KAPITOLA 3

RIEMANNŮV INTEGRÁL V $\mathbb{R}^n$

3.1 Riemannův integrál v $\mathbb{R}^2$ – úvod

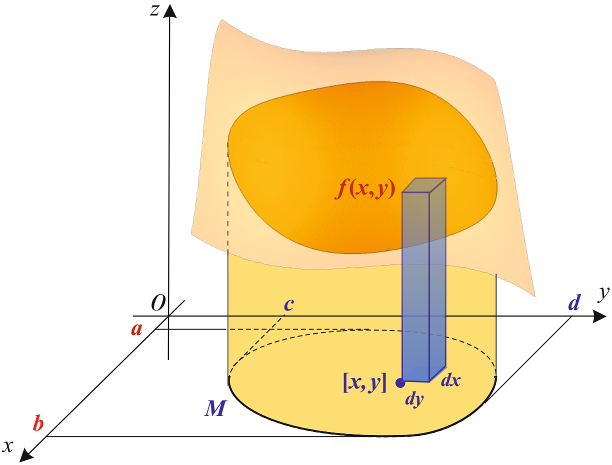
Než uvedeme matematickou definici (viz část 3.3), pokusme se opět přibližně představit, čím se budeme zabývat.

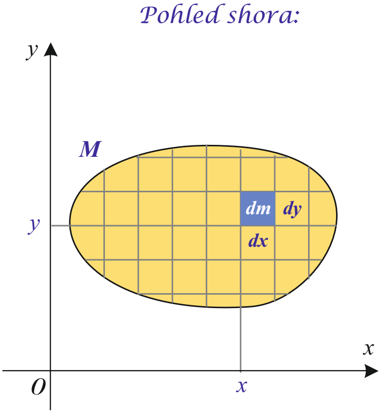
Pro nezápornou funkci jedné proměnné jsme pomocí Riemannova integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ hledali obsah oblasti pod grafem této funkce a nad daným intervalem $\langle a, b\rangle$. Obsah jsme přitom aproximovali pomocí součet obsahů obdélníčků o výšce $f(x)$.

Nyní přejdeme k nezáporné funkci dvou proměnných $f(x, y)$. Grafem takového funkce je plocha v prostoru. Místo intervalu $\langle a, b\rangle$ pak budeme mít zadanou nějakou omezenou oblast M v rovině $\mathbb{R}^2$ a místo obsahu budeme hledat objem tělesa tvořeného body nad oblastí M a pod grafem funkce $f(x, y)$. Tzv. **dvojný Riemannův integrál** na množině $M \in \mathbb{R}^2$ budeme zapisovat symbolem

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

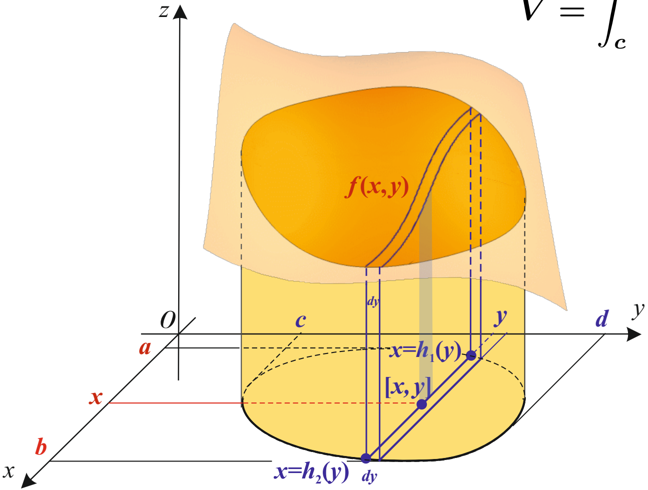
Představme si, že dvojný integrál $V = \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, tedy skutečný objem tělesa, aproximujeme jako součet objemů „hranolků“ se základnou $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ a výškou $f(x, y)$:

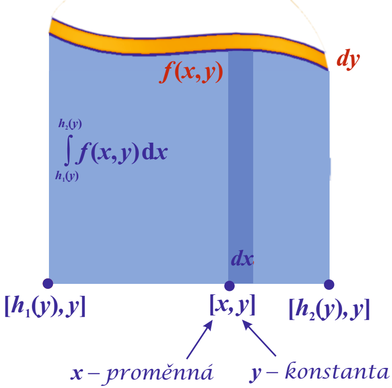




Díky tzv. **Fubiniho větě** (viz část 3.5) budeme schopni převést výpočet dvojného integrálu na výpočet dvou jednorozměrných určitých integrálů. Zhruba si to můžeme představit tak, že týž objem získáme rozřezáním tělesa buď na „hranolky“, nebo na „plátky“. Začněme svislými řezy rovnoběžnými s osou x :

$$V = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

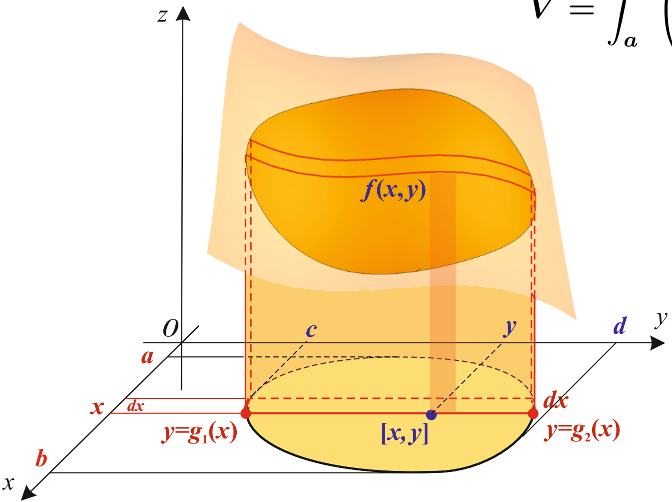


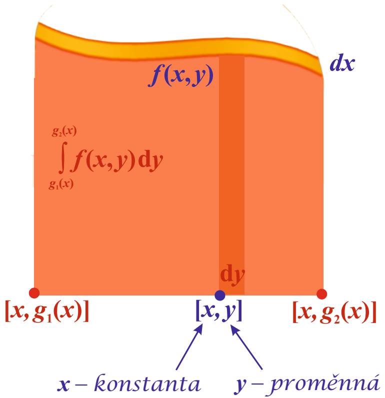


Pro dané y vyjadřuje $\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ obsah řezu, vynásobením tloušťkou $\mathrm{d}y$ získáme objem „plátku“ a sečtením objemů „plátků“ získáme objem tělesa.

Podobně můžeme uvažovat svislé řezy rovnoběžné s osou y :

$$V = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$





Pro dané x vyjadřuje $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ obsah řezu, vynásobením tloušťkou $\mathrm{d}x$ získáme objem „plátku“ a sečtením objemů „plátků“ získáme objem tělesa.

Fubiniho věta pro dvojný integrál (viz str. 45) tedy říká, že lze-li hranici dané omezené množiny M popsat pomocí dvojic funkcí $g_1(x), g_2(x)$ (viz předchozí obrázky), pak

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy \right) \mathrm{d}x = $$

$$= \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx \right) \mathrm{d}y \,.$$

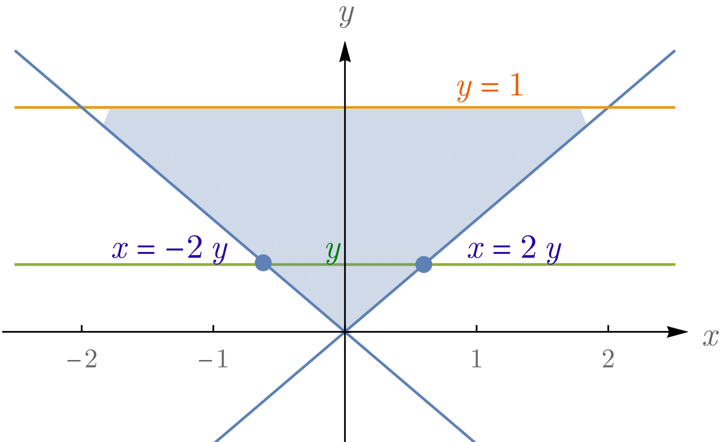
Také se používá označení:

$$\int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$\int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

Jedná se tedy o to, že vždy uvažujeme nejprve jednu proměnnou jako konstantu a integrujeme podle druhé z nich, přičemž meze mohou záviset na „zafixované“ proměnné. Po dokončení tohoto prvního integrálu získáme už jen funkci „zafixované“ proměnné a pro ni jen číselné meze.

☛ ***Příklad 1.*** Nalezněte integrál $\iint_M 6x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je oblast v rovině ohraničná přímkami $x - 2y = 0$, $x + 2y = 0$, $y = 1$.



Řešení.

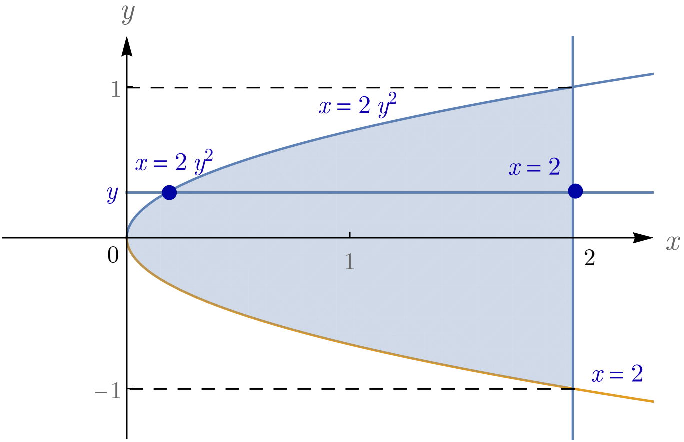
Budeme-li výsledné těleso rozřezávat na svislé „plátky“ rovnoběžné s osou x, tj. oblast M budeme rozřezávat rovnoběžně s osou x, pak to znamená, že nejprve necháme pevné y a budeme uvažovat všechna x taková, aby bod $(x, y) \in M$. Podle obrázku musí x ležet mezi $-2y$ a $2y$. Souřadnice y leží mezi 0 a 1. Tedy:

$$\iint_M 6x^2y\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{-2y}^{2y} 6x^2y\,dx\right)\,dy = \int_0^1 \left[\frac{6x^3}{3}\,y\right]_{-2y}^{2y}\,dy =$$

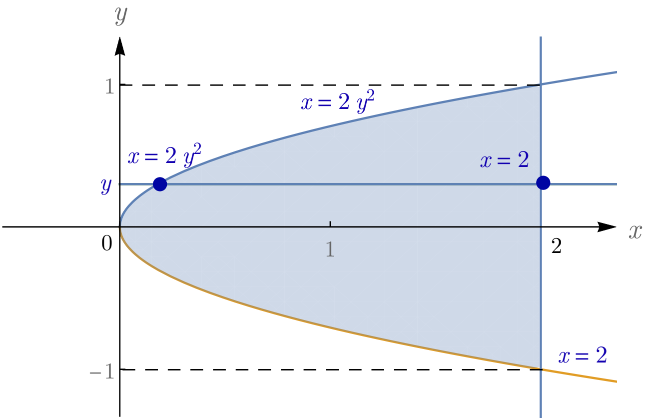
$$= \int_0^1 \left(2(8y^3 + 8y^3)\,y\right)\,dy = \int_0^1 32y^4\,dy = \left[32\,\frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{32}{5}$$

☛ ***Příklad 2.*** Nalezněte integrál $\iint_M x \, dx \, dy$, kde M je oblast v rovině ohraničná křivkami $x = y^2$, $x = 2$.

Řešení.
První křivka je parabola, jejíž osou je osa x, druhá je svislá přímka. Oblast, která má za hranici obě tyto křivky je vyznačená modře.



Vzhledem k tomu, že v zadání máme přímo vyjádřené x pomocí y nebo čísla, bude nejjednodušší začít integrovat podle x.



$$\boldsymbol{x = 2 \quad \Rightarrow y = \pm 1}$$

Meze:

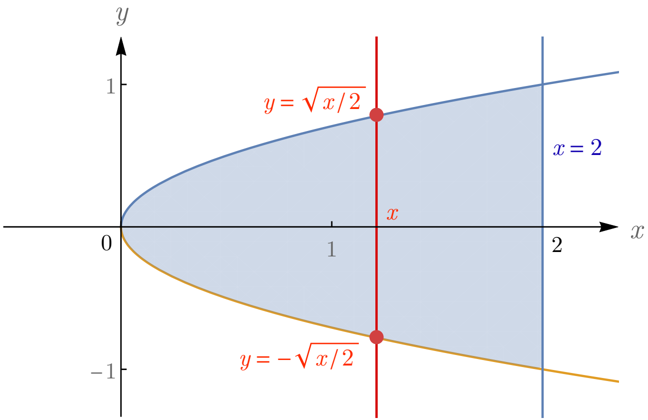
$$\boldsymbol{x \in \langle 2y^2, 2\rangle}$$

$$\boldsymbol{y \in \langle -1, 1\rangle}$$

$$\iint_M x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\left(\int_{2y^2}^{2} x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{2y^2}^{2}\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-1}^{1}\tfrac{1}{2}\left(4 - 4y^4\right)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\left(2 - 2y^4\right)\,\mathrm{d}y = \left[2y - \tfrac{2}{5}y^5\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left(\left(2 - \tfrac{2}{5}\right) - \left(-2 + \tfrac{2}{5}\right)\right) = 4 - \tfrac{4}{5} = \underline{\underline{16/5}}$$



Oblast M můžeme „rozřezávat“ také rovnoběžně s osou y, je to ale pracnější:

Meze:

$y \in \langle -\sqrt{x/2}, \sqrt{x/2} \rangle$

$x \in \langle 0, 2 \rangle$

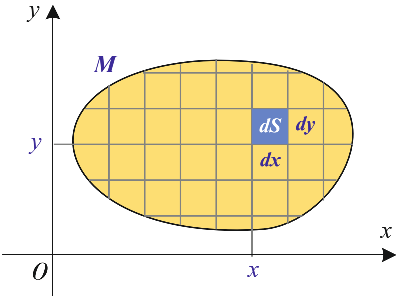
$$\iint_M x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{x/2}}^{\sqrt{x/2}} x \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^2 \left[xy \right]_{-\sqrt{x/2}}^{\sqrt{x/2}} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^2 x \left(\sqrt{x/2} + \sqrt{x/2} \right) \mathrm{d}y = \int_0^2 x \left(2\sqrt{x/2} \right) \mathrm{d}x = \sqrt{2} \int_0^2 x^{3/2} \,\mathrm{d}x =$$

$$= \sqrt{2}\, \frac{2}{5} \left[x^{5/2} \right] = \frac{2\sqrt{2}}{5}\, 2^{5/2} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \sqrt{2} \cdot 2^2 = \underline{\underline{16/5}}$$

Další aplikace dvojného integrálu

Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je tzv. **přípustná oblast**, tj. omezená množina, jejíž hranici tvoří konečný počet prostých křivek.



Plošný obsah rovinného obrazce M :

$$S(M) = \iint_M \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Hmotnost tenké desky M :

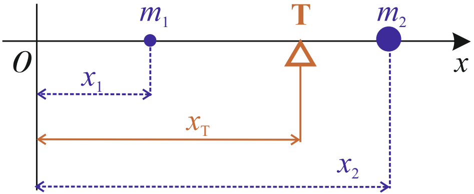
$$m(M) = \iint_M \sigma(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, ,$$

kde $\sigma(x, y)$ značí **plošnou hustotu,** která udává hmotnost jednoho m^2 daného materiálu (například desky z bezpečnostního skla o plošné hustotě $26\,\mathrm{kg/m}^2$ na pokrytí střechy pergoly o rozloze $20\,\mathrm{m}^2$ mají celkovou hmotnost $20 \cdot 26 = 520\,\mathrm{kg}$).

Veličina $\sigma(x, y)$ může rovněž udávat **hustotu náboje** a výsledný integrál **celkový náboj tenké desky**.

TĚŽIŠTĚ

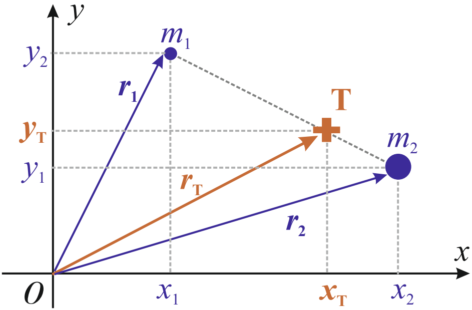
Připomeňme si nejprve, jak nalezneme těžiště soustavy dvou hmotných bodů („kuliček“ zanedbatelných rozměrů):



$$x_T(m_1 + m_2) = x_1 m_1 + x_2 m_2$$

$$x_T = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

Podobný vztah platí i pro n hmotných bodů, kdy uvažujeme polohové vektory $r_i = (x_i, y_i)$



$$r_T = \frac{r_1 m_1 + r_2 m_2 + \cdots + r_n m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

Poslední rovnost můžeme rozepsat pro souřadnice x, y :

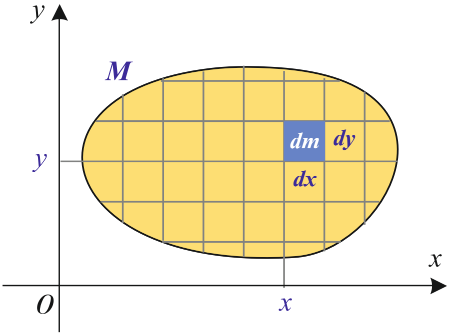
$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad y_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Souřadnice těžiště rovinné desky:

Pro tenkou desku pak místo m_i uvažujme hmotnost „elementu“ desky $\mathrm{d}m = \sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Místo součtu pak budeme integrovat přes danou rovinnou oblast M :

$$x_T = \frac{\iint_M x\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_M \sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

$$y_T = \frac{\iint_M y\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_M \sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$



Ve jmenovateli je vždy **celková hmotnost** desky, výrazy v čitateli se nazývají

Statické momenty vzhledem k ose y a ose x :

$$S_y(M) = \iint_M x\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \quad S_x(M) = \iint_M y\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde $\sigma(x,y)$ je plošná hustota.

Souřadnice těžiště homogenní rovinné oblasti $M \subset \mathbb{R}^2$:

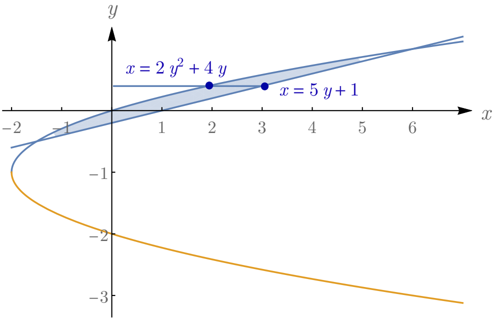
Je-li deska **homogenní,** tj. plošná hustota je ve všech bodech stejná, pak její hodnotu můžeme vytknout z integrálu v čitateli i ve jmenovateli a zkrátit (stejný výsledek dostaneme také dosazením $\sigma(x,y) = 1$):

$$x_T = \frac{\iint_M x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\,, \qquad y_T = \frac{\iint_M y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\,.$$

Ve jmenovateli pak zůstává **plošný obsah dané oblasti.**

☛ ***Příklad 3.*** Nalezněte obsah oblasti $M \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi $4y + 2y^2 - x \le 0,\ x - 5y - 1 \le 0\,.$

Řešení.



Nejjednodušší bude vyjádřit z obou nerovností x

Meze:

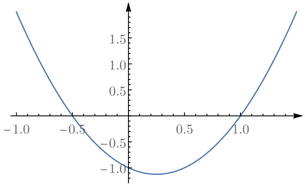
$4y + 2y^2 - x \le 0 \ \Leftrightarrow\ x \ge 2y^2 + 4y$

$x - 5y - 1 \le 0 \ \Leftrightarrow\ x \le 5y + 1$

tj. $2y^2 + 4y \le x \le 5y + 1$

Aby měla poslední nerovnost smysl, musí být také $2y^2 + 4y \le 5y + 1$, tj. $2y^2 - y - 1 \le 0$

nulové body: $y_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ -1/2 \end{array}\right.$



Tím dostáváme meze pro y : $y \in \langle -1/2, 1\rangle$

Celkem tak máme podmínky:

$$2y^2 + 4y \leq x \leq 5y + 1, \qquad -1/2 \leq y \leq 1.$$

Meze pro x jsou závislé na y, začneme proto integrovat podle x :

$$S = \iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1/2}^{1} \left(\int_{2y^2+4y}^{5y+1} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{-1/2}^{1} \Big[x\Big]_{2y^2+4y}^{5y+1} \mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-1/2}^{1} (5y + 1 - 2y^2 - 4y)\ \mathrm{d}y = \int_{-1/2}^{1} (-2y^2 + y + 1)\ \mathrm{d}y =$$

$$= \left[-\tfrac{2}{3}y^3 + \tfrac{1}{2}y^2 + y\right]_{-1/2}^{1} = \underline{\underline{9/8}}$$

☛ ***Příklad 4.*** Nalezněte souřadnici x_T homogenní rovinné oblasti M, která je dána nerovnostmi

$$x^2 + 2x - y - 3 \leq 0, \qquad x^2 + 4x + y + 7 \leq 0\,,$$

jestliže víte, že obsah této oblasti je $1/3$.

Řešení. V tomto případě bude jednodušší vyjádřit y v závislosti na x (jinak bychom museli řešit kvadratické nerovnice):

$$x^2 + 2x - y - 3 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 2x - 3 \leq y\,,$$
$$x^2 + 4x + y + 7 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; y \leq -x^2 - 4x - 7\,,$$

tedy celkem $\quad x^2 + 2x - 3 \leq y \leq -x^2 - 4x - 7\,.$

Aby měla poslední nerovnost smysl, musí být

$$x^2 + 2x - 3 \leq -x^2 - 4x - 7\,,$$

tj. $\quad 2x^2 + 6x + 4 \leq 0 \qquad$ neboli $\qquad 2(x + 2)(x + 1) \leq 0\,.$

Odtud získáme podmínku pro x, a to $x \in \langle -2, -1 \rangle\,.$

Máme tedy meze:

$$x^2 + 2x - 3 \le y \le -x^2 - 4x - 7\,, \qquad -2 \le x \le -1\,.$$

Jak jsme viděli na str. 15, pro x-ovou souřadnici těžiště platí:

$$x_T = \frac{\iint_M x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_M \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\,.$$

Obsah oblasti M ve jmenovateli je podle zadání $1/3$, proto

$$x_T = \frac{\iint_M x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1/3} = \frac{3}{1}\int_{-2}^{-1}\left(\int_{x^2+2x-3}^{-x^2-4x-7} x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$= 3\int_{-2}^{-1}\Big[xy\Big]_{x^2+2x-3}^{-x^2-4x-7}\mathrm{d}x = 3\int_{-2}^{-1}(-x^3 - 4x^2 - 7x - x^3 - 2x^2 + 3x)\mathrm{d}x$$

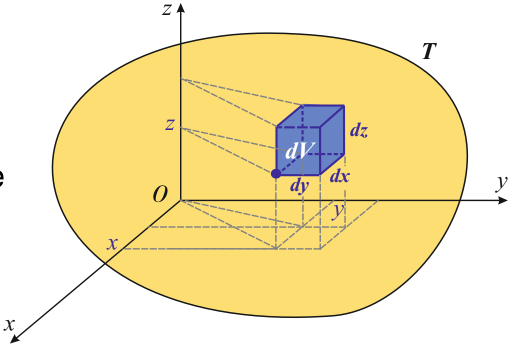
$$= 3\int_{-2}^{-1}\left(-2x^3 - 6x^2 - 4x\right)\,\mathrm{d}x = 3\left[-\tfrac{2}{4}x^4 - \tfrac{6}{3}x^3 - \tfrac{4}{2}x^2\right]_{-2}^{-1} =$$

$$= -3\left[\tfrac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 2x^2\right]_{-2}^{-1} = -3\,\left(\tfrac{1}{2} - 2 + 2 - 8 + 16 - 8\right) = \underline{\underline{-3/2}}$$

3.2 Riemannův integrál v $\mathbb{R}^3$ – úvod

Přidáním další proměnné přejdeme k **trojnému integrálu**

$$\iiint_T f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$



kde T je těleso v prostoru.

Součin $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ si nyní můžeme představit jako **element objemu**.

Pak můžeme hledat například:

Objem tělesa T :

$$V(T) = \iiint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Hmotnost tělesa T :

$$m(T) = \iiint_T \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

kde $\rho(x,y,z)$ je objemová **hustota** materiálu v daném bodě.

Souřadnice těžiště tělesa $T \subset \mathbb{R}^3$:

Souřadnice těžiště tělesa nalezneme podobným způsobem jako těžiště tenké desky. Platí:

$$x_T = \frac{\iiint_T x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_T \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z} = \frac{S_{yz}}{m(T)}$$

$$y_T = \frac{\iiint_T y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_T \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z} = \frac{S_{xz}}{m(T)}$$

$$z_T = \frac{\iiint_T z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_T \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z} = \frac{S_{xy}}{m(T)}$$

S_{yz}, S_{xz}, S_{xy} značí **statický moment tělesa T** vzhledem k rovině yz, xz, xy.

Souřadnice homogenního těžiště tělesa $T \subset \mathbb{R}^3$:

Je-li těleso homogenní, pak je hustota ve všech bodech stejná a její hodnotu lze vytknout a zkrátit. Stejný výsledek bychom dostali také tím, že bychom položili $\rho(x, y, z) = 1$.

Pro souřadnice těžiště homogenního tělesa tedy platí:

$$x_T = \frac{\iiint_T x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z}{\iiint_T \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z} = \frac{S_{yz}}{V(T)}$$

$$y_T = \frac{\iiint_T y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z}{\iiint_T \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z} = \frac{S_{xz}}{V(T)}$$

$$z_T = \frac{\iiint_T z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z}{\iiint_T \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z} = \frac{S_{xy}}{V(T)}$$

S_{yz}, S_{xz}, S_{xy} značí **statický moment homogenního tělesa T** vzhledem k rovině yz, xz, xy.

☛ ***Příklad 5.*** Nalezněte souřadnici z_T těžiště homogenního tělesa $T \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi:

$$x + y + z \leq 1, \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; z \geq 0 \,.$$

Řešení. Souřadnici z snadno vyjádříme jako funkci proměnných x, y. Při určování mezí si můžeme pomoci obrázkem, také však můžeme postupovat čistě početně:

Vyjádřeme nejprve z :

$$0 \leq z \leq 1 - x - y$$

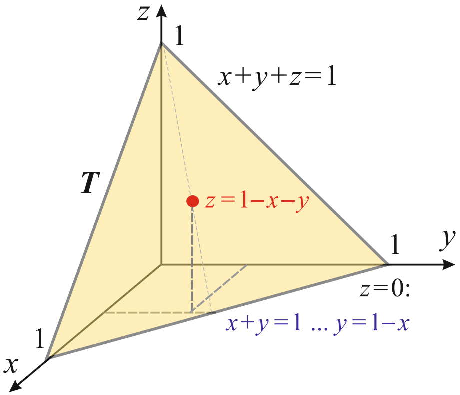
Aby tato nerovnice měla smysl, musí být

$$0 \leq 1 - x - y, \quad \text{tj.} \quad y \leq 1 - x$$

Podle zadání je $y \geq 0$, proto

$$0 \leq y \leq 1 - x.$$

Odtud a ze zadání: $0 \leq x \leq 1$



Máme tedy podmínky:

$$0 \leq z \leq 1 - x - y\,, \qquad 0 \leq y \leq 1 - x\,, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

Jinými slovy, celé těleso můžeme „projít“ tak, že budeme uvažovat postupně všechna $x \in \langle 0, 1 \rangle$, pro každé z těchto x budeme uvažovat všechna $y \in \langle 0, 1 - x \rangle$, a konečně pro každý z těchto bodů $(x, y, 0)$ budeme uvažovat všechny body (x, y, z), kde $0 \leq z \leq 1 - x - y$.

Pro souřadnici z_T těžiště platí:

$$z_T = \frac{\iiint_T z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}\,.$$

Objem jehlanu, a tedy integrál ve jmenovateli, známe (popř. bychom jej vypočítali podobně jako integrál v čitateli):

$$V = \tfrac{1}{3} S_p \cdot v = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1 = 1/6$$

Proto

$$z_T = \frac{\iiint_T z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z}{1/6} = \frac{6}{1} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} z \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= 6 \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left[\tfrac{1}{2} z^2 \right]_0^{1-x-y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{6}{2} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(1 - x - y\right)^2 \right) \mathrm{d}y \Big) \,\mathrm{d}x$$

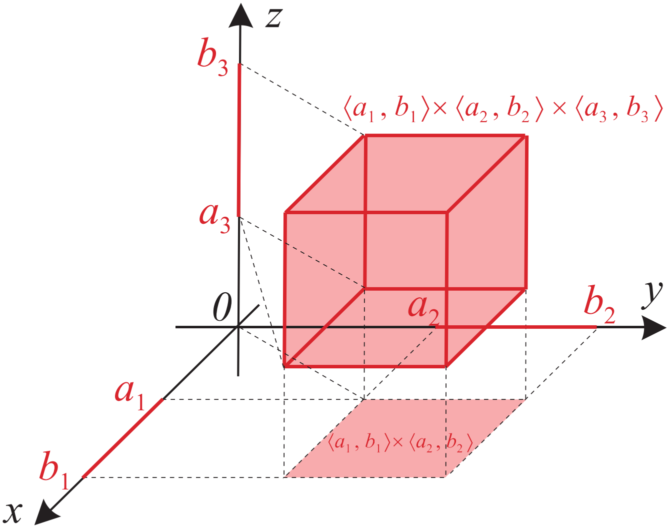
$$= 3 \int_0^1 \left[-\frac{(1 - x - y)^3}{3} \right]_0^{1-x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(0 + (1 - x)^3\right) \,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\frac{(1 - x)^4}{4} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

3.3 Zavedení Riemannova integrálu v $\mathbb{R}^n$

Nechť je $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$ omezený uzavřený interval, tj.

$$\mathcal{I} = \langle \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_1} \rangle \times \langle \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b_2} \rangle \times \cdots \times \langle \boldsymbol{a_n}, \boldsymbol{b_n} \rangle \,;\ \boldsymbol{a_i}\,, \boldsymbol{b_i} \in \mathbb{R}\,;\ \boldsymbol{a_i} \le \boldsymbol{b_i}\,. \quad (3.1)$$

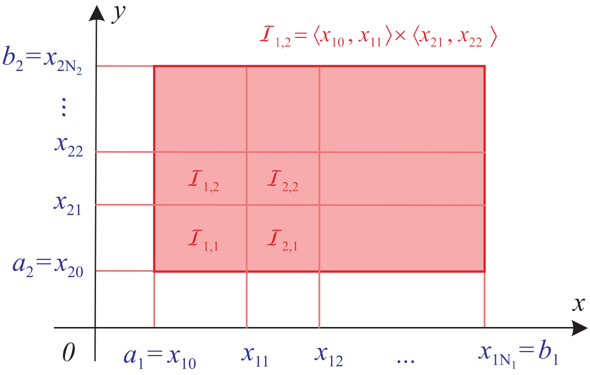


Definice 1. Nechť je $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$ interval definovaný v (3.1). Každou množinu bodů

$$\{x_{ij}\,,\ i = 1,\,2,\,\ldots,\,n,\ j = 0,\,1,\,2\,\ldots,\,N_i \in \mathbb{N}\}\,,$$

kde $$x_{i0} = a_i \le x_{i1} \le x_{i2} \le \cdots \le x_{iN_i} = b_i\,,$$

nazýváme **dělení intervalu** $\mathcal{I}$. Dělení intervalu, tj. výše uvedenou množinu bodů, budeme značit $\mathcal{D}$. Množinu všech dělení intervalu $\mathcal{I}$ budeme značit $\mathfrak{D}$.



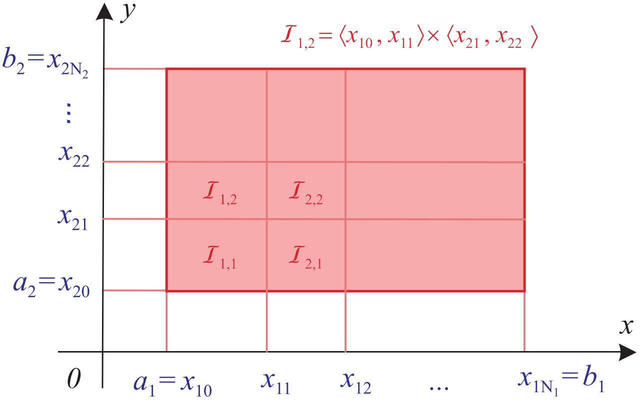
Pro každé dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\mathcal{I}$ označme $\mathcal{I}_{j_1,j_2,\dots,j_n}$, $1 \le j_k \le N_k$, interval

$$\mathcal{I}_{j_1,j_2,\dots,j_n} = \langle x_{j_1-1}, x_{j_1} \rangle \times \langle x_{j_2-1}, x_{j_2} \rangle \times \cdots \times \langle x_{j_n-1}, x_{j_n} \rangle \tag{3.2}$$

a

$$d_{j_1,j_2,\dots,j_n} = (x_{j_1} - x_{j_1-1})(x_{j_2} - x_{j_2-1})\dots(x_{j_n} - x_{j_n-1}) \tag{3.3}$$

obsah n-dimenzionálního intervalu $\mathcal{I}_{j_1,j_2,\dots,j_n}$.



Nechť je $f(x)$ reálná funkce omezená na intervalu $\mathcal{I}$. Pro každé dělení $\mathcal{D}$ označme

$$m_{j_1,j_2,\dots,j_n} = \inf_{x\in\mathcal{I}_{j_1,\dots,j_n}} \big(f(x)\big) \tag{3.4}$$

$$M_{j_1,j_2,\dots,j_n} = \sup_{x\in\mathcal{I}_{j_1,\dots,j_n}} \big(f(x)\big) \tag{3.5}$$

a definujme

$$s(f,\mathcal{D}) = \sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{j_2=1}^{N_2}\cdots\sum_{j_n=1}^{N_n} m_{j_1,j_2,\dots,j_n} d_{j_1,j_2,\dots,j_n} \tag{3.6}$$

$$S(f,\mathcal{D}) = \sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{j_2=1}^{N_2}\cdots\sum_{j_n=1}^{N_n} M_{j_1,j_2,\dots,j_n} d_{j_1,j_2,\dots,j_n}\,. \tag{3.7}$$

Čísla $s(f,\mathcal{D})$, resp. $S(f,\mathcal{D})$ se nazývá **dolní**, resp. **horní integrální součet funkce $f(x)$ příslušný k dělení $\mathcal{D}$**. Protože je funkce $f(x)$ omezená na $\mathcal{I}$, existují reálná čísla $m = \inf\limits_{x\in\mathcal{I}} f(x)$ a $M = \sup\limits_{x\in\mathcal{I}} f(x)$. Ze zřejmého vztahu $m \le m_{j_1,\dots,j_n} \le M_{j_1,\dots,j_n} \le M$ plyne, že pro každé dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\mathcal{I}$ platí nerovnost

$$m d_{\mathcal{I}} \le s(f,\mathcal{D}) \le S(f,\mathcal{D}) \le M d_{\mathcal{I}}\,, \tag{3.8}$$

kde $d_{\mathcal{I}}$ je obsah intervalu $\mathcal{I}$.

Definice 2. Nechť je $\mathcal{I}$ je interval (3.1) a $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ jeho dvě dělení. Je-li každý bod dělení $\mathcal{D}_1$ bodem dělení $\mathcal{D}_2$, nazveme dělení $\mathcal{D}_2$ **zjemněním** dělení $\mathcal{D}_1$.

Poznámka: Z definice 2 plyne, že když je dělení $\mathcal{D}_2$ zjemněním dělení $\mathcal{D}_1$, obsahuje $\mathcal{D}_2$ všechny body dělení $\mathcal{D}_1$ a třeba i některé další dělící body. Tedy každý interval $\mathcal{I}_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ dělení $\mathcal{D}_1$ je sjednocením konečného počtu intervalů $\mathcal{J}_\alpha$ dělení $\mathcal{D}_2$.

Tvrzení 1. Je-li dělení $\mathcal{D}_2$ intervalu $\mathcal{I}$ zjemněním dělení $\mathcal{D}_1$ intervalu $\mathcal{I}$, je

$$s\big(f,\mathcal{D}_1\big) \le s\big(f,\mathcal{D}_2\big) \le S\big(f,\mathcal{D}_2\big) \le S\big(f,\mathcal{D}_1\big)\,. \tag{3.9}$$

Tvrzení 2. Jsou-li $\mathcal{D}_1$ a $\mathcal{D}_2$ dvě dělení intervalu $\mathcal{I}$, pak platí:

$$s\big(f,\mathcal{D}_1\big) \le S\big(f,\mathcal{D}_2\big)\,. \tag{3.10}$$

Ze vztahu (3.8) plyne, že existují konečná reálná čísla $s(f), S(f)$:

$$s(f) = \sup_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} s(f, \mathcal{D}) \leq \inf_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} S(f, D) = S(f)\,. \tag{3.11}$$

Definice 3. Čísla $s(f)$, resp. $S(f)$ ze vztahu (3.11) nazýváme **dolní**, resp. **horní Riemannův integrál funkce** $f(x)$ **přes interval** $\mathcal{I}$.

Jestliže v (3.11) platí rovnost $s(f) = S(f)$, nazýváme toto číslo **(Riemannův) integrál funkce** $f(x)$ **přes interval** $\mathcal{I}$ a říkáme, že funkce $f(x)$ je **integrovatelná** na intervalu $\mathcal{I}$. Pro tento integrál používáme označení

$$\int_{\mathcal{I}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_{\mathcal{I}} f(x)\, \mathrm{d}V\,. \tag{3.12}$$

Definice 4. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená množina a $\chi_M(x)$ je tzv. **charakteristická funkce** množiny M, která je definována předpisem

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in M \\ 0 & \text{pro } x \notin M \end{cases} \tag{3.13}$$

Protože je M omezená, existuje interval $\mathcal{I} \in \mathbb{R}^n$ takový, že $M \subset \mathcal{I}$. Jestliže existuje Riemannův integrál

$$d(M) = \int_{\mathcal{I}} \chi_M(x)\,\mathrm{d}V\,,$$

říkáme, že množina M je **(Riemannovsky) měřitelná** a číslo $d(M)$ se nazýváme **mírou (obsahem) množiny** M.

Poznámka. Snadno se lze přesvědčit, že nezáleží na volbě intervalu $\mathcal{I} \subset M$.

Definice 5. Nechť je $M \subset \mathbb{R}^n$ je Riemannovsky měřitelná množina a $f(x)$ funkce omezená na množině M. Nechť je $\mathcal{I}$ interval v $\mathbb{R}^n$ takový, že $M \subset \mathcal{I}$. Definujme funkci

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in M \\ 0 & \text{pro } x \in \mathcal{I} \setminus M \end{cases}$$

Je-li funkce $\widehat{f}(x)$ integrovatelná na intervalu $\mathcal{I}$, říkáme, že funkce $f(x)$ je **integrovatelná na množině** M a píšeme

$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}V = \int_M f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \int_{\mathcal{I}} \widehat{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n\,. \quad (3.14)$$

Množinu všech funkcí, které mají Riemannův integrál přes množinu M budeme značit $\mathfrak{R}(M)$.

Poznámka. Opět se lze snadno přesvědčit, že nezáleží na volbě intervalu $M \subset \mathcal{I}$.

Věta 1. Nechť jsou funkce f, f_1, $f_2 \in \mathfrak{R}(M)$ a $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Pak jsou také funkce $cf \in \mathfrak{R}(M)$ a $f_1 + f_2 \in \mathfrak{R}(M)$ a platí

$$\int_M cF(x)\,\mathrm{d}V = c\int_M f(x)\,\mathrm{d}V\,, \tag{3.15}$$

$$\int_M \big(f_1(x) + f_2(x)\big)\,\mathrm{d}V = \int_M f_1(x)\,\mathrm{d}V + \int_M f_2(x)\,\mathrm{d}V\,. \tag{3.16}$$

Důsledek. *Jsou-li funkce* $f_k \in \mathfrak{R}(M)$, $c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$, *pak je* $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_r f_r(x) \in \mathfrak{R}(M)$ *a platí:*

$$\int_M (c_1 f_1(x) + \cdots + c_r f_r(x)) \, \mathrm{d}V =$$

$$= c_1 \int_M f_1(x) \, \mathrm{d}V + \cdots + c_r \int_M f_r(x) \, \mathrm{d}V \,. \tag{3.17}$$

Velmi důležitou roli v teorii integrálu hrají tzv. množiny nulové míry.

Definice 6. Jestliže je $M \subset \mathbb{R}^n$ měřitelná množina taková, že

$$d(M) = \int_M \chi_M(x) \, \mathrm{d}V = 0 \,,$$

nazýváme množinu M **množinou míry nula** nebo **množinou nulové míry**.

Definice 7. Jestliže nějaká vlastnost $V(x)$ platí pro všechna $x \in M$ mimo bodů z množiny $N \subset M$ a množina N má míru nula, budeme říkat, že vlastnost $V(x)$ platí **skoro všude** na množině M.

Věta 2. Nechť je $f(x) = 0$ skoro všude na M. Pak je

$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}V = 0$$

Věta 3.

Nechť je M měřitelná množina taková, že její hranice ∂M má míru nula. Pak každá funkce, která je na M spojitá a omezená, je na množině M integrovatelná.

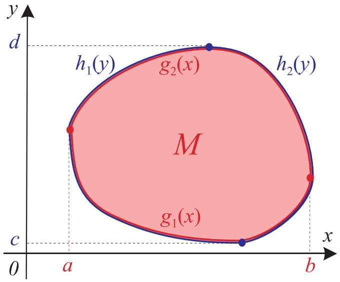
3.4 Speciální případy

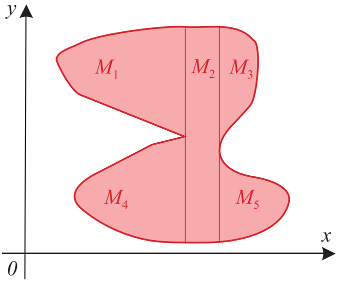
3.4.1 Dvojný integrál – Riemannův integrál v $\mathbb{R}^2$

Riemannův integrál v $\mathbb{R}^2$ se nazývá rovněž **dvojný integrál** a značí se obvykle

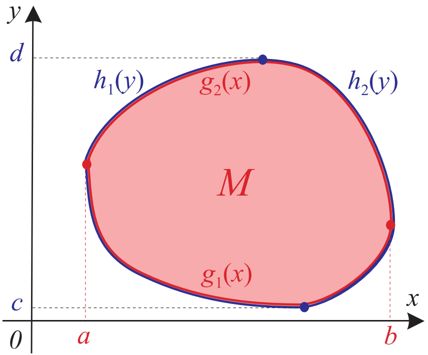
$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}V = \iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

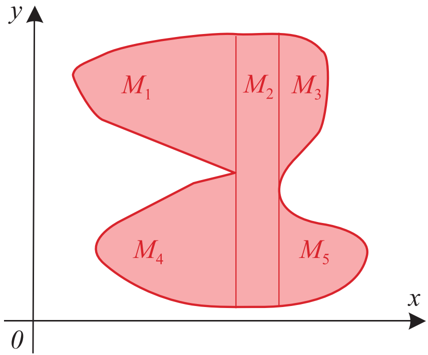
Při studiu dvojných integrálů budeme zpravidla pro jednoduchost předpokládat, že množina M je tzv. **přípustná oblast**, tj. omezená množina, jejíž hranici tvoří konečně mnoho prostých křivek.





Pro ještě větší jednoduchost a názornost budeme předpokládat, že hranici přípustné oblasti lze popsat jako graf dvou funkcí, $g_1(x)$, $g_2(x)$, resp. $h_1(y), h_2(y)$.



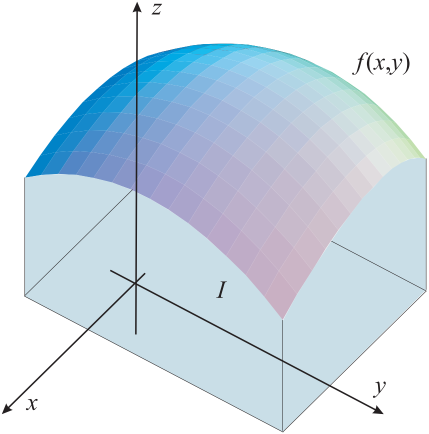


Není-li možné hranici takto popsat, rozdělíme oblast tak, jak to znázorňuje obr. vpravo.

Geometrický význam dvojného integrálu

Uvažujme funkci f a interval $\mathcal{I}$, nechť je $f \geq 0$ na $\mathcal{I}$. Existuje-li Riemannův integrál $\int_{\mathcal{I}} f \, \mathrm{d}V$, lze se na jeho hodnotu dívat jako na **objem tělesa V ohraničeného grafem dané funkce:**

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in \mathcal{I}, \ 0 \leq z \leq f(x, y)\} .$$



3.5 Fubiniova věta

Zaveďme následující označení:

$$z = (x, y) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{r+s} = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s\,,\ x \in \mathbb{R}^r\,,\ y \in \mathbb{R}^s\,,$$

tj. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_r),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_s),\ r + s = n,$

$$z = (x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_s).$$

Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$, budeme psát

$$\begin{aligned} M_x &= \{y \in \mathbb{R}^s;\ (x, y) \in M\}\,, & M_y &= \{x \in \mathbb{R}^r;\ (x, y) \in M\}\,. \\ M^x &= \{x \in \mathbb{R}^r;\ M_x \neq \emptyset\}\,, & M^y &= \{y \in \mathbb{R}^s;\ M_y \neq \emptyset\}\,. \end{aligned}$$

Je-li $f(z) = f(x, y)$ funkce definovaná na množině $M \subset \mathbb{R}^n$, definujme funkce $f^x : M_x \to \mathbb{R}$ a $f^y : M_y \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f^x(y) = f^y(x) = f(x, y)\,.$$

Jestliže je $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$ interval, platí rovnost

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_y \times \mathcal{I}_x = \mathcal{I}^x \times \mathcal{I}^y = \mathcal{I}^x \times \mathcal{I}_x = \mathcal{I}_y \times \mathcal{I}^y \,.$$

Je zřejmé, že pro objem těchto intervalů platí rovnosti

$$V(\mathcal{I}) = V(\mathcal{I}^x) \cdot V(\mathcal{I}_x) = V(\mathcal{I}^y) \cdot V(\mathcal{I}_y) \,.$$

Pomocí Riemannova integrálu lze tuto rovnost zapsat jako

$$\int_{\mathcal{I}} \chi_{\mathcal{I}}(z) \, \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{I}^x} \left(\int_{\mathcal{I}_x} \chi_x(y) \, \mathrm{d}V_y \right) \mathrm{d}V_x = \\ = \int_{\mathcal{I}^y} \left(\int_{\mathcal{I}_y} \chi_y(x) \, \mathrm{d}V_x \right) \mathrm{d}V_y \,, \quad (3.18)$$

kde symbol $\mathrm{d}V_x$, resp. $\mathrm{d}V_y$, znamená, že integrujeme přes proměnnou x, resp. y.
Vztah (3.18) zobecňuje následující věta.

Věta 4 **(Fubini)** *Nechť je funkce $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ definovaná na $\boldsymbol{M} \subset \mathbb{R}^n$. Nechť existuje integrál*

$$\int_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{V} \tag{3.19}$$

a pro skoro všechna $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^{\boldsymbol{x}}$, resp. $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^{\boldsymbol{y}}$, existují integrály

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f}^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{y}} = \int_{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f}^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}_1 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{y}_s\,, \tag{3.20}$$

resp.

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}) = \int_{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{y}}} \boldsymbol{f}^{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{x}} = \int_{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{y}}} \boldsymbol{f}^{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{x}_r\,. \tag{3.21}$$

Jestliže rozšíříme funkci $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ na množinu $\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{x}}$, resp. $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y})$ na množinu $\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{y}}$, v bodech, kde není definována, nulou, pak platí:

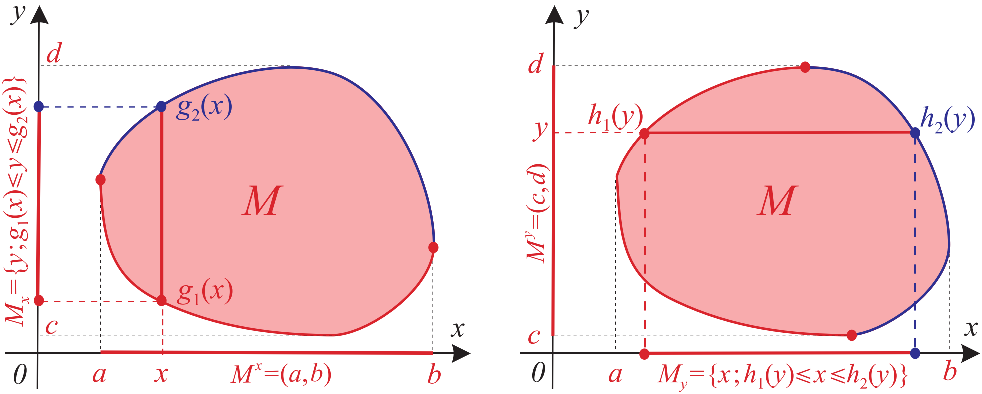
$$\int_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{V} = \int_{\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{x}} = \int_{\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{y}}} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{3.22}$$

tj.

$$\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}V = \int_{M^x} \left(\int_{M_x} f^x(y)\,\mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_s \right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_r = \\ = \int_{M^y} \left(\int_{M_y} f^y(x)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_r \right) \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_s\,.$$

Podle této věty lze Riemannův integrál v $\mathbb{R}^n$ najít pomocí výpočtu dvou Riemannových integrálů v prostorech menší dimenze. Postupnou aplikací této věty je pak možné najít integrál v $\mathbb{R}^n$, pokud existuje, pomocí výpočtu n jednorozměrných Riemannových integrálů.

Speciální případ: $\mathbb{R}^2$



Při hledání Riemannova integrálu v $\mathbb{R}^2$ budeme zpravidla používat Fubiniovu větu v následujícím znění:

Věta (Fubiniova pro $\mathbb{R}^2$). *Nechť M je omezená množina, jejíž hranici lze popsat pomocí dvojic funkcí $g_1(x), g_2(x)$ a $h_1(y), h_2(y)$ - viz obr. výše. Nechť existuje dvojný integrál*

$$\iint f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Existuje-li jeden z integrálů

$$F(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy,\ x \in \langle a,b\rangle\,,$$

$$G(y) = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x,\ y \in \langle c,d\rangle,$$

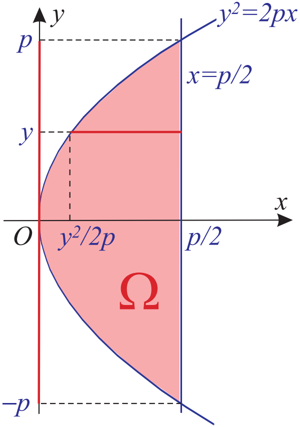
pak existuje i druhý a platí:

$$\iint f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right)dx =$$

$$= \int_c^d G(y)dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\right)dy\,.$$

☛ ***Příklad***. Nalezněte integrál $\iint_\Omega xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde Ω je oblast ohraničená parabolou $y^2 = 2px$ a přímkou $x = p/2$.

Řešení.



$$\iint_\Omega xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-p}^{p}\left(\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} xy^2\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-p}^{p}\left(y^2\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{-p}^{p}\left(y^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-p}^{p}\left(y^2\left(\frac{p^2}{8} - \frac{y^4}{8p^2}\right)\right)\mathrm{d}y =$$

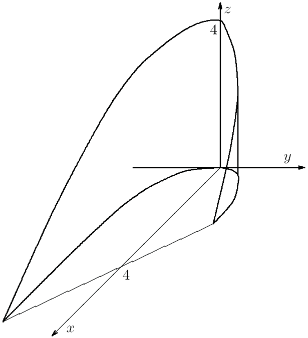
$$= \frac{p^2}{8}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-p}^{p} - \frac{1}{8p^2}\left[\frac{y^7}{7}\right]_{-p}^{p} = \frac{p^5}{21}$$

Speciální případ: $\mathbb{R}^3$

☛ ***Příklad***. Nalezněte objem tělesa M popsaného nerovnostmi

$$x + 2y + z \leq 4, \;\; 2y^2 \leq x, \;\; z \geq 0.$$

Řešení. Těleso M je část parabolického válce:



Integrand je spojitý a omezený na kompaktním integračním oboru M, takže všechny integrály uvedené v předpokladech Fubiniho věty existují. Do rovnice roviny $x+2y+z=4$ dosadíme $z=0$ a $x=y^2$. Dostaneme kvadratickou rovnici $y^2-y-2=0$ pro hodnoty y_0 a y_1.

Pro integraci můžeme tedy volit $y_0=-2$, $y_1=1$, $a(y)=2y^2$, $b(y)=4-2y$, $c(x,y)=0$, $d(x,y)=4-x-2y$. Pak

$$\iiint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-2}^{1}\int_{2y^2}^{4-2y}\int_{0}^{4-x-2y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{81}{5}.$$