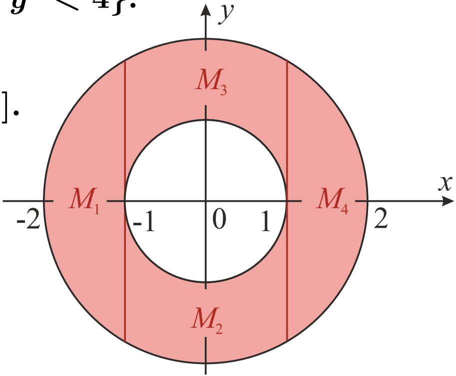
KAPITOLA 4

INTEGRACE POMOCÍ SUBSTITUCE

☛ ***Příklad 1.***

Představme si, že máme vypočítat integrál $I = \iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.



M je mezikruží mezi kružnicemi o poloměru 1 a 2 a se středem $[0,0]$. Pokud bychom použili Fubiniovu větu, tj. množinu M „rozřezávali“ vodorovně a svisle, museli bychom ji rozdělit na čtyři části a integrál počítat jako součet

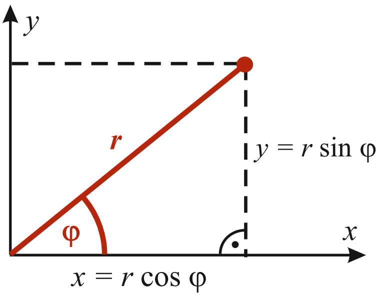
$$I = \int_{-2}^{-1} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y +$$

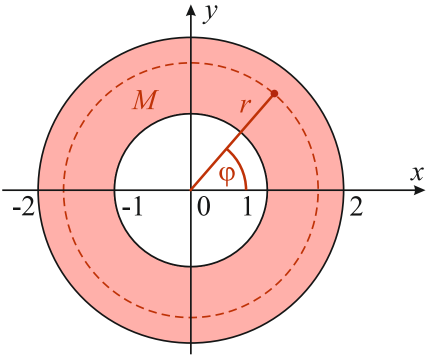
$$+ \int_{-1}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{1}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y +$$

(popř. bychom spočítali integrál přes větší kruh a odečetli integrál přes menší kruh)

Takový výpočet nevypadá moc lákavě - ani pro jednoduchou funkci f.

Pokud bychom však použili polární souřadnice, stačilo by uvažovat $r \in (1, 2)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$:

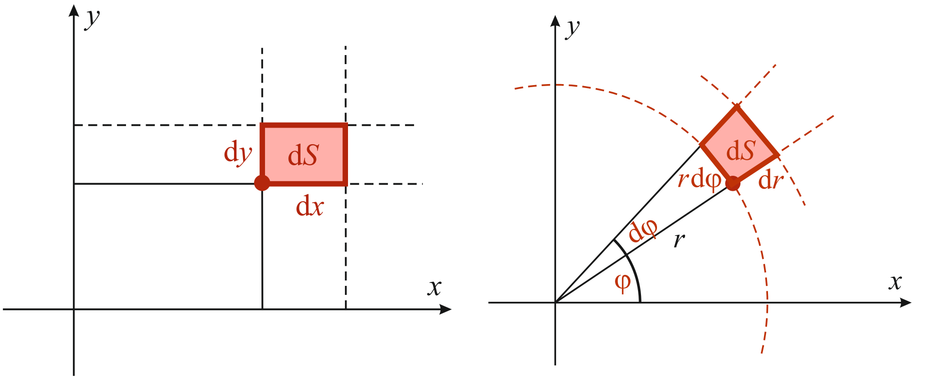




Oblast M tedy nebudeme „rozřezávat“ vodorovně a svisle, ale po paprscích vycházejících z počátku a po soustředných kružnicích se středem v počátku, což vypadá pro mezikruží daleko přirozeněji.

Musíme si však rozmyslet, jak takovou substituci správně provést.

Zjednodušeně řečeno, v kartézských souřadnicích jsme $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ považovali za obsah obdélníčku o stranách $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$; můžeme také hovořit o **elementu obsahu** $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

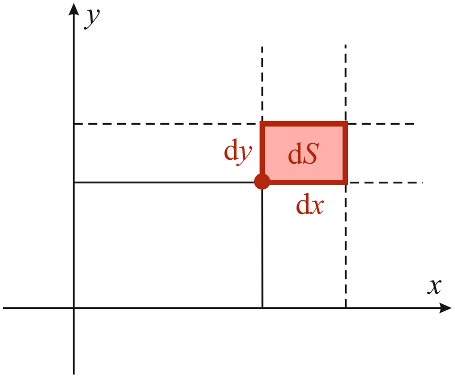


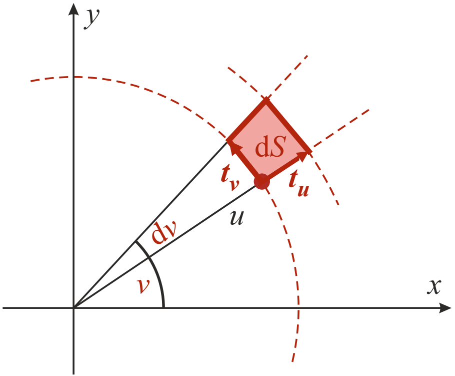
Přejdeme-li k polárním souřadnicím, tak $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$ nevyjadřuje element obsahu – ten má nyní strany $\mathrm{d}r$ a $r\,\mathrm{d}\varphi$, a tedy obsah $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$. Hledaný integrál proto bude mít tvar

$$I = \iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_1^2 f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.$$

Důkaz věty o substituci zde uvádět nebudeme, podívejme se jen intuitivně, jak funguje.

Použijeme-li kartézské souřadnice, pak v integrálu $\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ vyjadřuje $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ obsah obdélníčku o stranách $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ neboli **element obsahu $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.** Změníme-li souřadnice na nějaké jiné, například u, v, kde $x = h_1(u, v)$, $y = h_2(u, v)$, pak musíme přepočítat i element obsahu.





Ten si nyní můžeme představit v rovině xy jako rovnoběžník daný vektory $\boldsymbol{t}_u$, $\boldsymbol{t}_v$, které udávají změnu kartézských souřadnic odpovídající změně proměnných u, resp. v, o hodnotu $\mathrm{d}u$, resp. $\mathrm{d}v$:

$$\boldsymbol{t}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\,\mathrm{d}u, \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}u\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right)\,\mathrm{d}u$$

$$\boldsymbol{t}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\,\mathrm{d}v, \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}\right)\,\mathrm{d}v$$

Obsah tohoto rovnoběžníku můžeme spočítat pomocí determinantu, jehož řádky tvoří vektory $\boldsymbol{t}_u, \boldsymbol{t}_v$:

$$\mathrm{d}S = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}\right|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = |J_h|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_N f(h_1(u,v), h_2(u,v))|J_h|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Tento determinant se nazývá **Jakobián zobrazení h.**

V $\mathbb{R}^2$ jsme tedy element obsahu v souřadnicích u, v, kde

$$(x, y) = h(u, v) = (h_1(u, v), h_2(u, v))$$

vyjádřili ve tvaru

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = |J_h|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

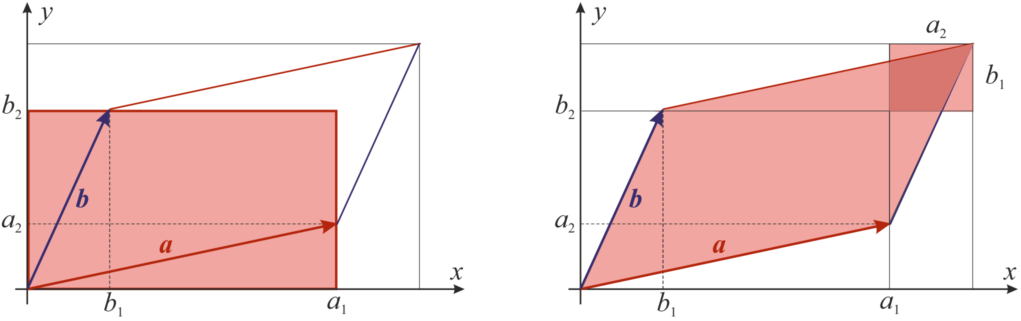
kde J_h je Jakobián zobrazení h, tj. determinant

$$J_h = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Při substituci budeme požadovat, aby byl Jakobián **nenulový** (jak víme z lineární algebry, nulový determinant by znamenal, že vektory t_u, t_v jsou lineárně závislé, tj. jeden násobkem druhého, obsah příslušného rovnoběžníku by byl nulový, a tutíž i integrál by vyšel nulový bez ohledu na to, jakou funkci integrujeme a jakou oblast integrace uvažujeme).

Poznámka.
Výpočet obsahu rovnoběžníka se stranami $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ pomocí determinantu:

$$\boldsymbol{S} = \left| \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} \end{pmatrix} \right| = \boldsymbol{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$



Podobně bychom mohli vyjádřit element objemu $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ v $\mathbb{R}^3$ v souřadnicích u, v, w, kde

$$(x, y, z) = h(u, v, w) = (h_1(u, v, w), h_2(u, v, w), h_3(u, v, w)),$$

jako

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = |J_h|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w,$$

kde J_h je zobrazení h, tj. determinant

$$J_h = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial w} & \dfrac{\partial y}{\partial w} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Od zobrazení h budeme vždy požadovat, aby bylo **prosté a regulární** (všechny parciální derivace uvedené v Jakobiánu jsou spojité na dané otevřené množině X a $J_h \neq 0$).

Věta 1 (o substituci). Nechť h je prosté regulární zobrazení otevřené množiny $U \subset \mathbb{R}^n$ na množinu $X \subset \mathbb{R}^n$. Nechť je $M \subset U$, $f(y)$ funkce definovaná na $h(M)$ a J_h Jakobián zobrazení h, tj.

$$J_h = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_2} \\ \ldots . & & & \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_n} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_n} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

Pak platí

$$\int_{h(M)} f(x)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_M f\big(h(u)\big)\big|J_h\big|\,\mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_n\,, \tag{4.1}$$

pokud oba integrály v (4.1) existují.

Jak je vidět z této věty, substituce nemění pouze integrovanou funkci, ale také podstatně oblast M, přes kterou integrujeme. Proto se na rozdíl od jednorozměrných integrálů pomocí substituce nesnažíme pouze zjednodušit integrovanou funkci, ale také integrační oblast. To je při výpočtu vícerozměrných integrálů velmi podstatné. Například jestliže se nám podaří transformovat oblast M na interval, stačí podle Fubiniovy věty najít n jednorozměrných integrálů, i když většinou poměrně složitých.

Poznámka. Jakobián inverzního zobrazení:
Někdy je jednodušší vyjádřit naopak nové souřadnice u_i pomocí původních souřadnic x_i, neboli pracovat s inverzním zobrazením k zobrazení h. Není nutné řešit soustavu rovnic a vyjadřovat x_i.

Pro Jakobiány zobrazení h a inverzního zobrazení h^{-1} platí:

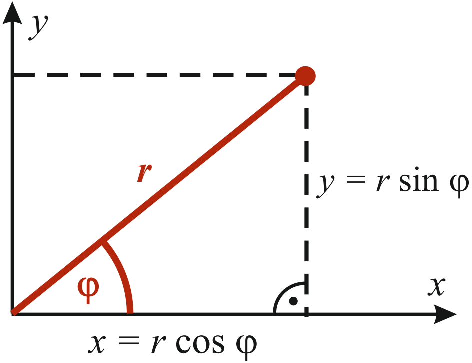
$$J_{h^{-1}} = \frac{1}{J_h}$$

Polární souřadnice

Polární souřadnice jsou definovány vztahy

$$h: \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi\,, \tag{4.2}$$

$$r \geq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi) \quad \text{[nebo jiný interval délky } 2\pi\text{]}$$



$$x^2+y^2 = r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Rovnice kružnice

$$x^2 + y^2 = R^2$$

v polárních souřadnicích:

$$r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = R^2$$

$$r^2 = R^2, \quad \text{tj. } r = R, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi)$$

Kruh $x^2 + y^2 \leq R^2$ v polárních souřadnicích:

$$r \in \langle 0, R\rangle, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi)$$

Jakobián:

$$J_h = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r > 0$$

Využití polárních souřadnic: hranice integrační oblasti obsahuje části kružnice se středem v počátku.

☛ ***Příklad 2.*** Nalezněte obsah kruhu $K: \; x^2 + y^2 \leq R^2$

Řešení. Použijeme polární souřadnice $x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi$

Meze pro K v polárních souřadnicích :

$r^2 \leq R^2$, tj. $0 \leq r \leq R$

Pro φ nevznikla žádná podmínka, proto $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$J_h = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

Proto

$$S = \iint_K \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^R r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{R^2}{2}\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \left[\varphi\cdot\frac{R^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi\frac{R^2}{2} = \pi R^2$$

Jak se dalo očekávat, vyšel nám dobře známý vztah pro obsah kruhu o poloměru R.

☛ ***Příklad 3.*** Nalezněte obsah mezikruží M daného nerovnostmi: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

Řešení. Použijeme polární souřadnice $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$

Meze pro M v polárních souřadnicích :

$1 \leq r^2 \leq 4$, tj. $1 \leq r \leq 2$

Pro φ nevznikla žádná podmínka, proto $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$J_h = r$

$$S = \iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_1^2 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$= \left[\frac{3}{2}\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\cdot 2\pi = 3\pi$$

Výsledek opět vypadá správně, tedy jako rozdíl obsahů kruhů o poloměru 2 a 1, tj. $4\pi - \pi = 3\pi$. Ne vždy jsme ale schopni integrál uhodnout a výpočet bude nezbytný.

☛ ***Příklad 4.*** Nalezněte hodnotu integrálu

$$\iint_N (2x^2 + 3y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad \text{kde} \quad N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 9\}.$$

Řešení. Integrand je spojitá funkce na omezeném a uzavřeném integračním oboru, a tedy integrál existuje. N je kruh $x^2 + y^2 \le 9$, takže použijeme polární souřadnice.

Meze pro N v polárních souřadnicích:

$$r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2 \le 9$$

Protože r je vždy nezáporné, musí být $0 \le r \le 3$. Pro φ nemáme žádné omezení, proto $0 \le \varphi < 2\pi$. Jakobián polárních souřadnic jsme již počítali a víme, že je r. Proto

$$\iint_N (2x^2 + 3y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \left(2r^2\cos^2\varphi + 3r\sin\varphi\right) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 \left(2r^3\cos^2\varphi + 3r^2\sin\varphi\right)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \cdots = \frac{81}{2}\pi$$

☛ ***Příklad 5.*** Nalezněte hodnotu integrálu $\displaystyle\iint_N (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde oblast $N\subset\mathbb{R}^2$ je dána nerovnostmi

$$1/2 \le x^2+y^2 \le 1, \qquad x<y, \qquad -x<y\,.$$

Řešení. Integrand je spojitá nezáporná funkce na omezeném integračním oboru, takže integrál existuje. N je část mezikruží, použijeme proto opět polární souřadnice:

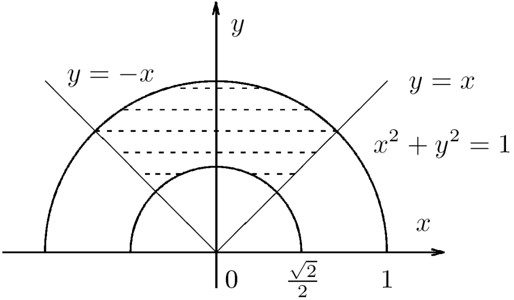
$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

Meze pro N:

$$\frac{1}{2} \le r^2 \le 1, \text{ tj. } \frac{1}{\sqrt{2}} \le r^2 \le 1$$

$$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}$$

$$J_h = r$$



$$\iint_N (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} r^2 r\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \cdots = \frac{3\pi}{32}$$

☛ ***Příklad 6.*** Vypočítejte obsah oblasti $M \subset \mathbb{R}^2$ dané nerovnostmi

$$\left(x^2+y^2\right)^2 \le 2\left(x^2-y^2\right), \qquad x^2+y^2 \ge 1\,.$$

Řešení. V nerovnostech pro M opět figuruje výraz x^2+y^2, o kterém víme, že se zjednoduššÍ při použití polárních souřadnic. Zkusme proto do těchto podmínek dosadit $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ a vyjádřit meze pro M v polárních souřadnicích :

První nerovnost: $\quad r^4 \le 2r^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)$, tj. $r^2 \le 2\cos 2\varphi$.

Druhá nerovnost: $\quad r^2 \ge 1,\quad$ tj. $r \ge 1$.

Celkem pro r : $1 \le r^2 \le 2\cos 2\varphi,\quad$ tj. $1 \le r \le \sqrt{2\cos 2\varphi}$

Z předposlední nerovnosti navíc plyne podmínka: $1 \le 2\cos 2\varphi$, tj. $1/2 \le \cos 2\varphi$ proto musí být $2\varphi \in \langle -\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi\rangle$, tedy $\varphi \in \langle -\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{\pi}{6}+k\pi\rangle$. Hodnoty φ vybíráme vždy z intervalu délky 2π, proto

$$S = \iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\pi/6}^{\pi/6}\int_{1}^{\sqrt{2\cos 2\varphi}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi + \int_{5\pi/6}^{7\pi/6}\int_{1}^{\sqrt{2\cos 2\varphi}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

Zobecněné polární souřadnice

Jsou-li hranicí integračního oboru části elipsy $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, používáme **zobecněné polární souřadnice:**

$$x = ar\cos\varphi\,, \quad y = br\sin\varphi, \tag{4.3}$$

$$r \geq 0\,,\ \varphi \in \langle 0, 2\pi),\ a, b \in \mathbb{R},\ a > 0,\ b > 0$$

Rovnice elipsy v zobecněných polárních souřadnicích: $r = 1$

$$\frac{a^2 r^2 \cos^2\varphi}{a^2} + \frac{b^2 r^2 \sin^2\varphi}{b^2} = 1$$

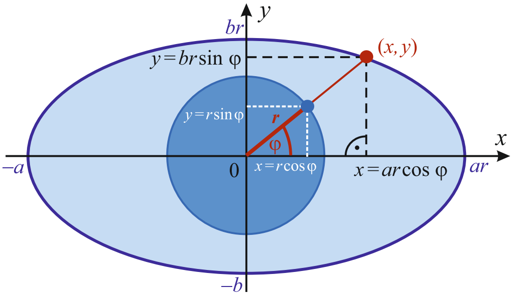
$$r^2 = 1$$

Jakobián:

$$J_h = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}(r,\varphi) = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & b\sin\varphi \\ -ar\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr > 0 \tag{4.4}$$

Geometricky si to můžeme představit takto: jak již víme, bod o souřadnicích $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ leží na kružnici po poloměru r.

Vynásobením čísly a, b tuto kružnici zdeformujeme na elipsu s poloosami ar, br. Elipse s poloosami a, b odpovídá $r = 1$, menší hodnota r odpovídá „zmenšené" elipse se stejným poměrem poloos.



Obsahuje-li hranice integračního oboru části elipsy se středem v bodě $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ a s poloosami $a > 0,\ b > 0$, používáme zobecněné polární souřadnice ve tvaru:

$$x = x_0 + ar\cos\varphi\,, \quad y = y_0 + br\sin\varphi, \tag{4.5}$$

$$r \geq 0\,,\ \varphi \in \langle 0, 2\pi),\ a, b \in \mathbb{R},\ a > 0,\ b > 0$$

☛ ***Příklad 7.*** Nalezněte hodnotu integrálu

$$\iint_N \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{4.6}$$

kde $N = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}.$

Řešení. Použijeme zobecněné polární souřadnice:

$$\iint_N \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{ll} x = ar\cos\varphi, & 0\le r\le 1 \\ y = br\sin\varphi, & 0\le\varphi<2\pi \\ J_h = abr & \end{array} \right| =$$

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{1-r^2}\,abr\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \frac{2ab\pi}{3}.$$

☛ ***Příklad 8.*** Nalezněte souřadnici x_T těžiště homogenní oblasti Ω, která je dána nerovnostmi $4x^2 + 25y^2 \leq 100, \quad x \geq 0$, víte-li, že obsah této oblasti je roven 5π.

Řešení. Již z první podmínky je vidět, že by nám mohly pomoci vhodné zobecněné polární souřadnice – takové, abychom $r^2\cos^2\varphi$ a $r^2\sin^2\varphi$ násobili stejným číslem, které bychom vytkli a získali $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$.

To znamená, že ve výrazu pro x^2 potřebujeme navíc 25 a ve výrazu pro y^2 potřebujeme navíc 4. Zkusme tedy

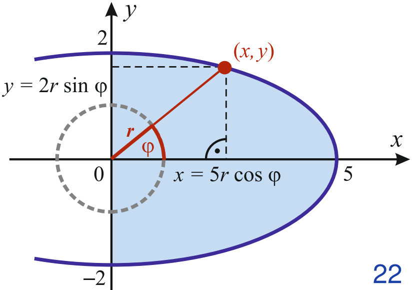
$$x = 5r\cos\varphi, \qquad y = 2r\sin\varphi.$$

Pak $4\cdot 25r^2\cos^2\varphi + 25\cdot 4r^2\sin^2\varphi = 100r^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 100r^2$. Protože r je vždy nezáporné, máme pro Ω podmínku: $0 \leq r \leq 1$. Podle druhé podmínky má být $x \geq 0$, tj. $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Ke stejné substituci můžeme dojít také tak, že hned na začátku první nerovnost vydělíme číslem 100:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} \leq 1,$$

tj. $$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} \leq 1.$$



Pro souřadnici x_T těžiště homogenní oblasti Ω platí:

$$x_T = \frac{\iint_\Omega x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y}{\iint_\Omega \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y} \,.$$

Integrál ve jmenovateli je podle zadání 5π , proto dostáváme:

$$\begin{aligned}
x_T &= \frac{1}{5\pi} \iint_\Omega x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{ll} x = 5r\cos\varphi, & 0 \le r \le 1 \\ y = 2r\sin\varphi, & 0 \le \varphi < 2\pi \\ J_h = 5 \cdot 2 \cdot r & \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{5\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^1 10r \cdot 5r\cos\varphi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \frac{50}{5\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^1 r^2 \cos\varphi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{10}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{10}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \left[\sin\varphi\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{10}{3\pi} \cdot 2 = \frac{20}{3\pi}
\end{aligned}$$

Další souřadnice

☛ ***Příklad 9.*** Nalezněte obsah oblasti $M \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi

$$(x+y)^4 \leq 4xy, \qquad x \geq 0, \qquad y \geq 0\,.$$

Řešení. Vyjádření jedné z proměnných pomocí druhé by nám v tomto případě dělalo velké problémy, proto stojí za to uvažovat o vhodné substituci. V příkladech, kdy jsme používali polární souřadnice, jsme nahrazovali součet x^2+y^2 jediným členem r^2, a to díky vztahu $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1\,.$ V tomto příkladu máme opět problém se součtem, ovšem pouze prvních mocnin. Umíme si však už představit, že kdybychom použili vhodnou substituci, která by vedla k součtu $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi$, mohli bychom podmínku výrazně zjednodušit. Zkusme tedy substituci:

$$x = r\cos^2\varphi, \quad y = r\sin^2\varphi, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2\,.$$

Dosadíme do podmínky pro M :

$$\begin{aligned}
\left(r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi\right)^4 &\leq 4r\cos^2\varphi\sin^2\varphi \\
r^4\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)^4 &\leq 4r^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi \\
r^2 \cdot 1 &\leq 4\cos^2\varphi\sin^2\varphi \\
0 \leq r &\leq 2\cos\varphi\sin\varphi \\
0 \leq r &\leq \sin 2\varphi
\end{aligned}$$

Při odmocňování jsme využili toho, že $\varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$, a tedy $\sin\varphi \geq 0$, $\cos\varphi \geq 0$.

Jakobián:

$$J_h = \begin{vmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi \\ -2r\cos\varphi\sin\varphi & 2r\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = 2r\sin\varphi\cos^3\varphi + 2r\cos\varphi\sin^3\varphi =$$

$$= 2r\sin\varphi\cos\varphi\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 2r\sin\varphi\cos\varphi\cdot 1 = r\sin 2\varphi$$

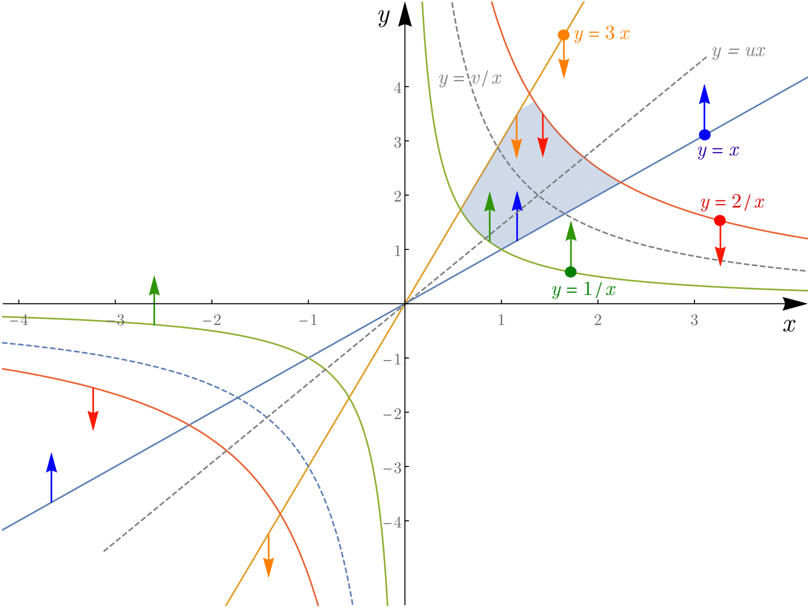
$$S = \iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin 2\varphi} r\sin 2\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{2}\left[r^2\right]_0^{\sin 2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

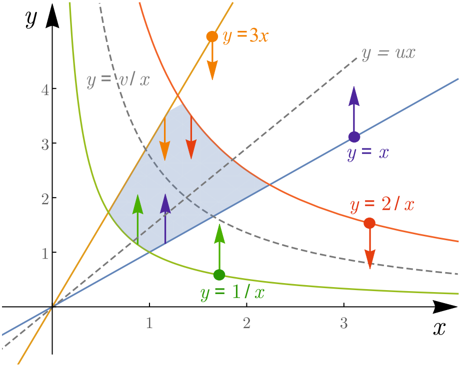
$$= \tfrac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2 2\varphi\right)\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \left| \begin{array}{l} t = \cos 2\varphi \\ \mathrm{d}t = -2\sin 2\varphi \\ 0 \to 1,\ \frac{\pi}{2} \to -1 \end{array} \right| = -\tfrac{1}{4}\int_1^{-1}\left(1-t^2\right)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \tfrac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{4}\,\left[t-\tfrac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{1} = \tfrac{1}{4}\left(\left(1-\tfrac{1}{3}\right)-\left(-1+\tfrac{1}{3}\right)\right) = 1/3$$

☛ ***Příklad 10.*** Nalezněte hodnotu integrálu $\displaystyle\iint_{\Omega} \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je dána nerovnostmi $x \le y \le 3x,\ 1 \le xy \le 5\,.$

Řešení.





Integrál můžeme počítat pomocí Fubiniho věty, ale museli bychom jej rozdělit na tři části a bylo by to trochu zdlouhavé.

Výrazně jednodušší bude použít vhodnou substituci. Povšimněme si, že hranici oblasti Ω, kde $x \le y \le 3x$, $1 \le xy \le 5$, tvoří dvojice „podobných“ křivek.

Body z Ω mají ležet nad přímkou $y = x$ a pod přímkou $y = 3x$; to je totéž, jako kdybychom řekli, že leží na polopřímce $y = ux$, kde $1 \le u \le 3$ a $x \ge 0$.

Dále mají body z oblasti Ω ležet nad hyperbolou $xy = 1$, neboli $y = 1/x$, a pod hyperbolou $xy = 5$, neboli $y = 5/x$. Musí tedy ležet na nějaké hyperbole $xy = v$, neboli $y = v/x$, kde $1 \le v \le 5$ a $x \ge 0$.

Místo toho, abychom danou oblast procházeli po vodorovných a svislých úsečkách (jako je tomu při výpočtu v kartézských souřadnicích), bychom ji mohli procházet po paprscích $y = ux, 1 \le u \le 3$ a po hyperbolách $xy = v, 1 \le v \le 5$.

Kdybychom uvažovali jako nové proměnné právě tyto koeficienty $u = y/x$ a $v = xy$, pak bychom měli úplně jednoduché meze.

Na obrázku si můžeme vytvořit určitou grafickou představu o tom, proč použijeme zrovna takovouto substituci. Ke stejnému závěru ale můžeme i jen **čistě početně**, z pohledu na zadané podmínky:

$1 \le xy \le 5 \ldots$ označíme-li $v = xy$, bude $1 \le v \le 5$

$x \le y \le 3x \ldots$ to, co se nyní mění v číselných mezích, je podíl y/x

Pro $x > 0:\ 1 \le y/x \le 3 \ldots$ označíme-li $u = y/x$, bude $1 \le u \le 3$

Pro $x < 0:\ 1 \ge y/x$ a současně $y/x \ge 3$, což není splněno nikdy; další část oblasti již nepřibude

Uvažujme nové proměnné dané zobrazením

$$h^{-1}: \quad u = \frac{y}{x}, \quad v = xy,$$

kde $\quad 1 \le u \le 3, \quad 1 \le v \le 5.$

Ve větě o substituci i všech dosavadních příkladech byly vždy vyjádřené **původní souřadnice x, y pomocí nových.** Toto zobrazení je tedy **inverzní** k tomu, které bychom potřebovali, proto je označené jako h^{-1}. Nicméně již víme, že pro Jakobiány platí:

$$J_h = \frac{1}{J_{h^{-1}}},$$

nemusíme se tedy trápit s vyjadřováním x, y, ale můžeme rovnou spočítat Jakobián našeho inverzního zobrazení (tj. derivovat funkce dosazené za u, v

podle x, y) a nakonec jen uvažovat jeho převrácenou hodnotu. Po substituci musíme pracovat již jen s novými proměnnými, proto i Jakobián musíme vyjádřit pomocí u, v.

$$J_{h^{-1}} = \begin{vmatrix} -\dfrac{y}{x^2} & y \\ \dfrac{1}{x} & x \end{vmatrix} = -2\frac{y}{x} = -2u \quad \Rightarrow \quad J_h = -\frac{1}{2u}$$

Do integrálu se vždy dosazuje **absolutní hodnota $|J_h|$.**

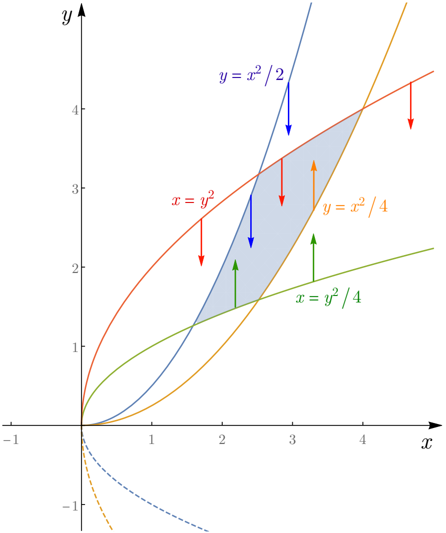
S použitím substituce bude samotný integrál velmi jednoduchý:

$$\iint_\Omega \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^5 \int_1^3 u \cdot |J_h|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_1^5 \int_1^3 u \cdot \frac{1}{2u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \tfrac{1}{2} \int_1^5 \int_1^3 \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,[u]_1^3\,[v]_1^5 = \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$$

☛ ***Příklad 11.*** Nalezněte obsah oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi

$$x \le y^2 \le 4x, \qquad 2y \le x^2 \le 4y\,.$$



Zadaná oblast je ohraničená dvěma dvojicemi parabol v prvním kvadrantu.

Vydělme první podmínku x a druhou y :

$$1 \le \frac{y^2}{x} \le 4\,, \qquad 2 \le \frac{x^2}{y} \le 4\,.$$

Označme:

$$u = \frac{y^2}{x} \quad \dots \quad 1 \le u \le 4$$

$$v = \frac{x^2}{y} \quad \dots \quad 2 \le v \le 4$$

$$J_{h^{-1}} = \begin{vmatrix} -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2x}{y} \\ \dfrac{2y}{x} & -\dfrac{x^2}{y^2} \end{vmatrix} = 1-4 = -3 = \frac{1}{J_h}$$

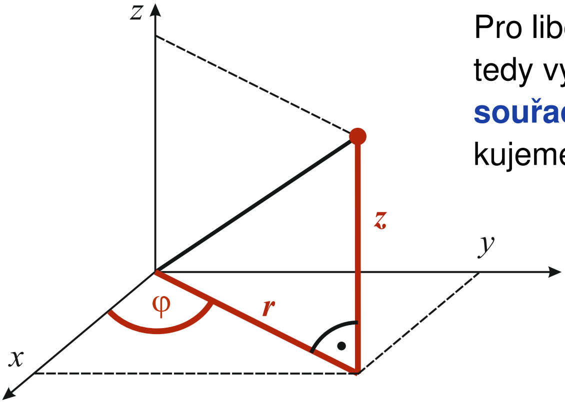
$$S = \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_2^4\int_1^4 |J_h|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_2^4\int_1^4 \left|\frac{1}{-3}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 2 = 2$$

Substituce v $\mathbb{R}^3$

Válcové souřadnice

$$h : x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z \qquad (4.7)$$

$$r \geq 0,\ \varphi \in \langle 0, 2\pi),\ z \in \mathbb{R}$$



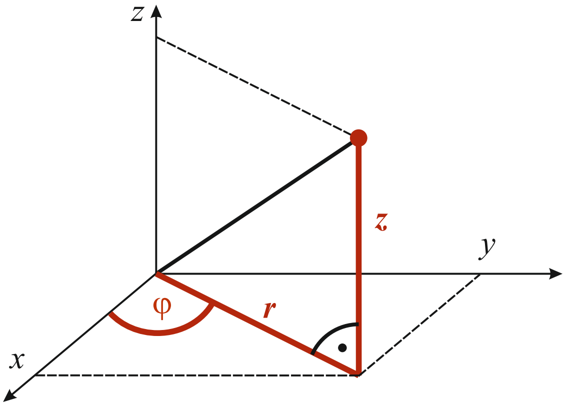
Pro libovolný bod $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tedy vyjádříme x, y **v polárních souřadnicích** a k tomu specifikujeme výšku z

Rovnice válce v kartézských souřadnicích (osou válce je osa z):

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

Rovnice válce ve válcových souřadnicích:

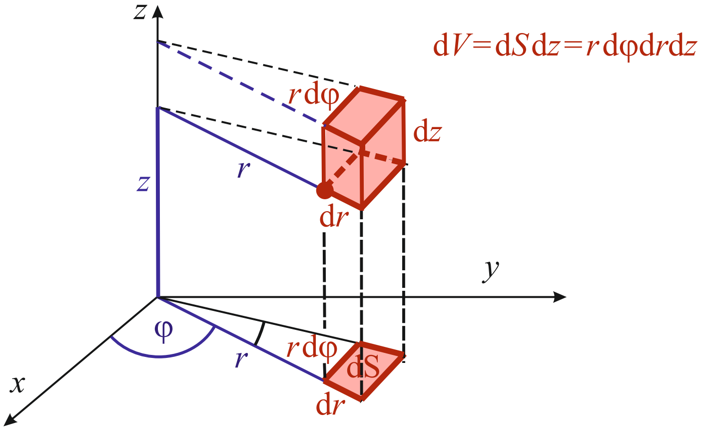
$$r^2 \leq R^2, \quad \text{tj.} \quad r \in \langle 0, R \rangle, \;\; \varphi \in \langle 0, 2\pi)$$



Jakobián:

$$J_h = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r > 0. \qquad (4.8)$$

Vyjádříme-li determinant pomocí rozvoje podle posledního řádku nebo sloupce, ihned uvidíme, že vychází stejně jako pro polární souřadnice. Totéž si můžeme představit i graficky:



☛ ***Příklad 12.*** Vypočítejte objem tělesa $T \in \mathbb{R}^3$, které je dané nerovnostmi:

$$2z \geq x^2 + y^2 + 2, \qquad x^2 + y^2 + z \leq 4\,.$$

Řešení. V nerovnostech se objevuje výraz $x^2 + y^2$, který se zjednoduší pomocí polárních souřadnic, a potom samotná souřadnice z. Nabízí se tedy subsituce, kde x, y vyjádříme v polárních souřadnicích a z ponecháme, tedy použijeme **válcové souřadnice:**

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = z\,.$$

Podmínky pro T ve válcových souřadnicích:

$$2z \geq r^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + 2 \quad \text{a současně} \quad r^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + z \leq 4$$

$$2z \geq r^2 + 2 \qquad\qquad r^2 + z \leq 4$$

$$z \geq \tfrac{1}{2}\left(r^2 + 2\right) \qquad\qquad z \leq 4 - r^2$$

tedy celkem: $\frac{1}{2}(r^2 + 2) \leq z \leq 4 - r^2$

Z poslední podmínky navíc plyne:

$$\tfrac{1}{2}(r^2+2) \leq 4-r^2 \quad \Leftrightarrow \quad r^2+2 \leq 8-2r^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3r^2 \leq 6 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 \leq 2\,.$$

Protože r je vždy nezáporné, dostáváme $0 \leq r \leq \sqrt{2}$

Máme tedy meze: $\frac{1}{2}(r^2+2) \leq z \leq 4-r^2, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{2}$

Pro φ nevzniklo žádné omezení, proto $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Jakobián: $J_h = r$

Objem tělesa tedy můžeme vyjádřit jako integrál:

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{\frac{r^2+2}{2}}^{4-r^2} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r\left[z\right]_{\frac{r^2+2}{2}}^{4-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r\left(4-r^2-\frac{r^2+2}{2}\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\left(6r-3r^3\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{6r^2}{2}-\frac{3r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = 3\pi
\end{aligned}
$$

☛ ***Příklad 13.*** Nalezněte hodnotu integrálu $\iiint_M x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\,,\ y+z \leq 3\,,\ x^2+y^2 \geq 1\,,\ x^2+y^2 \leq 4\}\,.$

Řešení. Integrační obor je ohraničen dvěma souosými válcovými plochami a dvěma rovinami. Je to omezená množina, integrand je na ní spojitý, takže zadaný trojný integrál existuje. K výpočtu použijeme válcové souřadnice

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Nerovnosti pro M vyjádříme ve válcových souřadnicích:

$$z \geq 0, \quad r\sin\varphi + z \leq 3, \quad 1 \leq r^2 \leq 4;$$

dostáváme meze pro integrační proměnné:

$$1 < r < 2, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 < z < 3 - r\sin\varphi.$$

$$\iiint_M x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{3-r\sin\varphi} r^2\cos^2\varphi r\sin\varphi r \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r =$$

$$= \int_1^2 \int_0^{2\pi} r^4\cos^2\varphi\sin\varphi(3 - r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = -\frac{21}{8}\pi$$

Zobecněné válcové souřadnice

$$h : x = ar\cos\varphi,\ y = br\sin\varphi,\ z = z \tag{4.9}$$

$$r \geq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi), \quad z \in \mathbb{R}$$

Jakobián:

$$J_h = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & b\sin\varphi & 0 \\ -ar\sin\varphi & br\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = abr > 0. \tag{4.10}$$

☛ ***Příklad 14.*** Nalezněte souřadnici z_T těžiště homogenního tělesa

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le z \le 4, \quad y \ge 0 \right\} .$$

Řešení. První podmínka by se měla zjednodušit využitím zobecněných polárních souřadnic pro x, y, které zvolíme tak, abychom zkrátili 4 a 9 v první podmínce. Souřadnici z můžeme ponechat, celkem tedy zkusme zobecněné válcové souřadnice:

$$x = 2r\cos\varphi\,, \quad y = 3r\sin\varphi\,, \quad z = z\,.$$

Podmínky pro T ve válcových souřadnicích:

$$\frac{4r^2\cos^{\varphi}}{4} + \frac{9r^2\sin^2\varphi}{9} = r^2 \le z \le 4$$

Odtud navíc plyne: $r^2 \le 4$, tedy $0 \le r \le 2$

Druhou podmínkou bylo $y \ge 0$, proto $0 \le \varphi \le \pi$

Jakobián: $J_h = 2 \cdot 3 \cdot r$

Celkem jsme získali meze: $r^2 \leq z \leq 4\,, \quad 0 \leq r \leq 2\,, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$

Objem V a souřadnice z_T těžiště tělesa T:

$$V = \iiint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^\pi \int_0^2 \int_{r^2}^4 r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^\pi \int_0^2 r\left[z\right]_{r^2}^4 \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^\pi \int_0^2 \left(4r - r^3\right)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^\pi \left[\frac{4r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 \mathrm{d}\varphi = 4\,\left[\varphi\right]_0^\pi = 4\pi$$

$$z_T = \frac{1}{V}\iiint_T z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \int_0^2 \int_{r^2}^4 rz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

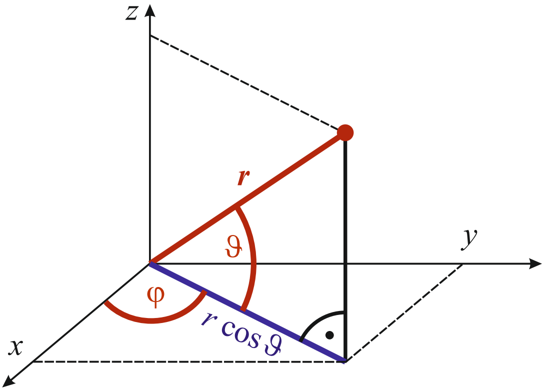
$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \int_0^2 r\left[\frac{z^2}{2}\right]_{r^2}^4 \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi \int_0^2 \left(16r - r^5\right)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int_0^\pi \left[\frac{16r^2}{2} - \frac{r^6}{6}\right]_0^2 \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{8\pi}\cdot\frac{64}{3}\cdot\pi = \frac{8}{3}$$

Sférické souřadnice

$$h: \; x = r\cos\vartheta\cos\varphi\,, \quad y = r\cos\vartheta\sin\varphi\,, \quad z = r\sin\vartheta, \tag{4.11}$$

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\,, \; -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$$



Představme si glóbus:

r udává poloměr glóbu,
φ udává poledník,
ϑ udává rovnoběžku.

Pro daný poloměr r budeme uvažovat všechny rovnoběžky od jižního pólu ($\vartheta = -\pi/2$) po severní ($\vartheta = \pi/2$) a vždy budeme procházet po celé rovnoběžce ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

(Kdybychom uvažovali také $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, pak bychom glóbus prošli dvakrát.)

Jakobián:

$$J_h = \begin{vmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta \\ -r\cos\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & 0 \\ -r\sin\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\cos\vartheta \begin{vmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\sin\vartheta\cos\varphi & -\sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \end{vmatrix} = r^2\cos\vartheta. \tag{4.12}$$

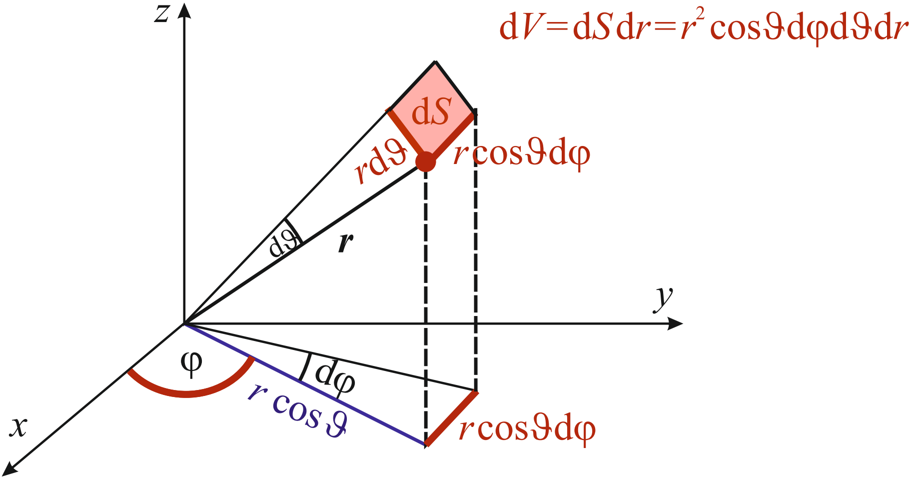
Rovnice koule $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ ve sférických souřadnicích:

$$(r\cos\vartheta\cos\varphi)^2 + (r\sin\vartheta\cos\varphi)^2 + (r\sin\vartheta)^2 = R^2$$

$$r^2\left[\cos^2\vartheta\,\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} + \sin^2\vartheta\right] = R^2$$

$$r^2 = R^2$$

$$r = R$$



$\mathrm{d}V = \mathrm{d}S\,\mathrm{d}r = r^2 \cos\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r$
z
dS
$r\mathrm{d}\vartheta$
$r\cos\vartheta\mathrm{d}\varphi$
$\mathrm{d}\vartheta$
$\boldsymbol{r}$
y
φ
dφ
$r\cos\vartheta$
$r\cos\vartheta\mathrm{d}\varphi$
x

☛ ***Příklad 15.*** Vypočítejte $\iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 2z\}\ .$$

Řešení. Jak jsme viděli, výraz $x^2+y^2+z^2$ se ve sférických souřadnicích zjednoduší na r^2. Uvažujme tedy substituci:

$$x = r\cos\vartheta\cos\varphi\,,\quad y = r\cos\vartheta\sin\varphi\,,\quad z = r\sin\vartheta$$

Pro celý prostor je $r \ge 0,\ \varphi \in \langle 0, 2\pi)\ ,\ \vartheta \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle\ .$

Tyto meze nyní musíme zúžit tak, aby byly splněny podmínky pro A :

$r^2 \le 2r\sin\vartheta$, tj. $0 \le r \le 2\sin\vartheta$. Odtud navíc plyne: $0 \le \sin\vartheta$.

Místo celého intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$ proto musí být $\vartheta \in \langle 0, \pi/2\rangle$.

Pro φ žádná podmínka nevznikla, proto $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$.

Jakobián: $J_h = r^2\cos\vartheta$

Meze pro A ve sférických souřadnicích jsou tedy následující:

$$r \in \langle 0, 2\sin\vartheta \rangle\,, \quad \vartheta \in \langle 0, \pi/2 \rangle\,, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi)$$

Meze pro r závisejí na ϑ , proto musíme integrovat podle r dříve než podle ϑ , např.:

$$\iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\sin\vartheta} r\cdot r^2\cos\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\sin\vartheta} \cos\vartheta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^4\vartheta\cos\vartheta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 4\int_0^{2\pi}\left[\frac{\sin^5\vartheta}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi = \frac{4}{5}\,[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{8\pi}{5}$$

☛ ***Příklad 16.*** Vypočítejte integrál $\displaystyle\iiint_M \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,

kde $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2\,,\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z\}$.

Řešení. Množina M je ohraničená dvěma sférami se středem v počátku a kuželovou plochou. Použijme sférické souřadnice

$$x = r\cos\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\cos\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\sin\vartheta,$$

kde $0 \leq \varphi < 2\pi\,,\ -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\,,\ 0 \leq r$.

Meze pro M ve sférických souřadnicích:

$$a^2 \leq r^2 \leq b^2, \qquad \sqrt{r^2\cos^2\vartheta} \leq r\sin\vartheta;$$

pro $\vartheta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ je $\cos\vartheta \geq 0$, proto lze psát

$$a \leq r \leq b, \quad r\cos\vartheta \leq r\sin\vartheta, \quad \text{tedy} \quad \frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Pro φ se neobjevila žádná omezující podmínka, proto $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$.

$$\iiint_M \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_a^b \frac{1}{r^2} r^2\cos\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2\pi(b-a)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

☛ ***Příklad 17.*** Vypočítejte objem tělesa T, které je dáno nerovnostmi:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, \qquad 2 \leq z \leq 3\,.$$

Řešení. První podmínka by nás mohla „svádět“ ke sférickým souřadnicím. Pak bychom ale měli velký problém s podmínkou pro z. S ohledem na druhou podmínku proto budeme uvažovat **jen souřadnice válcové:**

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = z\,.$$

Podmínky pro T ve válcových souřadnicích: $2 \leq z \leq 3\,,$

$$r^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + z^2 \leq 16, \qquad \text{tj. } r^2 + z^2 \leq 16\,.$$

Protože meze pro z máme již zadané, vyjádříme r: $0 \leq r \leq \sqrt{16 - z^2}$

Pro φ žádné omezení nevzniklo, proto $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Jakobián: $J_h = r$

$$V = \iiint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_2^3\int_0^{\sqrt{16-z^2}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = \cdots = \frac{29\pi}{3}$$

Zobecněné sférické souřadnice

Hranice integračního oboru je tvořena částmi elipsoidu se středem v počátku a s poloosami $a, b, c > 0$, pak je výhodné použít zobecněné sférické souřadnice:

$$x = ar\cos\vartheta\cos\varphi\,, \quad y = br\cos\vartheta\sin\varphi\,, \quad z = cr\sin\vartheta, \tag{4.13}$$
$$r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\,, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$$

Jakobián:

$$J_h = abcr^2\cos\vartheta. \tag{4.14}$$

Rovnice elipsoidu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

v zobecněných sférických souřadnicích:

$$\frac{a^2 r^2 \cos^2\vartheta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{b^2 r^2 \cos^2\vartheta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{c^2 r^2 \sin^2\vartheta}{c^2} \le 1$$

$$r^2\left[\cos^2\vartheta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \sin^2\vartheta\right] = R^2$$

$$r^2 \le 1, \quad \text{tj.} \quad 0 \le r \le 1.$$

☛ ***Příklad 18.*** Vypočítejte objem elipsoidu se středem v počátku a poloosami a, b, c.

Řešení. K výpočtu použijeme zobecněné sférické souřadnice, kde pro integrační proměnné platí nerovnosti $0 < r < 1,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$.

$$\iiint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 abcr^2 \cos\vartheta \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi = \frac{4}{3}abc\pi.$$