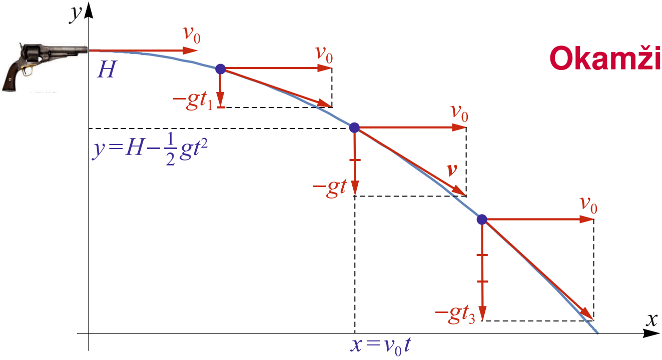
KAPITOLA 5

KŘIVKOVÝ A PLOŠNÝ INTEGRÁL 1. DRUHU

4.1 Křivky v rovině a jejich parametrizace

☛ ***Příklad 1.*** Představme si projektil, který někdo vystřelil ve vodorovném směru. Body, jimiž projektil prochází, tvoří křivku, tzv. trajektorii. Bod se pohybuje vždy ve směru **okamžité rychlosti *v***, která tedy v každém bodě představuje **tečný vektor**. Zanedbáme-li odpor vzduchu, vítr apod., pak je rychlost ve vodorovném směru stále rovna počáteční rychlosti v_0; ve svislém směru se projektil pohybuje s konstantním zrychlením g, velikost rychlosti v tomto svislém směru je tedy gt.



Okamžitá rychlost v čase t :

$$v = (v_0, -gt)$$

Poloha v čase t :

$$(x, y) =$$
$$= \left(v_0 t, H - \tfrac{1}{2} g t^2\right)$$

Jak již víme, okamžitá rychlost je derivací dráhy podle času. Pro jednotlivé složky tedy platí:

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 \qquad \Rightarrow \qquad x = v_0 t,$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = gt \qquad \Rightarrow \qquad y = \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Polohu projektilu v časovém okamžiku t, tj. **souřadnice bodu křivky**, tedy můžeme vyjádřit pomocí vektorové funkce proměnné t, tzv. **parametrizace:**

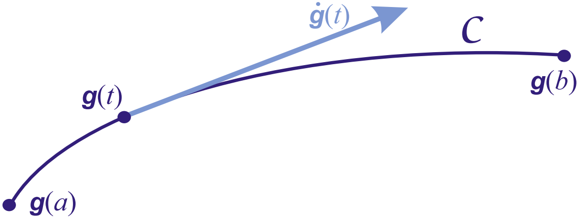
$$(x, y) = \left(v_0 t, H - \frac{1}{2} g t^2 \right) = \boldsymbol{g}(t)\,.$$

Pro okamžitou rychlost, tj. **tečný vektor** pro týž časový okamžik, platí:

$$v = (v_x, v_y) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right) = \left(v_0 t, H - \frac{1}{2} g t^2 \right) = \dot{\boldsymbol{g}}(t)\,.$$

Obecně si libovolnou křivku můžeme představit jako trajektorii pohybujícího se bodu, jehož souřadnice závisejí na čase, tedy na **jediném parametru**. Máme-li s křivkou dále pracovat, potřebujeme její **parametrizaci, neboli vektorovou funkci $\boldsymbol{g}(t)$ udávající souřadnice bodů křivky.**

Pro křivku $\mathcal{C}$ v rovině se **parametrizací** rozumí vektorová funkce $\boldsymbol{g}\colon (a, b) \to \mathcal{C}$ s tou vlastností, že souřadnice libovolného bodu křivky $\mathcal{C}$ lze vyjádřit ve tvaru $(x, y) = (g_1(t), g_2(t)) = \boldsymbol{g}(t)$, kde $t \in (a, b)$.

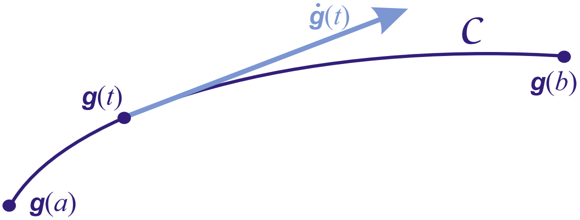


Jsou-li derivace jednotlivých složek spojité, pak $\dot{\boldsymbol{g}}(t) = \left(g_1'(t), g_2'(t)\right)$ je **tečný vektor** ke křivce $\mathcal{C}$ v bodě $\boldsymbol{g}(t)$.

Podobně pro křivky v prostoru, tj. pro $\mathbb{R}^3$:

Parametrizace: $(x, y, z) = (g_1(t), g_2(t), g_3) = \boldsymbol{g}(t),\ t \in (a, b)\,.$

Tečný vektor v bodě $\boldsymbol{g}(t)$: $\dot{\boldsymbol{g}}\,(t) = \big(g_1'(t), g_2'(t), g_3'(t)\big)$



Obecně pro $\mathbb{R}^n$:

Parametrizace:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n) = \boldsymbol{g}(t), \quad t \in (a, b)\,.$$

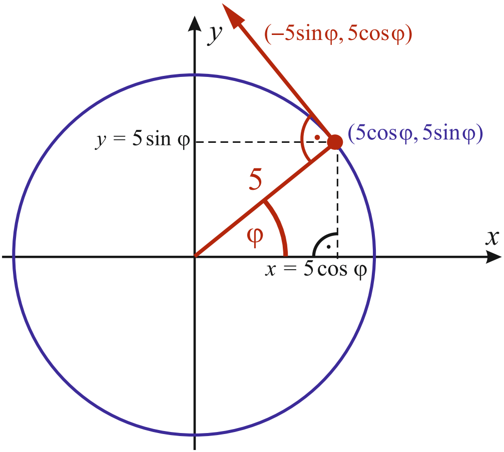
Tečný vektor v bodě $\boldsymbol{g}(t)$: $\dot{\boldsymbol{g}}\,(t) = \big(g_1'(t), g_2'(t), \ldots, g_n'(t)\big)$

☛ *Příklad 2.*

Kružnici se středem v počátku a poloměrem 5 můžeme vyjádřit pomocí parametrizace

$$(x, y) = \boldsymbol{g}(\varphi) = (5\cos\varphi, 5\sin\varphi)\,, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi)\,. \tag{4.1}$$

Tečný vektor: $\dot{\boldsymbol{g}}(\varphi) = (-5\sin\varphi, 5\cos\varphi)$



Podíváme-li se na

$$\boldsymbol{g}(t) = (5\cos\varphi, 5\sin\varphi)$$

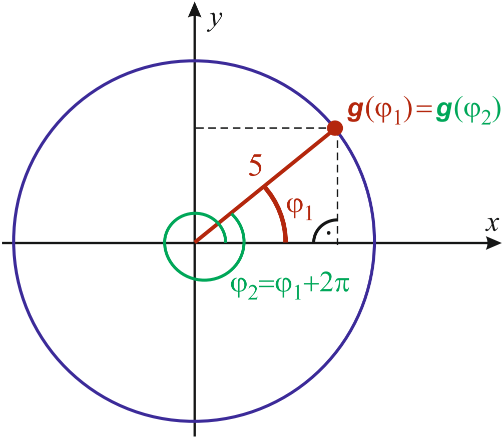
jako na průvodič daného bodu, pak si můžeme povšimnout, že vektor $\dot{\boldsymbol{g}}(t)$ je na něj kolmý, což v případě kružnice (ne obecně!!) znamená, že je to tečný vektor.

☛ *Příklad 3.*

Body o souřadnicích

$$(x, y) = \boldsymbol{g}(\varphi) = (5\cos\varphi, 5\sin\varphi)\,, \quad \varphi \in \langle 0, 4\pi)\,, \tag{4.2}$$

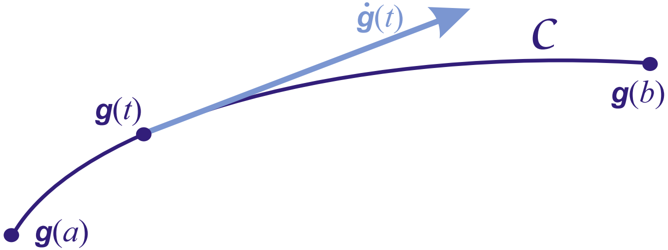
rovněž tvoří kružnici se středem v počátku a poloměrem 5, ovšem pro $\varphi \in \langle 0, 4\pi)$ tuto kružnici projdeme dvakrát. Pro libovolné $\varphi_1 \in \langle 0, 2\pi)$ je $\boldsymbol{g}(\varphi_1) = \boldsymbol{g}(\varphi_1 + 2\pi)$:



Křivka s parametrizací (4.2) tedy není prostá.

Křivka s parametrizací (4.1) z příkladu 2 je prostá – každému bodu z intervalu $\langle 0, 2\pi)$ odpovídá právě jeden bod křivky.

Vraťme se k představě křivky jako trajektorie pohybujícího se bodu. V dalším budeme požadovat, aby uvažovaná křivka byla prostá. Interval (a, b) pro parametr budeme volit takový, aby každému bodu z tohoto intervalu odpovídal právě jeden bod křivky (tj. aby zobrazení $\boldsymbol{g}(t)$ bylo vzájemně jednoznačné).



Dále budeme požadovat, aby $\boldsymbol{g}(t)$ byla spojitá a měla také spojitou derivaci – tedy abychom v každém jejím bodě mohli najít tečný vektor $\dot{\boldsymbol{g}}(t)$. Kdyby tato podmínka nebyla splněna v konečném počtu bodů, mohli bychom křivku rozdělit na části a příslušné integrály počítat pro každou část zvlášť.

Konečně budeme požadovat, aby byl tečný vektor $\dot{\boldsymbol{g}}(t)$ nenulový, tj. aby se pohybující se bod nikde nezastavil.

Definice 1. Množina $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **prostá regulární křivka** v $\mathbb{R}^n$ právě tehdy, když existuje vzájemně jednoznačné zobrazení

$$\boldsymbol{g}\colon (a,b) \to \mathcal{C}\,; \quad \boldsymbol{g}(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))\,, \tag{4.3}$$

které má na intervalu (a,b) spojitou derivaci

$$\dot{\boldsymbol{g}}\,(t) = (g_1'(t), \dots, g_n'(t)) \neq (0, \dots, 0).$$

Prostá regulární křivka je tedy množina bodů $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(t)$, tj.

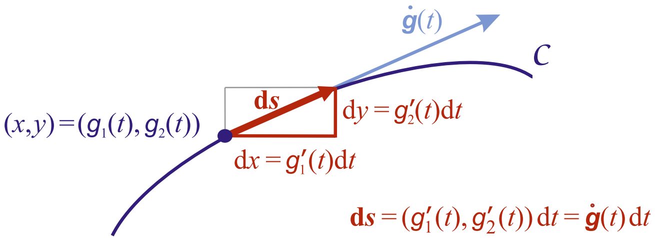
$$(x_1, \dots, x_n) = (g_1(t), \dots, g_n(t))\,,$$

$$\text{neboli} \qquad x_i = g_i(t), \;\; i = 1, \dots, n, \tag{4.4}$$

kde zobrazení $\boldsymbol{g}$ splňuje výše uvedené podmínky. Toto zobrazení se nazývá **parametrizace křivky** $\mathcal{C}$, rovnice $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(t)$, neboli rovnice (4.4), se nazývají o **parametrické rovnice křivky** $\mathcal{C}$.

Speciální případ: křivky v $\mathbb{R}^2$

Hledáme-li například délku křivky, můžeme si zjednodušeně před-stavit, že tuto křivku „rozřežeme“ na miniaturní elementy o délce $\mathrm{d}s$, které se pokusíme vyjádřit pomocí parametrizace:

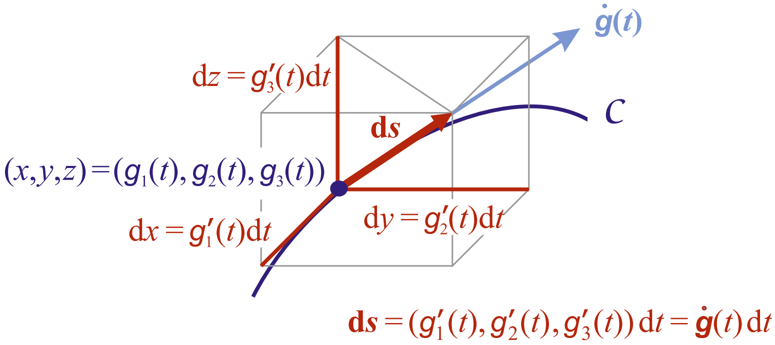


Element délky $\mathrm{d}s$ prosté regulární křivky $\mathcal{C}$ s parametrizací $\boldsymbol{g}(t)$, $t \in (a,b)$, je roven

$$\mathrm{d}s = \|\dot{\boldsymbol{g}}\,(t)\|\,\mathrm{d}t = \sqrt{(g_1'(t))^2 + (g_2'(t))^2}\;\mathrm{d}t \qquad (4.5)$$

Délku křivky pak můžeme vypočítat jako určitý integrál $\int_a^b \|\dot{\boldsymbol{g}}\,(t)\|\,\mathrm{d}t$.

Speciální případ: křivky v $\mathbb{R}^3$

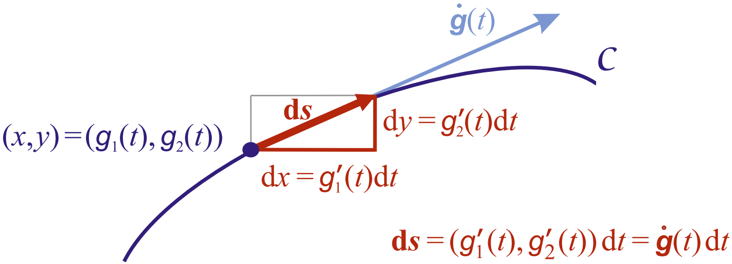


Element délky $\mathrm{d}s$ prosté regulární křivky $\mathcal{C}$ s parametrizací $\boldsymbol{g}(t)$, $t \in (a, b)$, je roven

$$\mathrm{d}s = \|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\|\, \mathrm{d}t = \sqrt{(g_1'(t))^2 + (g_2'(t))^2 + (g_3'(t))^2}\, \mathrm{d}t \qquad (4.6)$$

Délku křivky opět můžeme vypočítat jako $\int_a^b \|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\|\, \mathrm{d}t$.

Element délky křivky v $\mathbb{R}^n$



Obecně je **element délky** $\mathrm{d}s$ prosté regulární křivky $\mathcal{C}$ s parametrizací $\boldsymbol{g}(t)$ roven

$$\mathrm{d}s = \|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\|\,\mathrm{d}t = \sqrt{(g_1'(t))^2 + \cdots + (g_n'(t))^2}\;\mathrm{d}t \qquad (4.7)$$

Délku křivky můžeme vypočítat jako určitý integrál $\int_a^b \|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\|\,\mathrm{d}t$. Pro tento integrál budeme používat symbol $\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s$.

4.2 Křivkový integrál 1. druhu

Definice 2. Nechť $\mathcal{C}$ je prostá regulární křivka v $\mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{g}\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je její parametrizace. Nechť $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ je funkce. **Křivkový integrál 1. druhu funkce f přes křivku $\mathcal{C}$** (také **neorientovaný křivkový integrál**) je definován vztahem

$$\int_{\mathcal{C}} f \,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\boldsymbol{g}(t))\|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\|\,\mathrm{d}t \tag{4.8}$$

(jestliže Riemannův integrál vpravo existuje).

Speciálně pro **délku křivky $\mathcal{C}$** platí: $L = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s$

Obecněji: je-li funkce f nezáporná, můžeme si ji představit jako délkovou hustotu, udávající hmotnost jednotky délky „drátu“ $\mathcal{C}$. Výraz $f\,\mathrm{d}s$ pak vyjadřuje **element hmotnosti** a integrál (4.8) **hmotnost křivky $\mathcal{C}$**.

Vlastnosti křivkového integrálu 1. druhu

Křivkový integrál funkce f přes křivku $\mathcal{C}$ byl definován pomocí jednorozměrného Riemannova integrálu, má tedy podobné vlastnosti jako Riemannův integrál funkce f na intervalu. Například:

Linearita křivkového integrálu

Jsou-li α, β reálná čísla, f, g funkce, pak rovnost

$$\int\limits_{\mathcal{C}} (\alpha f + \beta h)\,\mathrm{d}s = \alpha \int\limits_{\mathcal{C}} f\,\mathrm{d}s + \beta \int\limits_{\mathcal{C}} h\,\mathrm{d}s \tag{4.9}$$

platí, má-li pravá strana smysl.

Aditivita vzhledem ke křivce

Jsou-li $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ prosté regulární křivky takové, že jejich sjednocení $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ je rovněž prostá regulární křivka a jejich průnik $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ obsahuje nejvýše krajní body oblouků, pak rovnost

$$\int\limits_{\mathcal{C}} f\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2} f\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\mathcal{C}_1} f\,\mathrm{d}s + \int\limits_{\mathcal{C}_2} f\,\mathrm{d}s \tag{4.10}$$

platí, má-li pravá strana smysl.

☛ ***Příklad 4.*** Nalezněte hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{C}} x^2 ds, \quad \text{kde} \quad \mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \ln x, x \in \langle 1, 2\rangle\}.$$

Řešení. Zvolme parametrizaci $x = g_1(t) = t,\ y = g_2(t) = \ln t$,

tedy $\boldsymbol{g}(t) = (t, \ln t)\,,\ t \in \langle 1, 2\rangle\,,\qquad \dot{\boldsymbol{g}}\,(t) = \left(1, \frac{1}{t}\right) \neq (0,0)\,.$

$$\mathrm{d}s = \|\dot{\boldsymbol{g}}\,(t)\|\,\mathrm{d}t = \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{t^2+1}}{|t|}\,\mathrm{d}t$$

Protože máme $t > 0$, můžeme psát:

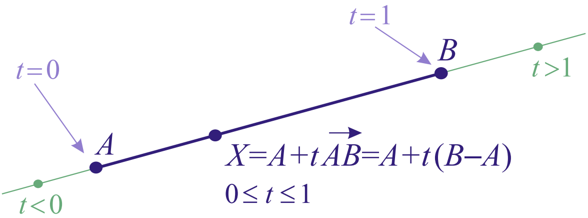
$$\int_{\mathcal{C}} x^2\ \mathrm{d}s = \int_1^2 t^2\,\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 t\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{c} u = t^2+1 \\ \mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t \\ 1 \to 2,\ 2 \to 5 \end{array}\right| =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_2^5 u^{1/2}\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}[u^{3/2}]_2^5 = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}(5^{3/2} - 2^{3/2})}}$$

☛ ***Příklad 5.*** Nalezněte hodnotu integrálu $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (x+y)\,\mathrm{d}s$,

kde $\mathcal{C}$ je úsečka s krajními body $A = (0,0)$, $B = (1,2)$.

Řešení. Vzpomeňme si na parametrické vyjádření úsečky:



Zvolme tedy parametrizaci:

$$(x,y) = \boldsymbol{g}(t) = A + t(B-A) = (0,0) + t(1,2) = (t, 2t)\,,\quad t \in \langle 0, 1\rangle$$

Pak $\dot{\boldsymbol{g}}(t) = (1,2)\,,\quad \|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5},\quad \mathrm{d}s = \sqrt{5}\,\mathrm{d}t\,,$

$$\int_{\mathcal{C}} (x+y)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 (t+2t)\sqrt{5}\,\mathrm{d}t = \sqrt{5}\int_0^1 3t = 3\sqrt{5}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3\sqrt{5}}{2}\,.$$

☛ ***Příklad 6.*** Nalezněte hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{z^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s,$$

kde $\mathcal{C}$ je jeden závit šroubovice $x = r\cos t,\ y = r\sin t,$ $z = rt,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, kde $r > 0$ je pevně daný poloměr.

Řešení. Parametrizaci tedy máme již zadanou:

$$\boldsymbol{g}(t) = (r\cos t, r\sin t, rt),\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle\,.$$

Potom $\dot{\boldsymbol{g}}(t) = (-r\sin t, r\cos t, r),$

$$\|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\|\,\mathrm{d}t = \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + r^2} = \sqrt{r^2+r^2} = r\sqrt{2},$$

a tedy $\mathrm{d}s = \|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\|\,\mathrm{d}t = r\sqrt{2}\,\mathrm{d}t,$

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{z^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \frac{r^2t^2}{r^2}\,r\sqrt{2}\,\mathrm{d}t = r\int_0^{2\pi} t^2\,\mathrm{d}t = r\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{\frac{8r\pi^3\sqrt{2}}{3}}}\,.$$

Některé aplikace křivkového integrálu

Délka $s(\mathcal{C})$ křivky $\mathcal{C}$:

$$\boldsymbol{s(\mathcal{C}) = \int\limits_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s = \int\limits_{t_0}^{t_1} \|\dot{g}(t)\| \, \mathrm{d}t}$$

Hmotnost $m(\mathcal{C})$ křivky $\mathcal{C}$ s délkovou hustotou σ :

$$\boldsymbol{m(\mathcal{C}) = \int\limits_{\mathcal{C}} \sigma \, \mathrm{d}s = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sigma(g(t)) \|\dot{g}(t)\| \, \mathrm{d}t}$$

Analogicky se počítá celkový **náboj**. V tomto případě může hustota σ náboje nabývat i záporných hodnot.

Statické momenty v $\mathbb{R}^2$:

$$S_y(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} x\sigma \,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} g_2(t)\sigma(\boldsymbol{g}(t))\|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\| \,\mathrm{d}t$$

$$S_x(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} y\sigma \,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} g_1(t)\sigma(\boldsymbol{g}(t))\|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\| \,\mathrm{d}t$$

Souřadnice $x_t(\mathcal{C})$, $y_t(\mathcal{C})$ těžiště křivky $\mathcal{C}$:

$$x_t(\mathcal{C}) = \frac{S_y(\mathcal{C})}{m(\mathcal{C})} = \frac{\int_{\mathcal{C}} x\sigma \,\mathrm{d}s}{m(\mathcal{C})} ,$$

$$y_t(\mathcal{C}) = \frac{S_x(\mathcal{C})}{m(\mathcal{C})} = \frac{\int_{\mathcal{C}} y\sigma \,\mathrm{d}s}{m(\mathcal{C})}$$

Statické momenty v $\mathbb{R}^3$:

$$S_{yz}(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} x\sigma \,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} g_1(t)\sigma(\boldsymbol{g}(t))\|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\| \,\mathrm{d}t$$

$$S_{xz}(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} y\sigma \,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} g_2(t)\sigma(\boldsymbol{g}(t))\|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\| \,\mathrm{d}t$$

$$S_{xy}(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} z\sigma \,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} g_3(t)\sigma(\boldsymbol{g}(t))\|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\| \,\mathrm{d}t$$

Souřadnice $x_t(\mathcal{C})$, $y_t(\mathcal{C})$, $y_t(\mathcal{C})$ těžiště křivky $\mathcal{C}$:

$$x_t(\mathcal{C}) = \frac{\int_{\mathcal{C}} x\sigma \,\mathrm{d}s}{m(\mathcal{C})}, \quad y_t(\mathcal{C}) = \frac{\int_{\mathcal{C}} y\sigma \,\mathrm{d}s}{m(\mathcal{C})}, \quad z_t(\mathcal{C}) = \frac{\int_{\mathcal{C}} z\sigma \,\mathrm{d}s}{m(\mathcal{C})}.$$

Momenty setrvačnosti v $\mathbb{R}^2$:

$$I_x(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} y^2 \sigma \, \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} g_2^2(t) \sigma(\boldsymbol{g}(t)) \|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\| \, \mathrm{d}t$$

$$I_y(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} x^2 \sigma \, \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} g_1^2(t) \sigma(\boldsymbol{g}(t)) \|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\| \, \mathrm{d}t$$

Momenty setrvačnosti v $\mathbb{R}^3$:

$$I_x(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} (y^2 + z^2)\sigma \, \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} (g_2^2(t) + g_3^2(t))\sigma(\boldsymbol{g}(t)) \|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\| \, \mathrm{d}t$$

$$I_y(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} (x^2 + z^2)\sigma \, \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} (g_2^2(t) + g_3^2(t))\sigma(\boldsymbol{g}(t)) \|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\| \, \mathrm{d}t$$

$$I_z(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2)\sigma \, \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} (g_1^2(t) + g_2^2(t))\sigma(\boldsymbol{g}(t)) \|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\| \, \mathrm{d}t$$

☛ ***Příklad 7.*** Nalezněte souřadnici z_T těžiště homogenní křivky v $\mathbb{R}^3$, která je dána vztahy

$$2x^2 + z^2 = 2, \quad y = x, \quad z \geq 0\,.$$

Řešení. První podmínka by se mohla zjednodušit, kdybychom použili zobecněné polární souřadnice pro x a z. Zbývající proměnnou y ponechme:

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = y\,, \quad z = \sqrt{2}r\sin\varphi.$$

Nyní máme tři nové proměnné, r, φ, y, ovšem pro parametrizaci křivky potřebujeme jen **jeden parametr**.

Křivka je určena dvěma rovnicemi – to znamená, že po dosazení tří nových neznámých by se nám mělo podařit dvě neznámé „zrušit“, tedy nahradit číslem nebo výrazem obsahujícím jediný parametr:

$$2x^2 + z^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad 2r^2\cos^2\varphi + 2r^2\sin^2\varphi = 2\,, \quad \text{tj.} \quad 2r^2 = 2\,,$$

$$\text{tj.} \quad r = 1$$

$$y = x \quad \Rightarrow \quad y = r\cos\varphi = 1\cdot\cos\varphi$$

Všechny souřadnice jsme tedy schopni nahradit výrazem obsahujícím pouze φ :

$$\boldsymbol{g}(\varphi) = (x, y, z) = \left(\cos\varphi,\ \cos\varphi,\ \sqrt{2}\sin\varphi\right)$$

$$\dot{\boldsymbol{g}}(\varphi) = \left(-\sin\varphi,\ -\sin\varphi,\ \sqrt{2}\cos\varphi\right)$$

$$\|\dot{\boldsymbol{g}}(\varphi)\| = \sqrt{\sin^2\varphi + \sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi} = \sqrt{2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)} = \sqrt{2}$$

$$\mathrm{d}s = \|\dot{\boldsymbol{g}}(\varphi)\|\,\mathrm{d}\varphi = \sqrt{2}\,\mathrm{d}\varphi$$

Délka křivky:

$$L = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s = \int_0^{\pi} \sqrt{2}\,\mathrm{d}\varphi = \sqrt{2}\,\pi$$

Souřadnice z_T těžiště:

$$z_T = \frac{1}{L}\int_{\mathcal{C}} z\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[-\cos\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

4.3 Plošný integrál 1. druhu

Definice 3. Množina $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ se nazývá **prostá regulární plocha** v $\mathbb{R}^3$ právě tehdy, když existuje vzájemně jednoznačné zobrazení

$$\boldsymbol{g} : \Omega \to \mathcal{S}\,; \quad \boldsymbol{g}(u,v) = (g_1(u,v), g_2(u,v), g_3(u,v))\,, \tag{4.11}$$

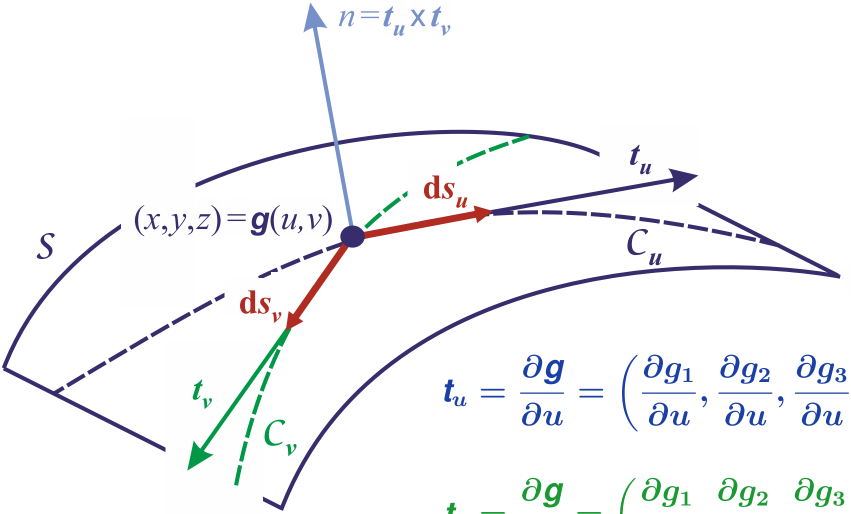
které má na množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ spojité parciální derivace

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u} = \left(\frac{\partial g_1}{\partial u}, \frac{\partial g_2}{\partial u}, \frac{\partial g_3}{\partial u}\right), \quad \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v} = \left(\frac{\partial g_1}{\partial v}, \frac{\partial g_2}{\partial v}, \frac{\partial g_3}{\partial v}\right), \tag{4.12}$$

přičemž vektory (4.12) jsou lineárně nezávislé.

Vektory (4.12) jsou lineárně nezávislé **tečné vektory k ploše $\mathcal{S}$**, jejich vektorový součin je **normálový vektor k ploše $\mathcal{S}$** (viz následující obrázek).

Uvažujme bod plochy o souřadnicích $(x, y, z) = \boldsymbol{g}(u, v)$. Pro pevné v tvoří body $\boldsymbol{g}(u, v)$ křivku $\mathcal{C}_u$, jejíž tečný vektor získáme jako derivaci parametrizace podle (v tuto chvíli jediné) proměnné u. Podobně pro pevné u tvoří body $\boldsymbol{g}(u, v)$ křivku $\mathcal{C}_v$, jejíž tečný vektor získáme jako derivaci parametrizace podle v :

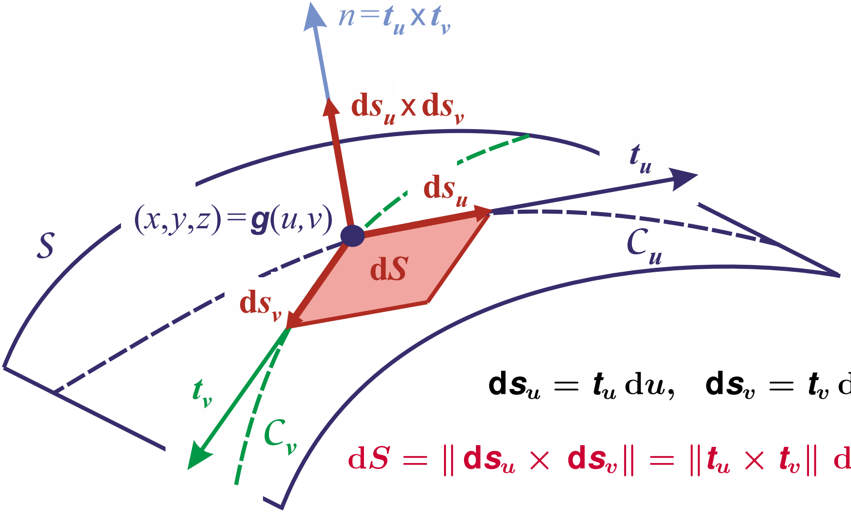


$$\boldsymbol{t}_u = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u} = \left(\frac{\partial g_1}{\partial u}, \frac{\partial g_2}{\partial u}, \frac{\partial g_3}{\partial u}\right)$$

$$\boldsymbol{t}_v = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v} = \left(\frac{\partial g_1}{\partial v}, \frac{\partial g_2}{\partial v}, \frac{\partial g_3}{\partial v}\right)$$

Element obsahu $\mathrm{d}S$

Element obsahu $\mathrm{d}S$ si můžeme představit jako obsah rovnoběžníku, jehož strany tvoří vektory $\mathbf{d}\boldsymbol{s}_u$, $\mathbf{d}\boldsymbol{s}_v$. Obsah tohoto rovnoběžníku je roven velikosti vektorového součinu těchto vektorů.



$$\mathbf{d}\boldsymbol{s}_u = \boldsymbol{t}_u\,\mathrm{d}u, \quad \mathbf{d}\boldsymbol{s}_v = \boldsymbol{t}_v\,\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}S = \|\,\mathbf{d}\boldsymbol{s}_u \times \mathbf{d}\boldsymbol{s}_v\| = \|\,\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v\|\;\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

tj. $\quad \mathrm{d}S = \left\| \dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

Plošný integrál 1. druhu v $\mathbb{R}^3$

Definice 4. Nechť $\mathcal{S}$ je prostá regulární plocha v $\mathbb{R}^3$ a nechť $\boldsymbol{g}\colon \Omega \to \mathcal{S}$ je její parametrizace. Nechť $f\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ je funkce. Existuje-li Riemannův integrál

$$\iint_{\Omega} f(\boldsymbol{g}(u,v)) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{4.13}$$

pak toto číslo značíme $\iint_{\mathcal{S}} f\,\mathrm{d}S$ a nazýváme je **plošným integrálem 1. druhu funkce f přes plochu $\mathcal{S}$** (také **neorientovaným plošným integrálem**). Je tedy

$$\iint_{\mathcal{S}} f\,\mathrm{d}S \equiv \iint_{\Omega} f(\boldsymbol{g}(u,v)) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{4.14}$$

$$= \iint_{\Omega} f(\boldsymbol{g}(u,v)) \left\| \boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v \right\| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

Je-li $\mathcal{S}$ část grafu funkce $z = h(x, y)$, pak můžeme vzít jako parametry přímo x, y, tj. zvolit parametrizaci

$$\boldsymbol{g}(x, y) = (x, y, h(x, y)), \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathrm{D}_h. \tag{4.15}$$

Zřejmě platí:

$$\boldsymbol{t}_x = \left(1, 0, \frac{\partial h}{\partial x}\right), \quad \boldsymbol{t}_y = \left(0, 1, \frac{\partial h}{\partial y}\right)$$

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_x \times \boldsymbol{t}_y = \left(-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, 1\right)$$

$$\|\boldsymbol{n}\| = \|\boldsymbol{t}_x \times \boldsymbol{t}_y\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}$$

Pro plošný integrál tedy platí: $\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S =$

$$= \iint_{\Omega} f(x, y, h(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{4.16}$$

Pro plochu $\mathcal{S}$ s parametrizací $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, g_3)$ platí:

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_3}{\partial u} \\ \frac{\partial g_2}{\partial v} & \frac{\partial g_3}{\partial v} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_3}{\partial u} \\ \frac{\partial g_1}{\partial v} & \frac{\partial g_3}{\partial v2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial u} \\ \frac{\partial g_1}{\partial v} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \end{vmatrix} \right).$$

Odtud a ze vztahu $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 \|\boldsymbol{b}\|^2 - \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}$ plyne:

$$\|\boldsymbol{n}\| = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v} \right\| = \sqrt{EG - F^2}, \tag{4.17}$$

kde

$$E = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u} \right\|^2, \quad G = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v} \right\|^2, \quad F = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u} \bullet \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v}, \tag{4.18}$$

Veličiny E, G a F se nazývají **Gaussovy koeficienty plochy**. Můžeme také psát:

$$\|\boldsymbol{n}\|^2 = \|\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v\|^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{t}_u \bullet \boldsymbol{t}_u & \boldsymbol{t}_u \bullet \boldsymbol{t}_v \\ \boldsymbol{t}_v \bullet \boldsymbol{t}_u & \boldsymbol{t}_v \bullet \boldsymbol{t}_v \end{vmatrix}$$

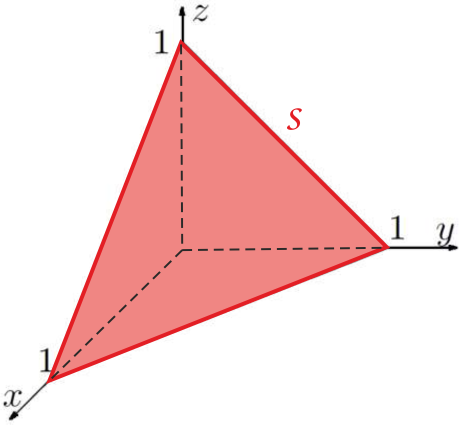
☛ ***Příklad 8.*** Nalezněte hodnotu plošného integrálu

$$\iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}S$$

přes plochu

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+y+z=1)\wedge(x\geq 0)\wedge(y\geq 0)\wedge(z\geq 0)\}.$$

Řešení.



$$z = 1 - x - y$$

Zvolme tedy

$$x = u,\ y = v,$$

$$z = 1 - u - v$$

Plochu budeme **parametrizovat** jako graf funkce:

$$\boldsymbol{g}(u,v) = (u, v, 1-u-v), \quad u+v \leq 1,\ u \geq 0,\ v \geq 0$$

Tečné vektory: $$t_u = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u} = (1, 0, -1)$$

$$t_v = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v} = (0, 1, -1)$$

Normálový vektor: $\boldsymbol{n} = (1,0,-1) \times (0,1,-1) = (1,1,1)$

Velikost vektoru *n*: $\|\boldsymbol{n}\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$

Element obsahu: $\mathrm{d}S = \|\boldsymbol{n}\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \sqrt{3}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

$$\iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}S = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{(1+u+v)^2}\sqrt{3}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 \left[-\frac{1}{1+u+v}\right]_0^{1-u} \mathrm{d}u = \sqrt{3}\int_0^1 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u =$$

$$= \sqrt{3}\left[\ln(1+u) - \frac{1}{2}u\right]_0^1 = \underline{\underline{\sqrt{3}(\ln 2 - \frac{1}{2})}}$$

☛ ***Příklad 9.*** Nalezněte hodnotu plošného integrálu

$$\iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}S$$

přes plochu $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (z = 1 - x^2 - y^2) \wedge (z \geq 0)\}$.

Řešení.

1. možnost: $\mathcal{S}$ jako graf funkce – **parametrizace:**

$$\boldsymbol{g}(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2), \quad u^2 + v^2 \leq 1\,.$$

Tečné vektory:

$$t_u = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u} = (1, 0, -2u)$$

$$t_v = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v} = (0, 1, -2v)$$

Normálový vektor: $\boldsymbol{n} = (1, 0, -2u) \times (0, 1, -2vy) = (2u, 2v, 1)$

Velikost vektoru $\boldsymbol{n}$: $\|\boldsymbol{n}\| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$

Element obsahu: $\mathrm{d}S = \|\boldsymbol{n}\|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

$$\iint_{\mathcal{S}} (x^2+y^2)\ \mathrm{d}S = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} (u^2+v^2)\sqrt{4u^2+4v^2+1}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u =$$

$$= 4\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-u^2}} (u^2+v^2)\sqrt{4u^2+4y^2+1}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = r\cos\varphi\,,\ \ 0 < r < 1, \\ v = r\sin\varphi\,,\ \ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3\sqrt{4r^2+1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2\pi\int_0^1 r^3\sqrt{4r^2+1}\,\mathrm{d}r = \left| \begin{array}{rl} 4r^2+1=t, & 8r\mathrm{d}r = \mathrm{d}t \\ r=0 \Rightarrow & t=1 \\ r=1 \Rightarrow & t=5 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_1^5 \frac{t-1}{4} t^{1/2}\,\mathrm{d}t = \underline{\underline{\frac{\pi}{60}(25\sqrt{5}+1)}}$$

2. možnost: Nyní si ukažme řešení, kdy zvolíme parametrizaci rovnou pomocí polárních souřadnic: $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$

Potom $z = 1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$, má být $z \geq 0$, tj. $1 - r^2 \geq 0.$

Parametrizace má tedy tvar:

$$\boldsymbol{g}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 1 - r^2), \quad 0 < r < 1,\ 0 < \varphi < 2\pi.$$

Tečné vektory:

$$t_r = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial r} = (\cos\varphi, \sin\varphi, -2r)$$

$$t_\varphi = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \varphi} = (-r, \sin\varphi, r\cos\varphi, 0)$$

Normálový vektor: $\boldsymbol{n} = (2r^2\cos\varphi, 2r^2\sin\varphi, r)$

Velikost vektoru $\boldsymbol{n}$:

$$\|\boldsymbol{n}\| = \sqrt{4r^4(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2} = $$

$$= \sqrt{r^2(4r^2+1)} = r\sqrt{4r^2+1}$$

Element obsahu: $\mathrm{d}S = \|\boldsymbol{n}\|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = r\sqrt{4r^2+1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$

$$\iint_S (x^2+y^2)\ \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\sqrt{4r^2+1}\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^1 r^3\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r = \left| \begin{array}{rl} 1+4r^2 = t, & 8r\mathrm{d}r = \mathrm{d}t \\ r = 0 \Rightarrow & t = 1 \\ r = 1 \Rightarrow & t = 5 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_1^5 \frac{t-1}{4} t^{1/2}\,\mathrm{d}t = \underline{\underline{\frac{\pi}{60}(25\sqrt{5}+1)}}$$

Nakonec jsme tedy vyřešili stejný integrál, jako v předchozím případě. Porovnáme-li obě možnosti, pak je vidět, že parametrizace plochy jako grafu funkce vede k jednoduššímu normálovému vektoru a jeho velikosti, jen je pak někdy zapotřebí použít vhodnou substituci při řešení dvojného integrálu. Druhou možností je použít rovnou jiné souřadnice a s využitím rovnice plochy snížit počet proměnných na dvě. Pak už budeme mít snazší meze pro dvojný integrál, ale zase o něco pracnější výpočet velikosti normálového vektoru.

Některé aplikace plošného integrálu

Plošný obsah $S(\mathcal{S})$ plochy $\mathcal{S}$:

$$S(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S$$

Hmotnost $m(\mathcal{S})$ plochy $\mathcal{S}$ s plošnou hustotou σ :

$$m(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} \sigma(x, y, z)\,\mathrm{d}S$$

Analogicky se počítá celkový **náboj**. V tomto případě může hustota σ náboje nabývat i záporných hodnot.

Statické momenty vzhledem k rovinám yz, xz a xy :

$$S_{yz}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} x\sigma(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$S_{xz}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} y\sigma(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$S_{xy}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} z\sigma(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

Souřadnice $x_t(\mathcal{S})$, $y_t(\mathcal{S})$, $y_t(\mathcal{S})$ těžiště křivky $\mathcal{S}$:

$$x_t(\mathcal{S}) = \frac{\iint_{\mathcal{S}} x\sigma(x,y,z)\,\mathrm{d}S}{m(\mathcal{S})}$$

$$y_t(\mathcal{S}) = \frac{\iint_{\mathcal{S}} y\sigma(x,y,z)\,\mathrm{d}S}{m(\mathcal{S})}$$

$$z_t(\mathcal{S}) = \frac{\iint_{\mathcal{S}} z\sigma(x,y,z)\,\mathrm{d}S}{m(\mathcal{S})}$$

Momenty setrvačnosti vzhledem k osám x, y, z :

$$I_x(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} (y^2 + z^2)\sigma(x, y, z)\,\mathrm{d}S$$

$$I_y(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} (x^2 + z^2)\sigma(x, y, z)\,\mathrm{d}S$$

$$I_z(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2)\sigma(x, y, z)\,\mathrm{d}S$$