je pro každé dělení menší nebo roven obsahu plochy vymezené osou x a grafem funkce na daném intervalu. Horní součet udává velikost plochy opsaného obrazce, a je tedy pro každé dělení větší nebo roven obsahu uvedené plochy.

Označme symbolem $\mathcal{D}$ množinu všech dělení intervalu $\langle a, b\rangle$,

$$M = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)\,, \qquad m = \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)\,.$$

Tvrzení 1. Je-li D' zjemněním dělení D, platí nerovnosti:

$$m(b-a) \leq s_D \leq s_{D'} \leq S_{D'} \leq S_D \leq M(b-a)\,.$$



Tvrzení 2. Pro libovolná dvě dělení D_1 a D_2 intervalu $\langle a, b\rangle$ platí nerovnost $s_{D_1} \leq S_{D_2}$.

Množina $\{s_D; D \in \mathcal{D}\}$ je **shora omezená**, například číslem $M(b-a)$, a **zdola omezená**, například číslem $m(b-a)$. Proto existují čísla

$$s = \sup_{D\in\mathcal{D}} s_D \in \mathbb{R} \qquad \text{a} \qquad S = \inf_{D\in\mathcal{D}} S_D \in \mathbb{R}\,.$$

Definice 4. Číslo $s = \sup\limits_{D\in\mathcal{D}} s_D$ se nazývá **dolní Riemannův integrál funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$** , číslo $S = \inf\limits_{D\in\mathcal{D}} S_D$ se nazývá **horní Riemannův integrál funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$** .

Definice 5. Nechť je $I = \langle a, b\rangle$ omezený interval v $\mathbb{R}$ a funkce $f(x)$ je omezená na I. Jestliže platí $s = S$, kde s je dolní a S horní Riemannův integrál funkce $f(x)$ na intervalu I, nazýváme tuto společnou hodnotu **Riemannovým integrálem funkce $f(x)$ na intervalu** $\langle a, b\rangle$ a značíme ji symbolem $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Existuje-li Riemannův integrál funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, říkáme, že funkce $f(x)$ je **integrovatelná na intervalu** $\langle a, b\rangle$. Vedle názvu Riemannův integrál se běžně používá také název **určitý integrál funkce f na intervalu** $\langle a, b\rangle$.

Poznámka. Uvědomme si, že Riemannův integrál je definován pouze pro omezené funkce na omezeném intervalu, v jiném případě nemá výše uvedená definice smysl.

Poznámka.

V naší geometrické interpretaci představují dolní a horní Riemannovy součty aproximace obsahu rovinné oblasti vymezené grafem dané funkce a osou x na daném intervalu $\langle a, b\rangle$, přičemž hodnota dolního součtu je vždy menší nebo rovna obsahu uvedené plochy, hodnota horního součty je vždy větší nebo rovna tomuto obsahu.

Viděli jsme, že při zjemňování dělení se dolní součet zvětšuje nebo zůstává konstantní, horní součet se naopak zmenšuje, případně zůstává konstantní, a oba se „přibližují" k obsahu oblasti pod grafem funkce. Aby mělo smysl hovořit o obsahu tohoto obrazce, nemělo by záležet na tom, budeme-li jej aproximovat zdola nebo shora, což nastává tehdy, když se dolní Riemannův integrál rovná hornímu. V tomto případě je tedy obsah uvedeného obrazce roven Riemannovu integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta 1.

- Je-li funkce f monotonní na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak je na tomto intervalu integrovatelná.
- Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak je na tomto intervalu integrovatelná.
- Funkce f je integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ právě tehdy, když je pro každé $c \in (a, b)$ funkce integrovatelná na obou intervalech $\langle a, c\rangle$ a $\langle c, b\rangle$. Přitom platí rovnost:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Poznámka. Riemannův integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jsme definovali pro $b \geq a$. Předcházející věta nám umožňuje rozšířit definici integrálu pro $b \leq a$ vztahem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Uvědomme si, že tato definice není ve sporu s případem $b = a$, kdy je Riemannův integrál roven nule. Pro takto rozšířené integrály platí rovnost:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

za předpokladu, že alespoň dva integrály existují.

Prozatím jsme definovali Riemannův integrál pro funkce, které byly definovány na omezeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Nyní rozšíříme definici Riemannova integrálu na funkce, které jsou definovány na omezené množině $M \subset \mathbb{R}$.

Definice 6. Nechť je funkce $f : M \to \mathbb{R}$ definována na omezené množině $M \subset \mathbb{R}$ a nechť I je omezený uzavřený interval takový, že $M \subset I$. **Riemannovým integrálem funkce f přes množinu M** rozumíme integrál

$$\int_a^b \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{kde} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ pro } x \in M, \\ 0 \text{ pro } x \in I \setminus M. \end{cases}$$

Integrál funkce f přes množinu M budeme značit $\displaystyle\int_M f(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta 2. Nechť jsou funkce f_1 , f_2 integrovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$ a c_1, c_2 jsou reálné konstanty. Pak platí:

$$\int_a^b \big(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\big)\,\mathrm{d}x = c_1 \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta 3. Nechť jsou funkce f, g integrovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak jsou na $\langle a, b\rangle$ integrovatelné také funkce f^2 a $f \cdot g$.

Poznámka. Je třeba upozornit, že obecně neplatí rovnost

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

2.3 Integrál jako funkce horní meze

Nechť je funkce f integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a < b$. Pak pro každý bod $x \in \langle a, b\rangle$ existuje integrál $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Protože hodnota tohoto integrálu je určena jednoznačně, můžeme definovat funkci $F\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ předpisem

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,\quad x \in \langle a, b\rangle\,.$$

Integrál v této rovnosti je tedy **funkcí horní meze**. Analogicky je možné definovat integrál jako **funkci dolní meze**

$$G(x) = \int\limits_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\,,\quad x \in \langle a, b\rangle\,.$$

Pro body $x,\ x + h \in \langle a, b\rangle$ je

$$F(x+h) = \int\limits_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) + \int\limits_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Věta 4. Nechť je funkce f integrovatelná na intervalu $\langle a,b\rangle$, kde $a<b$. Pak má funkce $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,\ x\in\langle a,b\rangle$ následující vlastnosti:

(i) je spojitá v intervalu $\langle a,b\rangle$;

(ii) je-li funkce f spojitá v bodě $x_0\in(a,b)$, pak je

$$F'(x_0)=f(x_0).$$

Pro krajní body platí: $F'(a+)=\lim_{x\to a_+} f(x)$, resp. $F'(b-)=\lim_{x\to b_-}$;

(iii) má-li funkce f v bodě $x_0\in(a,b)$ nespojitost 1. druhu, pak je $F'(x_0+)=\lim_{x\to x_0+} f(x)$, $F'(x_0-)=\lim_{x\to x_0-} f(x)$.

2.4 Newton–Leibnizova formule

Věta 5. Nechť je funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a F je její primitivní funkce. Pak platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Poznámka. Newton–Leibnizova formule se obvykle zapisuje pomocí hranaté závorky ve tvaru

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b. \tag{2.4}$$

Zřejmě platí:

$$[F(x) \pm G(x)]_a^b = [F(x)]_a^b \pm [G(x)]_a^b, \qquad [cF(x)]_a^b = c[F(x)]_a^b$$

pro každé dvě funkce F, G a libovolné reálné číslo c.

Newton–Leibnizova formule je velice užitečná, neboť nám konečně poskytuje návod, jak Riemannův integrál nalézt. Navíc nám umožňuje využít všechny početní metody, které jsme používali při hledání primitivní funkce: jakmile nalezneme pro danou funkci f její primitivní funkci F, stačí dosadit do Newton–Leibnizovy formule.

Poznámka. Při používání Newton–Leibnizovy formule nezáleží na tom, kterou z funkcí primitivních v intervalu $\langle a, b\rangle$ k funkci f použijeme. Jsou-li F, G dvě primitivní funkce k funkci f v intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje konstanta C tak, že $G(x) = F(x) + C$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$, a tedy

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)\,.$$

Definice 7. Nechť je funkce $f(x)$ definována na intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, nazýváme číslo $F(b) - F(a)$ **Newtonovým určitým integrálem** funkce $f(x)$ od bodu a do bodu b.

☛ ***Příklad 6.*** Vypočítejte $\int\limits_0^{\pi/2} 4|\sin 4x|\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Integrál zřejmě existuje. Abychom jej mohli vypočítat, potřebujeme se nejdříve zbavit absolutní hodnoty. Přitom nás zajímá pouze interval $\langle 0, \pi/2\rangle$. Protože

$$|\sin 4x| = \begin{cases} 4\sin 4x, & x \in \langle 0, \pi/4\rangle, \\ -4\sin 4x, & x \in \langle \pi/4, \pi/2\rangle, \end{cases}$$

rozdělíme integrál na součet:

$$\int_0^{\pi/2} 4\sin 4x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} 4\sin 4x\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (-4\sin 4x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -[\cos 4x]_0^{\pi/4} + [\cos 4x]_{\pi/4}^{\pi/2} = -(-1-1) + (1+1) = 4\,.$$

☛ *Příklad 7.*

Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{pro } x = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}\,,\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z} \text{ nesoudělná čísla,} \\[2ex] 0 \text{ pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Lze ukázat, že pro tuto funkci existuje Riemannův integrál

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Ale k této funkci neexistuje žádná na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ primitivní funkce. Proto nemá tato funkce Newtonův integrál.

2.5 Integrace per partes

Věta 6. Nechť jsou f, g spojitě diferencovatelné funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak platí:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Poznámka. Per partes jsme již měli pro neurčitý integrál

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Označme primitivní funkci k součinu $f(x)g'(x)$ jako $H(x)$. Pak

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x) - H(x)]_a^b =$$

$$= (f(b)g(b) - H(b)) - (f(a)g(a) - H(a))\,.$$

Členy ale můžeme přerovnat, takže dostaneme:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - (H(b) - H(a)) =$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Lidově řečeno: per partes používáme tak, jak jsme zvyklí z neurčitého integrálu s tím, že ocitne-li se nějaká funkce mimo integrál, musíme dosadit meze.

Vzorec pro per partes se často zapisuje ve tvaru

$$\int\limits_a^b u'v = [uv]_a^b - \int\limits_a^b uv', \qquad (2.5)$$

Lze dokázat, že jej lze použít i v případě, kdy $a > b$.

Je samozřejmé, že metodu per partes budeme používat ve stejných situacích, v jakých jsme ji používali při výpočtu neurčitých integrálů.

2.6 Substituce

Věta 7. Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a funkce $\varphi : \langle \alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle$ má spojitou derivaci a platí $\varphi(\alpha) = a$ a $\varphi(\beta) = b$. Pak platí rovnost

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Je-li $F(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ primitivní funkce k funkci $f(x)$, pak je podle věty o substituci pro neurčitý integrál funkce $\Psi(t) = F\big(\varphi(t)\big)$ primitivní funkcí k funkci $f(\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$ na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$. Proto je integrál vlevo roven

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \Psi(\beta) - \Psi(\alpha) = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta 8. Nechť je $f(x)$ spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a funkce $\varphi : \langle \alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle$ je spojitá diferencovatelná funkce, která zobrazuje interval $\langle \alpha, \beta\rangle$ na interval $\langle a, b\rangle$, a nechť je $\varphi'(t) \neq 0$. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Důkaz. Nechť je $\Psi(t)$ primitivní funkce k funkci $f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$ na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$. Pak je integrál vpravo roven $\Psi(\beta) - \Psi(\alpha)$. Ale předpoklady věty zaručují, že existuje inverzní funkce $t = \varphi^{-1}(x)$ k funkci $x = \varphi(t)$ a že funkce $F(x) = \Psi\big(\varphi^{-1}(x)\big)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$. Proto platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \Psi\big(\varphi^{-1}(b)\big) - \Psi\big(\varphi^{-1}(a)\big) =$$
$$= \Psi(\beta) - \Psi(\alpha) = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Poznámka. Povšimněme si, že podobně jako v případě neurčitých integrálů se v obou větách objevuje tvar

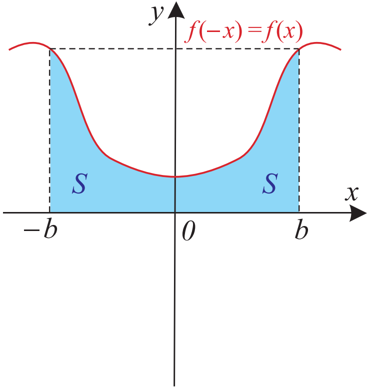
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

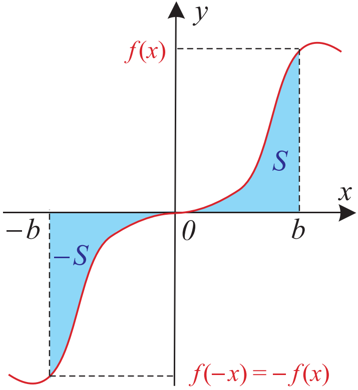
Ovšem předpoklady se liší podle toho, zda pomocí známého integrálu na levé nebo pravé straně hledáme druhý z integrálů v této rovnosti.

2.7 Integrál sudé, liché a periodické funkce

Věta 9.

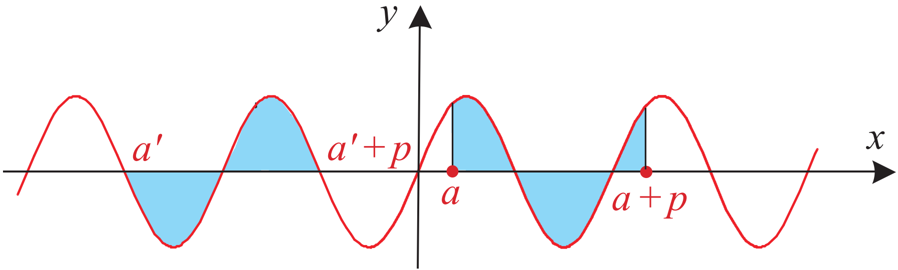
- Je-li funkce f sudá a integrovatelná v intervalu $\langle -b, b\rangle$, pak platí: $\displaystyle\int_{-b}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$
- Je-li funkce f lichá a integrovatelná v intervalu $\langle -b, b\rangle$, platí: $\displaystyle\int_{-b}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$





Věta 10. Nechť funkce f je periodická s periodou T, nechť a, a' jsou reálná čísla. Existuje-li jeden z následujících integrálů, existuje i druhý z nich a platí

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a'}^{a'+T} f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Volně řečeno, integrál přes integrační obor délky periody je stejný bez ohledu na to, kde je integrační obor umístěn.

2.8 Nevlastní Riemannův integrál

Definice 8. Nechť $a < b$ a pro každé $y \in (a, b)$ existuje Riemannův integrál $\displaystyle\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{y \to b-} \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

nazveme ji **nevlastním** (nebo **zobecněným**) **Riemannovým integrálem funkce** $f(x)$ **od bodu** a **do bodu** b, a řekneme, že nevlastní integrál je **konvergentní**. V případě, že je výše uvedená limita nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že integrál **diverguje**. Nevlastní Riemannův integrál funkce $f(x)$ od a do b značíme opět $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Podle definice je tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to b-} \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.6}$$

O tomto integrálu říkáme, že je **nevlastní vlivem integrandu**. Bod b, v jehož každém okolí je integrand neomezený, se nazývá **singulárním bodem** integrandu nebo nevlastního integrálu. Uvedená rovnost platí i tehdy, když integrál vlevo existuje jako vlastní Riemannův integrál. Proto můžeme bez obav používat pro nevlastní integrály totéž označení jako pro integrály vlastní.

Nevlastní integrál pro funkce, jejichž jediným singulárním bodem je bod a, tj. dolní integrační mez, definujeme analogicky:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to a+} \int_x^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.7}$$

Jsou-li oba krajní body a, b integračního oboru jedinými singulárními body integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, pak rozdělíme integrační obor nějakým bodem $c \in (a,b)$ a vyšetřujeme integrály $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

a $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Podobně, je-li některý bod $c \in (a,b)$ singulárním bodem integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, uvažujeme každý z integrálů $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ zvlášť.

2.8.1 Newton–Leibnizova formule pro nevlastní integrály

Věta 11. Předpokládejme, že integrál $I = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ má jediný singulární bod a, že existují vlastní integrály $\int_x^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pro $x \in (a,b)$ a že funkce f má primitivní funkci F v intervalu $(a,b\rangle$. Konverguje-li integrál I, pak platí:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - \lim_{x\to a+} F(x). \tag{2.8}$$

Analogicky v případě, že jediným singulárním bodem je b.

☛ ***Příklad 8.*** Vypočítejte $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$.

Řešení. Pro $x = 1$ je ve jmenovateli $\ln 1 = 0$. Funkce tedy není omezená na $\langle 1, 2\rangle$, ale je omezená na $\langle \alpha, 2\rangle$ pro libovolné $\alpha > 1$. Nalezneme proto

$$\int_\alpha^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \left| \begin{array}{c} t = \ln x \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int_{\ln\alpha}^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln|t|]_{\ln\alpha}^{\ln 2} =$$

$$= \ln|\ln\alpha| - \ln(\ln 2)\,.$$

Protože

$$\lim_{\alpha\to 1_+} \int_\alpha^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \lim_{\alpha\to 1_+} \ln|\ln\alpha| - \ln(\ln 2) = +\infty,$$

integrál diverguje.