KAPITOLA 6

KŘIVKOVÝ A PLOŠNÝ INTEGRÁL 2. DRUHU

6.1 Úvod

Základní rozdíl mezi tzv. integrály 1. druhu a integrály 2. druhu (křivkovými či plošnými) spočívá v tom, že v prvním případě pracujeme se skalární funkcí a v druhém s funkcí vektorovou. Tedy:

Křivkový integrál 1. druhu: $\int\limits_{\mathcal{C}} f \, \mathrm{d}s$

f – **skalární funkce,** např. délková hustota $\rightsquigarrow$ hmotnost $\mathcal{C}$

Plošný integrál 1. druhu: $\iint_{\mathcal{S}} f \, \mathrm{d}S$

f – **skalární funkce,** např. plošná hustota $\rightsquigarrow$ hmotnost $\mathcal{S}$

Křivkový integrál 2. druhu: $\int\limits_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f} \mathrm{d}\boldsymbol{s}$

$\boldsymbol{f}$ – **vektorová funkce,** např. síla $\rightsquigarrow$ práce $\mathcal{C}$

Plošný integrál 2. druhu: $\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{f} \mathrm{d}\boldsymbol{S}$

$\boldsymbol{f}$ – **vektorová funkce,** např. intenzita el. pole $\rightsquigarrow$ tok plochou $\mathcal{S}$

Křivkový a plošný integrál 1. druhu jsme definovali pomocí parametrizace a Riemannova integrálu (jednorozměrného nebo dvojného). V této části budeme definovat křivkový a plošný integrál 2. druhu pomocí příslušných integrálů 1. druhu, pro výpočet pak ale zase budeme používat parametrizaci. Celkem tak dostaneme následující vztahy, kde symbol $\bullet$ značí skalární součin:

Křivkový integrál 1. druhu: f **– skalární funkce,**

$$\int_{\mathcal{C}} f \, \mathrm{d}s = \int_a^b f(\boldsymbol{g}(t)) \|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\| \, \mathrm{d}t$$

Křivkový integrál 2. druhu: f **– vektorová funkce,**

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f} \mathbf{ds} = \int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(t)) \bullet \dot{\boldsymbol{g}}(t) \, \mathrm{d}t$$

$\boldsymbol{g}(t)$ ... **parametrizace křivky**

$\dot{\boldsymbol{g}}(t)$ ... **tečný vektor**

Plošný integrál 1. druhu: f – skalární funkce,

$$\iint_{\mathcal{S}} f \,\mathrm{d}S = \iint_{\Omega} f(\boldsymbol{g}(u,v))\, \|\boldsymbol{n}\| \;\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Plošný integrál 2. druhu: f – vektorová funkce,

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{f}\mathbf{d}\boldsymbol{S} = \iint_{\Omega} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(t)) \bullet \boldsymbol{n} \;\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$\boldsymbol{g}(u,v)$ .... parametrizace křivky

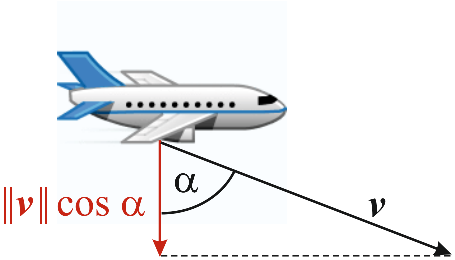
$\dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u}, \dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v}$ .... tečné vektory

$\boldsymbol{n} = \dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v}$ .... normálový vektor

$\|\boldsymbol{n}\| = \left\| \dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v} \right\|$ ...... velikost normálového vektoru

☛ *Příklad 1.* Průmět vektoru do daného směru

Přistává-li letadlo, je nutné, aby svislá složka rychlosti byla nižší než daná kritická hodnota, která zajišťuje bezpečné přistání. Jak nalézt svislou složku vektoru $\boldsymbol{v}$, známe-li úhel α mezi tímto vektorem a svislým směrem?



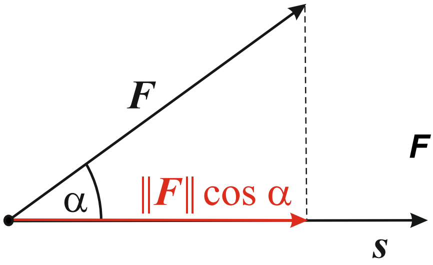
Svislá složka rychlosti představuje **pravoúhlý průmět vektoru *v* do svislého směru.**

☛ *Příklad 2.* Práce

Uvažujme nejprve přímočarý pohyb a představme si, že působením síly $\boldsymbol{F}$ (potřebné k překonání odporových sil) přemístíme nějaký předmět o vektor $\boldsymbol{s}$. Práce W je součinem velikosti síly působící ve směru pohybu a dráhy s (čím větší je síla a čím větší je dráha, po níž působí, tím větší je práce). Jestliže síla působí v jiném směru, pak práci koná pouze složka působící ve směru pohybu, tj. **pravoúhlý průmět síly $\boldsymbol{F}$ do směru pohybu:**

$$W = (\|\boldsymbol{F}\| \cos\alpha)\, \|\boldsymbol{s}\| = \|\boldsymbol{F}\|\, \|\boldsymbol{s}\| \cos\alpha$$

Výraz vpravo představuje **skalární součin $\boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{s}$**, tedy



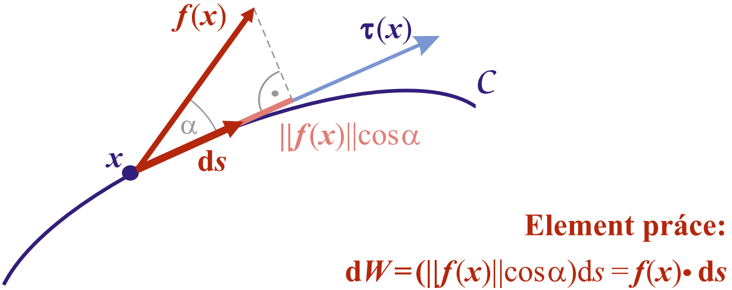
$$W = \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{s}$$

$$\boldsymbol{F} \| \boldsymbol{s} \Rightarrow W = \|\boldsymbol{F}\|\, \|\boldsymbol{s}\| \cdot 1 = \|\boldsymbol{F}\|\, \|\boldsymbol{s}\|$$

$$\boldsymbol{F} \perp \boldsymbol{s} \Rightarrow W = \|\boldsymbol{F}\|\, \|\boldsymbol{s}\| \cdot 0 = 0$$

6.2 Křivkový integrál 2. druhu

V případě křivkového integrálu 1. druhu jsme uvažovali skalární funkci, kterou jsme si představovali například jako délkovou hustotu. Nyní bude v každém bodě křivky dána **vektorová funkce.** Tu si můžeme představit například jako **sílu.** Tzv. **křivkový integrál 2. druhu** pak bude mít význam **práce,** kterou vykoná tato síla při přemístění hmotného bodu po dané křivce.

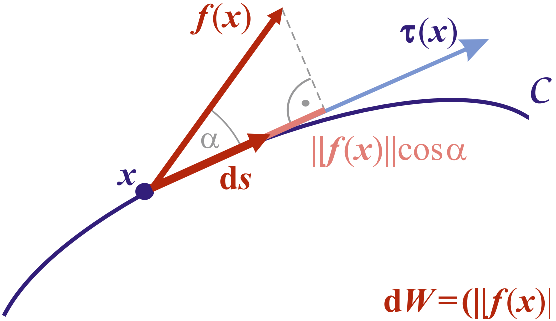


Práci koná složka síly působící ve směru pohybu, jejíž velikost je $\|\boldsymbol{f}\| \cos \alpha$ (je to pravoúhlý průmět síly do směru tečny).

Práce vektorové funkce $\boldsymbol{f}$ v $\mathbb{R}^3$ po elementu křivky $\mathbf{ds}$:

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \bullet \mathbf{ds} = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), f_3(\boldsymbol{x})) \bullet (\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}z)$$

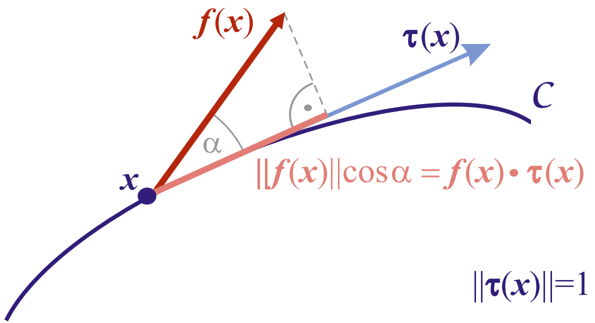
$$\mathrm{d}W = f_1(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x + f_2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}y + f_3(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}z \qquad (6.1)$$



Element práce:

$\mathbf{d}W = (\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\| \cos\alpha)\,\mathrm{d}s = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \bullet \mathbf{ds}$

Vyjádření pomocí jednotkového tečného vektoru $\boldsymbol{\tau}$:



Průmět síly do směru pohybu: skalární součin

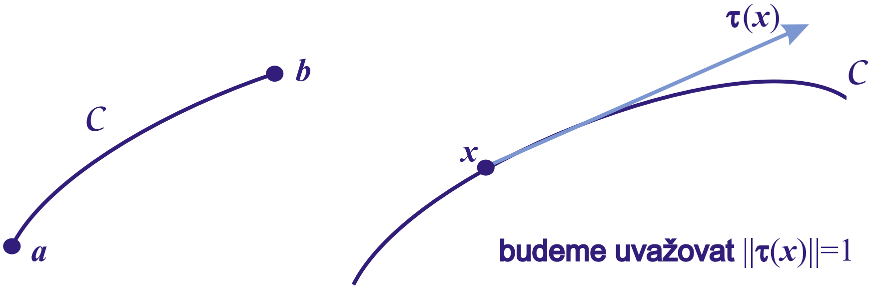
$$f_{\tau} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \bullet \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}) \tag{6.2}$$

Element práce:

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \bullet \mathbf{ds} = (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \bullet \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}))\ \mathrm{d}s \tag{6.3}$$

Orientovaná regulární křivka

Křivka $\mathcal{C}$ se nazývá orientovaná, pokud je zadán směr pohybu bodu po křivce. Orientace je dána počátečním a koncovým bodem křivky $\mathcal{C}$ nebo nenulovým spojitým vektorovým polem $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x})$ tečných vektorů ke křivce $\mathcal{C}$. Křivku opačně orientovanou ke křivce $\mathcal{C}$ budeme značit $-\mathcal{C}$.



Křivkový integrál 2. druhu

Definice 1. Nechť $\mathcal{C}$ je regulární křivka v $\mathbb{R}^n$, orientovaná jednotkovým tečným vektorovým polem $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x})$, a nechť $\boldsymbol{f}\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$ je daná vektorová funkce. Existuje-li neorientovaný křivkový integrál $\int_{\mathcal{C}} (\boldsymbol{f} \bullet \boldsymbol{\tau})\,\mathrm{d}s$, kde integrand je skalární součin zadané vektorové funkce $\boldsymbol{f}$ a jednotkového tečného vektorového pole $\boldsymbol{\tau}$, pak toto číslo nazýváme **křivkovým integrálem 2. druhu vektorové funkce $\boldsymbol{f}$ po křivce $\mathcal{C}$** (také **orientovaným křivkovým integrálem**) a používáme pro něj označení:

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}\,\mathbf{ds} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{C}} (\boldsymbol{f} \bullet \boldsymbol{\tau})\,\mathrm{d}s\,. \tag{6.4}$$

Pro tento integrál se také používá označení:

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}\,\mathbf{ds} \stackrel{\text{ozn}}{=} \int_{\mathcal{C}} f_1\,\mathrm{d}x_1 + f_2\,\mathrm{d}x_2 + \cdots f_n\,\mathrm{d}x_n \tag{6.5}$$

Vyjádření pomocí parametrizace – pro výpočet:

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f} \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{\mathcal{C}} (\boldsymbol{f} \bullet \boldsymbol{\tau})\, \mathrm{d}s = \int_a^b \left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(t)) \bullet \frac{\dot{\boldsymbol{g}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\|} \right) \|\dot{\boldsymbol{g}}(t)\|\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(t)) \bullet \dot{\boldsymbol{g}}(t)\, \mathrm{d}t$$

Při výpočtu vyjádříme křivkový integrál druhého druhu pomocí parametrizace jako určitý integrál:

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f} \mathrm{d}\boldsymbol{s} \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{C}} (\boldsymbol{f} \bullet \boldsymbol{\tau})\, \mathrm{d}s = \int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(t)) \bullet \dot{\boldsymbol{g}}(t)\, \mathrm{d}t \qquad (6.6)$$

Používaná symbolika:

Speciálně v $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}\mathbf{ds} &= \int\limits_{\mathcal{C}} (f_1(x,y), f_2(x,y)) \bullet (\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y) = \\ &= \int\limits_{\mathcal{C}} f_1(x,y)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y)\,\mathrm{d}y\,,\end{aligned}$$

Speciálně v $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}\mathbf{ds} &= \int\limits_{\mathcal{C}} (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)) \bullet (\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}z) = \\ &= \int\limits_{\mathcal{C}} f_1(x,y,z)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y,z)\,\mathrm{d}y + f_3(x,y,z)\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

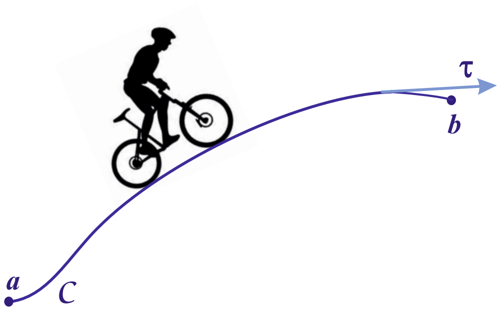
Pro křivkový integrál 2. druhu se také používá označení:

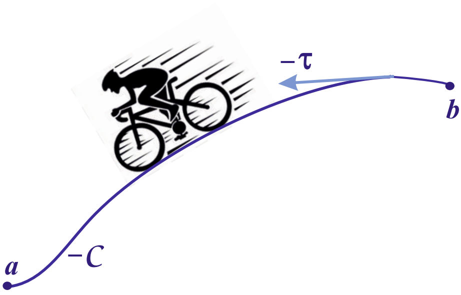
$$\mathbb{R}^2 \ \ldots\ \int\limits_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}\mathbf{ds} \overset{\text{ozn}}{=} \int\limits_{\mathcal{C}} f_1(x,y)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y)\,\mathrm{d}y$$

(6.7)

$$\mathbb{R}^3 \ \ldots\ \int\limits_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}\mathbf{ds} \overset{\text{ozn}}{=} \int\limits_{\mathcal{C}} f_1(x,y)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y)\,\mathrm{d}y + f_3(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

Poznámka.
Viděli jsme, že představuje-li $\boldsymbol{f}$ silové vektorové pole působící na orientované křivce $\mathcal{C}$, pak integrál $\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}\,\mathbf{ds}$ udává práci, kterou vykoná silové pole $\boldsymbol{f}$, když pohybuje hmotným bodem po křivce $\mathcal{C}$ ve smyslu určeném zadanou orientací od jejího počátečního bodu do bodu koncového. Z toho je také vidět, proč při změně orientace křivky změní hodnota integrálu své znaménko na opačné.





Vlastnosti křivkového integrálu 2. druhu

Nechť $\mathcal{C}$ je orientovaná prostá regulární křivka s parametrizací $\boldsymbol{g}(t)$, nechť $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ jsou vektorové funkce definované na křivce $\mathcal{C}$ a nechť α, β jsou reálná čísla.

1. Závislost na orientaci

Je-li $\mathcal{C}$ křivka, kterou dostaneme z křivky $\mathcal{C}$ změnou její orientace na opačnou, pak platí

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}\,d\boldsymbol{s} = -\int_{-\mathcal{C}} \boldsymbol{f}\,d\boldsymbol{s}, \tag{6.8}$$

jestliže jeden z integrálů existuje.

Poznámka.
Z této vlastnosti plyne, že když zaměníme danou parametrizaci za parametrizaci indukující opačnou orientaci, integrál změní znaménko.

Linearita křivkového integrálu

$$\int_{\mathcal{C}} (\alpha \boldsymbol{f}_1 + \beta \boldsymbol{f}_2)\,\mathbf{ds} = \alpha \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}_1\,\mathbf{ds} + \beta \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}_2\,\mathbf{ds}, \tag{6.9}$$

má-li pravá strana rovnosti smysl.

Aditivita vzhledem k integračnímu oboru

Je-li $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ a oblouky $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ jsou orientovány tak, že koncový bod oblouku $\mathcal{C}_1$ je počátečním bodem oblouku $\mathcal{C}_2$, pak platí rovnost

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}\mathbf{ds} = \int_{\mathcal{C}_1} \boldsymbol{f}\mathbf{ds} + \int_{\mathcal{C}_2} \boldsymbol{f}\mathbf{ds}, \tag{6.10}$$

má-li jedna strana rovnosti smysl.

☛ ***Příklad 3.*** Najděte křivkový integrál $\int_{\mathcal{C}} (2-y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$ po části cykloidy $\mathcal{C}$ dané parametrickými rovnicemi

$$x = t - \sin t, \qquad y = 1 - \cos t, \qquad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Řešení.

Integrovaná funkce: $\boldsymbol{f}(x,y) = (2-y, x)$

Parametrizace: $\boldsymbol{g}(t) = (x,y) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t)$

Tečný vektor: $\dot{\boldsymbol{g}}(t) = (1-\cos t, \sin t),\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$$\int_{\mathcal{C}} (2-y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(t)) \bullet \dot{\boldsymbol{g}}(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} (2-(1-\cos t),\ t - \sin t) \bullet (\underline{1-\cos t}, \underline{\underline{\sin t}})\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big((1+\cos t)\underline{(1-\cos t)} + (t - \sin t)\,\underline{\underline{\sin t}} \Big)\,\mathrm{d}t = -2\pi$$

Poznámka. Také můžeme psát:

$$x = t - \sin t, \qquad y = 1 - \cos t, \qquad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

$$\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t = (1 - \cos t)\,\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}y = y'(t)\,\mathrm{d}t = \sin t\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{\mathcal{C}} (2 - y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^{2\pi} \big((1 + \cos t)(1 - \cos t) + (t - \sin t)\sin t\big)\,\mathrm{d}t = -2\pi$$

Neměli bychom však tento postup brát čistě mechanicky, ale stále bychom měli mít na paměti, že počítáme křivkový integrál druhého druhu pro vektorovou funkci $\boldsymbol{f}(x, y) = (2 - y, x)$.

V dalším budeme používat zápis z předchozí stránky, který pak využijeme i při hledání plošných integrálů.

☛ ***Příklad 4.*** Nalezněte integrál $\int_{\mathcal{C}} (x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$, kde $\mathcal{C}$ je úsečka s počátečním bodem $A = (2,3)$ a koncovým bodem $B = (3,5)$.

Řešení.

$$
\begin{aligned}
\text{Integrovaná funkce:} \quad & \boldsymbol{f}(x,y) &=& \ (x-y, x+y) \\
\text{Parametrizace:} \quad & (x,y) &=& \ A + t(B-A) = (2,3) + t(1,2) \\
& \text{tj. } \boldsymbol{g}(t) &=& \ (2+t, 3+2t), \ t \in \langle 0,1 \rangle \\
\text{Tečný vektor:} \quad & \dot{\boldsymbol{g}}(t) &=& \ (1,2)
\end{aligned}
$$

$$
\int_{\mathcal{C}} (x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(t)) \bullet \dot{\boldsymbol{g}}(t)\,\mathrm{d}t =
$$

$$
= \int_0^1 \big((2+t) - (3+2t), (2+t) + (3+2t)\big) \bullet (1,2)\,\mathrm{d}t =
$$

$$
= \int_0^1 \big((-1-t)\cdot 1 + (5+3t)\cdot 2\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (9+5t)\,\mathrm{d}t =
$$

$$
= \left[9t + \tfrac{5}{2}t^2\right]_0^1 = 23/2
$$

☛ ***Příklad 5.*** Máme najít hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{C}} (x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$$

po křivce $\mathcal{C}$, která je částí grafu funkce $f(x) = x^2$, $x \in \langle 0, 2\rangle$. Křivka je orientována tak, že počáteční bod je $(0, 0)$.

Řešení.

$$\begin{aligned} \text{Integrovaná funkce:} \quad \boldsymbol{f}(x, y) &= (x - y, x + y) \\ \text{Parametrizace:} \quad \boldsymbol{g}(t) &= (t, t^2),\ t \in \langle 0, 2\rangle \\ \text{Tečný vektor:} \quad \dot{\boldsymbol{g}}(t) &= (1, 2t) \end{aligned}$$

Počáteční bod: $\boldsymbol{g}(0) = (0, 0) \Rightarrow$ souhlasná orientace

$$\int_{\mathcal{C}} (x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(t - t^2, t + t^2\right) \bullet (1, 2t)\ \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^2 \left((t - t^2)\cdot 1 + (t + t^2)\cdot 2t\right)\ \mathrm{d}t = \int_0^2 (t + t^2 + 2t^3)\,\mathrm{d}t = 38/3$$

☛ ***Příklad 6.*** Máme najít hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{C}} (x - y)\,\mathrm{d}x + (x + y)\,\mathrm{d}y$$

po křivce $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x = y^2, \; y \in \langle 0, 2\rangle\}$ orientované tak, že počátečním bodem je $(0, 0)$.

Řešení. Nyní bude vhodné zvolit $y = t$, a tedy $x = t^2$:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Integrovaná funkce:} & \boldsymbol{f}(x, y) & = & (x - y, x + y) \\ \text{Parametrizace:} & \boldsymbol{g}(t) & = & (t^2, t), \; t \in \langle 0, 2\rangle \\ \text{Tečný vektor:} & \dot{\boldsymbol{g}}(t) & = & (2t, 1) \end{array}$$

Počáteční bod: $\boldsymbol{g}(0) = (0, 0) \;\Rightarrow\;$ souhlasná orientace

$$\int_{\mathcal{C}} (x - y)\,\mathrm{d}x + (x + y)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(t^2 - t, t^2 + t\right) \bullet (2t, 1)\;\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^2 \left((t^2 - t) \cdot 2t + (t^2 + t) \cdot 1\right)\;\mathrm{d}t = \int_0^2 \left(2t^3 - t^2 + t\right)\;\mathrm{d}t = 22/3$$

☛ ***Příklad 7.*** Najděte integrál

$$\int_{\mathcal{C}} (y^2 + z)\,\mathrm{d}x - xy\,\mathrm{d}y + (x + y + yz)\,\mathrm{d}z\,,$$

kde $\mathcal{C}$ je křivka daná parametrickými rovnicemi

$$x = 3\cos\varphi, \qquad y = 3\sin\varphi, \qquad z = \varphi, \qquad \varphi \in (0, 2\pi),$$

tedy jeden závit šroubovice s poloměrem 3 a stoupáním 2π, orientovaný tak, že počátečním bodem je bod $A = (3, 0, 2\pi)$ a koncovým bodem je bod $B = (3, 0, 0)$.

Řešení.

Integrovaná funkce: $\boldsymbol{f}(x, y, z) \;=\; (y^2 + z, xy, x + y + yz)$

Parametrizace: $\boldsymbol{g}(\varphi) \;=\; (3\cos\varphi, 3\sin\varphi, \varphi),\;\; \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$

Tečný vektor: $\dot{\boldsymbol{g}}(\varphi) \;=\; (-3\sin\varphi, 3\cos\varphi, 1)$

Orientace: $\boldsymbol{g}(0) = (3, 0, 0) \;\Rightarrow\;$ počáteční bod je pro naši parametrizaci měl být naopak koncový, orientace je tedy **opačná** než orientace zadaná. Parametrizaci můžeme použít, ale musíme si uvědomit, že by nám integrál vyšel s opačným znaménkem. Dáme-li ovšem hned při prvním vyjádření pomocí parametrizace před integrál znaménko minus, bude už integrál vycházet správně:

$$\int_{\mathcal{C}} (y^2 + z)\,\mathrm{d}x \; - \; xy\,\mathrm{d}y \; + \; (x + y + yz)\,\mathrm{d}z =$$

$$= - \int_0^{2\pi} \left(9\sin^2\varphi + \varphi, -9\sin\varphi\cos\varphi, 3\cos\varphi + 3\sin\varphi + 3\varphi\sin\varphi\right) \bullet$$

$$\bullet\,(-3\sin\varphi, 3\cos\varphi, 1)\;\mathrm{d}\varphi =$$

$$= - \int_0^{2\pi} \left((9\sin^2\varphi + \varphi)\,(-3\sin t) - 9\sin\varphi\cos\varphi \;\cdot\; 3\cos\varphi + \right.$$

$$\left. + (3\cos\varphi + 3\sin\varphi + 3\varphi\sin\varphi) \;\cdot\; 1\right)\;\mathrm{d}\varphi$$

$$= -3\int_0^{2\pi} (\cos\varphi - 8\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 0$$

☛ ***Příklad 8.*** Vypočítejte integrál $I = \int_{c} (x+1)\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$ po části kružnice se středem v počátku a poloměrem R, která leží v prvním kvadrantu a začíná v bodě $(0, R)$.

Řešení.

$$\begin{aligned}
\text{Integrovaná funkce: } \boldsymbol{f}(x,y) &= (y, x+1) \\
\text{Parametrizace: } \boldsymbol{g}(\varphi) &= (R\cos\varphi, R\sin\varphi),\ \ \varphi \in \langle 0, \tfrac{\pi}{2}\pi\rangle \\
\text{Tečný vektor: } \dot{\boldsymbol{g}}(\varphi) &= (-R\sin\varphi, R\cos\varphi)
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{g}(0) = (R, 0),\ \boldsymbol{g}(\pi/2) = (0, R)\ \Rightarrow$ opačná orientace

$$I = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R\sin\varphi, R\cos\varphi + 1) \bullet (-R\sin\varphi, R\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-R^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi + R\cos\varphi\right)\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= -R\int_0^{\frac{\pi}{2}} (R\cos 2\varphi + \cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = -R$$

☛ ***Příklad 9.*** Nechť $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru osy x, y, z. Najděte práci silového pole $\boldsymbol{f} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + (x + y - 1)\boldsymbol{k}$ po úsečce AB, kde $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 3, 4)$.

Řešení. Integrovaná funkce je podle zadání:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(x, y, z) &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + (x + y - 1)(0, 0, 1)\\ &= (x,\ y,\ x + y - 1)\end{aligned}$$

Úsečka AB: $(x, y, z) = A + t(B - A) = (1, 1, 1) + t(1, 2, 3)$

$$\begin{aligned}\text{Parametrizace:} \quad \boldsymbol{g}(t) &= (1 + t, 1 + 2t, 1 + 3t),\ t \in \langle 0, 1\rangle\\ \text{Tečný vektor:} \quad \dot{\boldsymbol{g}}(t) &= (1, 2, 3)\end{aligned}$$

$\boldsymbol{g}(0) = (1, 1, 1) = A$ $\Rightarrow$ souhlasná orientace

$$\int_C \boldsymbol{f}\,\mathbf{d}\boldsymbol{s} = \int_0^1 (1 + t, 1 + 2t, 1 + t + 1 + 2t - 1) \bullet (1, 2, 3) =$$

$$= \int_0^1 ((1 + t) \cdot 1 + (1 + 2t) \cdot 2 + (1 + 3t) \cdot 3)\ \mathrm{d}t = 13$$

☛ ***Příklad 10.*** Nechť $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru osy x, y, z. Najděte práci silového pole $\boldsymbol{f} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + (xz - y)\boldsymbol{k}$ po křivce $\mathcal{C}$ zadané parametrizací $\boldsymbol{x}(t) = t^2\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + 4t^3\boldsymbol{k}$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, orientované tak, že počátečním bodem je bod $A = (1, 2, 4)$.

Řešení. Integrovanou funkci a parametrizaci lze rozepsat:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}(x, y, z) &= x(1,0,0) + y(0,1,0) + (xz - y)(0,0,1) \\ &= (x,\ y,\ xz - y) \\ (x, y, z) &= t^2(1,0,0) + 2t(0,1,0) + 4t^3(0,0,1), \text{ tedy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{parametrizace:} \quad \boldsymbol{g}(t) &= (t^2, 2t, 4t^3),\ t \in \langle 0, 1 \rangle \\ \text{tečný vektor:} \quad \dot{\boldsymbol{g}}(t) &= (2t, 2, 12t^2) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{g}(0) = (0,0,0)$, $\boldsymbol{g}(1) = (1,2,4) = A \ \Rightarrow$ opačná orientace

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f} \mathrm{d}\boldsymbol{s} = - \int_0^1 (t^2, 2t, t^2 \cdot 4t^3 - 2t) \bullet (2t, 2, 12t^2) =$$

$$= - \int_0^1 [t^2 \cdot 2t + 2t \cdot 2 + (4t^5 - 2t) \cdot 12t^2] \,\mathrm{d}t = -\frac{5}{2}$$

☛ ***Příklad 11.*** Máme najít hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{C}} x^2\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$$

po křivce

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \mid (x^2 + y^2 = z^2) \wedge (z = 1) \wedge (0 \leq x) \wedge (0 \leq y)\}$$

orientované tak, že bod $(1, 0, 1)$ je počátečním bodem.

Řešení.
Křivka $\mathcal{C}$ leží na kružnici, která je průsečnicí kuželové plochy a roviny $z = 1$. K nalezení parametrizace zkusme využít válcové souřadnice:

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = z.$$

V parametrizaci křivky potřebujeme jen jeden parametr, nyní máme tři nové proměnné. Dvě se nám však podaří eliminovat díky dvojici rovnic popisujících křivku:

$$r^2 = z^2, \quad \text{tj. } r = 1, \qquad z = 1$$

Parametrizace čtvrtkružnice $\mathcal{C}$ je tedy

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi, \quad z = 1, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},$$

tedy

parametrizace: $\boldsymbol{g}(\varphi) = (\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 1)\,,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

tečný vektor: $\dot{\boldsymbol{g}}(\varphi) = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$

$\boldsymbol{g}(0) = (1, 0, 1) \ \Rightarrow$ orientace souhlasí

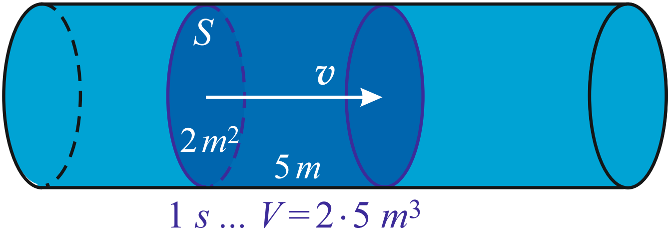
integrovaná funkce: $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (x^2, y, z)$

$$\int_{\mathcal{C}} x^2\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\varphi, \sin\varphi, 1) \bullet (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2\varphi\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{6}$$

6.3 Plošný integrál 2. druhu

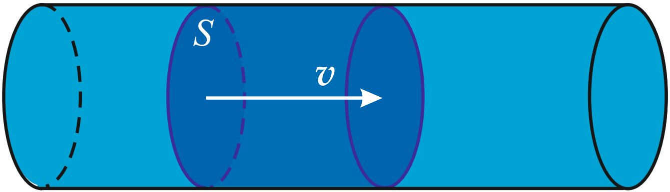
☛ ***Příklad 12.*** Představme si potrubí o průřezu $S = 2\ m^2$, jímž teče voda rychlostí $v = 5\ m/s$, a filtr namontovaný kolmo ke stěnám a zabírající celý průřez potrubí:



Průtok v místě filtru udává objem, který tímto filtrem proteče za jednu sekundu. Je-li tedy rychlost $5\ m/s$, pak za 1 sekundu voda urazí $5\ m$. To znamená, že voda, která filtrem proteče, vytvoří za jednu sekundu válec se základnou o obsahu $2\ m^2$ a výškou $5\ m$, její objem je tedy $V = 5 \cdot 2\ m^3 = 10\ m^3$.

Průtok je potom $10\ m^3/s$.

S pojmem **průtok** se setkáváme mj. ve zprávách o povodních. Například: „Průtok pod Karlovým postem dosáhl 5 000 kubíků za sekundu“ (tj. 5 000 metrů krychlových vody za sekundu).



$1\ s \ldots V = vS\ m^3$

Obecněji: je-li velikost rychlosti proudění potrubím $\boldsymbol{v\ m/s}$, pak za jednu sekundu proteče filtrem o obsahu $\boldsymbol{S}$ celkem $\boldsymbol{vS\ m^3}$ vody, průtok je tedy $\boldsymbol{vS\ m^3/s}$.

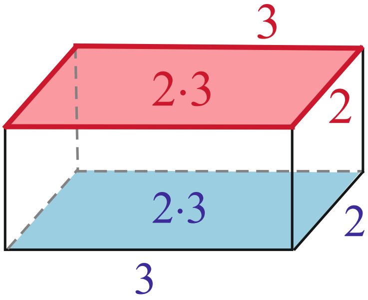
Tato veličina se také označuje jako **objemový tok plochou** S nebo **tok rychlosti** v **plochou** S.

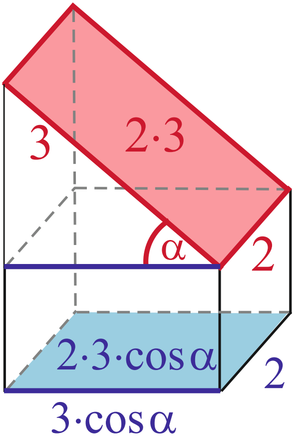
Není-li uvažovaná plocha (v předchozím případě filtr v potrubí) kolmá ke směru proudění, pak musíme obsah $\boldsymbol{S}$ vynásobit pouze velikostí složky rychlosti kolmé k dané ploše.

☛ ***Příklad 13.*** Představme si, že řemeslníci mění střešní okno široké 2 m a vysoké 3 m za nové a zrovna ve chvíli, kdy staré okno odmontují, přijde bouřka. Řemeslníci se leknou, utečou a otvor ve střeše nechají nezakrytý, načež přijde silný přívalový déšť, kdy během 1 hodiny spadne 70 mm srážek. Kolik vody nateče nechráněným otvorem do domu?

Řešení bude jistě záviset na tom, jaký sklon má střecha:

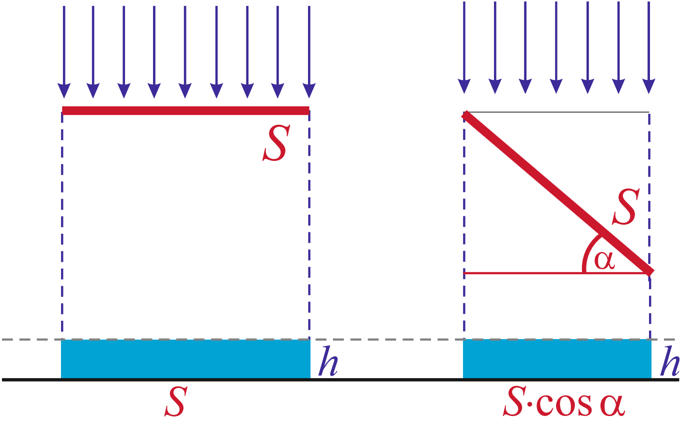
Je-li střecha plochá (vodorovná), pak bude déšť na podlaze pod oknem dopadat na obdélník o stejných rozměrech, tj. opět o stranách 2 a 3 metry. Je-li šikmá, pak bude dopadat na obdélník, který bude mít jednu stranu stejnou a druhou zkrácenou:





V případě ploché střechy tedy déšť dopadá přímo na plochu $S = 6\,m^2$, v případě šikmé střechy jen na plochu $S\cos\alpha$.

Kdybychom vodu padající dovnitř zachytili do nádoby, tak v prvním případě by byl objem Sh, v druhém $Sh\cos\alpha$:



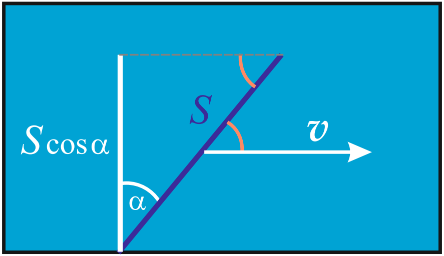
To by byl také tok danou plochou za jednu hodinu. Vidíme, že tok plochou, která není kolmá na rychlost proudění, je menší než když kolmá je – a je stejný jako **tok kolmým průmětem dané plochy do směru kolmého k rychlosti proudění**

(pro $\alpha = 0$ získáme Sh, pro $\alpha = \pi/2$ vyjde tok nulový).

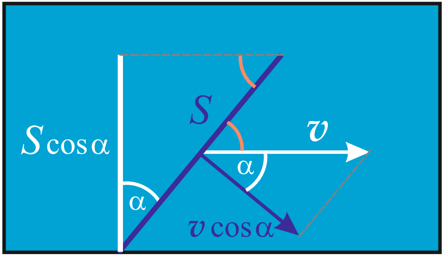
Vraťme se k filtru v potrubí. Není-li umístěn kolmo ke stěnám, pak tok, který jím proteče, je má velikost $vS\cos\alpha$ a je stejný jako **tok průmětem plochy do směru kolmého k rychlosti.** Protože

$$vS\cos\alpha = v\,(S\cos\alpha) = (v\cos\alpha)\,S$$

(stále násobíme stejná čísla, jen v jiném pořadí), vidíme, že stejný výsledek dostaneme také tak, že vynásobíme celý obsah S **průmětem rychlosti do směru kolmého k této ploše, tj. do směru normály:**



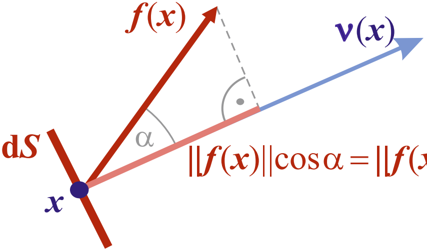
$1\ s \ldots\ V = v\,(S\cos\alpha)\ [m^3]$



$1\ s \ldots\ V = (v\cos\alpha)\,S\ [m^3]$

Tok vektorového pole *f* plochou $\mathcal{S}$

Pro složitější plochu $\mathcal{S}$ můžeme celkový tok dané vektorové funkce ***f*** touto plochou hledat jako součet toků funkce ***f*** malými elementy plochy $\mathbf{d}\boldsymbol{S}$. Pro konkrétní element plochy $\mathbf{d}\boldsymbol{S}$ najdeme průmět funkce ***f*** do směru normály a ten pak vynásobíme obsahem $\mathrm{d}S$:



$$\|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\| = 1$$

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|\cos\alpha = \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|\cdot 1\cdot\cos\alpha = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\bullet\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$$

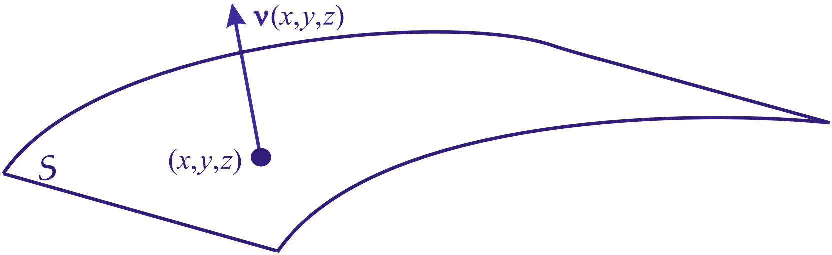
Element toku veličiny *f*:

$$(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\bullet\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}S$$

Stejně jako u křivkových integrálů 2. druhu si i zde můžeme uvědomit, že výraz $\|\boldsymbol{f}\|\cos\alpha$ není nic jiného než skalární součin vektoru ***f*** a jednotkového vektoru ve směru, do kterého promítáme, tedy **jednotkového normálového vektoru ν** .

Orientovaná regulární plocha

Plocha $\mathcal{S}$ se nazývá orientovaná, pokud je na ní zadáno spojité vektorové pole $\boldsymbol{\nu}(x, y, z)$ normálových vektorů k ploše $\mathcal{C}$. Plochu opačně orientovanou k ploše $\mathcal{S}$ budeme značit $-\mathcal{S}$.



Jinými slovy: v případě toku je důležitý směr (je například rozdíl, jestli nám voda teče z koupelny do odpadu, nebo naopak), proto musíme specifikovat nejen plochu, pro kterou tok hledáme, ale také to, který směr považujeme za kladný – a to bude v každém bodě plochy $\mathcal{S}$ směr zadaného normálového vektoru. Podmínka spojitosti normálového pole potom zaručuje, že směr se nikde nebude měnit skokem.

Plošný integrál 2. druhu

Definice 2. Nechť $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ je regulární plocha orientovaná jednotkovým normálovým vektorovým polem $\boldsymbol{\nu}$, nechť $\boldsymbol{f}\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3$ je dané vektorové pole. Existuje-li neorientovaný plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{f} \bullet \boldsymbol{\nu})\, \mathrm{d}S$, kde integrand je skalární součin zadané vektorové funkce $\boldsymbol{f}$ a jednotkového normálového vektorového pole $\boldsymbol{\nu}$, pak pro toto číslo nazýváme **plošným integrálem 2. druhu vektorového pole $\boldsymbol{f}$ po ploše** $\mathcal{S}$ (také **orientovaným plošným integrálem**) a používáme pro něj označení

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{f}\, \mathrm{d}\boldsymbol{S} \overset{\text{def}}{=} \iint_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{f} \bullet \boldsymbol{\nu})\, \mathrm{d}S\,. \tag{6.11}$$

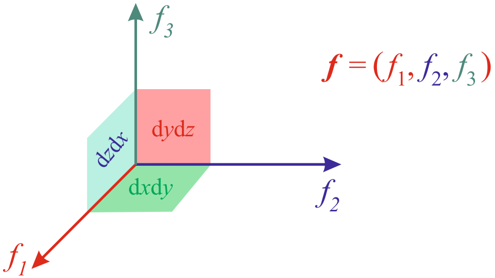
Pro tento integrál se také používá označení:

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{f}\, \mathrm{d}\boldsymbol{S} \overset{\text{ozn}}{=} \iint_{\mathcal{S}} f_1\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z + f_2\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x + f_3\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \tag{6.12}$$

Používané označení

$$\iint_{S} \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \overset{\text{ozn}}{=} \iint_{S} f_1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + f_2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + f_3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{6.13}$$

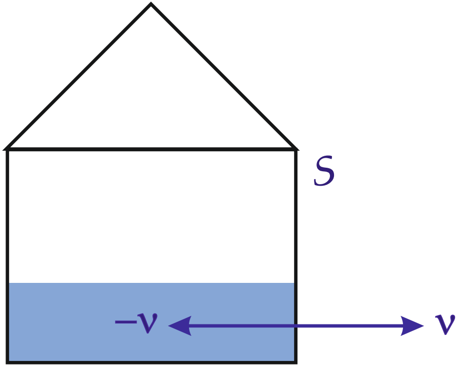
můžeme intuitivně chápat tak, že element plochy promítneme do roviny yz, zx a xy a výsledný tok získáme jako součet toků těmito průměty. Pro rovinu yz tak uvažujeme tok elementem obsahu $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Složka f_1 dané funkce je kolmá k této rovině, ostatní složky jsou s ní rovnoběžné a k toku nepřispívají, tok ploškou $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ je proto $f_1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Podobně pro zbývající složky.



Matematicky je vztah (6.13) odvozen v dodatku na str. 60.

Pro opačně orientovanou plochu:

$$\iint_{-\mathcal{S}} \boldsymbol{f} \,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{f} \,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{6.14}$$



Změníme-li orientaci plochy na opačnou, pak bude mít tok stejnou velikost, ale opačné znaménko.

Vyjádření pomocí parametrizace – pro výpočet:

Při výpočtu **plošného integrálu 1. druhu** jsme postupovali tak, že jsme nalezli **parametrizaci,** tj. vektorovou funkci dvou proměnných, pomocí níž vyjádříme libovolný bod dané plochy $\mathcal{S}$:

$$(x, y, z) = \boldsymbol{g}(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v)).$$

Derivací jednotlivých složek jsme našli **tečné vektory**

$$\boldsymbol{t}_u = \frac{\partial \boldsymbol{g}(u, v)}{\partial u}, \qquad \boldsymbol{t}_v = \frac{\partial \boldsymbol{g}(u, v)}{\partial v},$$

a pomocí vektorového součinu jsme nalezli **normálový vektor**

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v$$

Element obsahu pak byl roven $\mathrm{d}S = \|\boldsymbol{n}\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$ **.**

Pro dosazení do definičního vzahu (6.11) potřebujeme **jednotkový normálový vektor ν.** Náš vektor n je sice normálový, ale velikost může být jakákoli. Vydělíme-li ho však jeho velikostí, získáme vektor stejného směru a délky jedna (vzpomeňte si na první semestr, kdy jsme například hledali derivaci ve směru a potřebovali jednotkový vektor daného směru). Můžeme tedy psát:

$$\nu = \frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|}$$

Po dosazení do (6.14) tak dostáváme:

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{f}\, \mathrm{d}S \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{f} \bullet \nu)\, \mathrm{d}S =$$

$$= \iint_{M} \left(\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{g}(u, v)) \bullet \frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|} \right) \|\boldsymbol{n}\|\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}u =$$

$$= \iint_{M} \left(\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{g}(u, v)) \bullet \boldsymbol{n} \right)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$$

Při výpočtu vyjádříme plošný integrál 2. druhu pomocí parametrizace jako dvojný integrál:

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{f}\,\mathbf{d}\boldsymbol{S} \overset{\text{ozn}}{=} \iint_{\mathcal{S}} f_1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + f_2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + f_3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$\overset{\text{def}}{=} \iint_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{f} \bullet \boldsymbol{\nu})\,\mathrm{d}S =$$

$$= \iint_M \left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(u,v)) \bullet \boldsymbol{n}\right)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,, \tag{6.15}$$

kde $\boldsymbol{n}$ je normálový vektor

$$\boldsymbol{n} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v}(u,v)\right).$$

Plošný integrál 2. druhu je tedy definovaný pomocí plošného integrálu 1. druhu, ale pro výpočet opět budeme používat parametrizaci. Jen místo toho, abychom zadanou skalární funkci (s dosazenou parametrizací) vynásobili velikostí normálového vektoru $\boldsymbol{n}$, tak nyní zadanou vektorovou funkci vynásobíme celým vektorem ***n***, a to skalárně, abychom jako výsledek získali skalární funkci a mohli počítat dvojný integrál.

Poznámka. Výraz

$$\boldsymbol{f} \bullet \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v} \right)$$

je tzv. **smíšený součin vektorů.** Můžeme ho vyjádřit také jako determinant:

$$\boldsymbol{f} \bullet \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v} \right) = \det \begin{pmatrix} f_1, & f_2, & f_3 \\ \frac{\partial g_1}{\partial u_1}, & \frac{\partial g_2}{\partial u_1}, & \frac{\partial g_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial u_2}, & \frac{\partial g_2}{\partial u_2}, & \frac{\partial g_3}{\partial u_2} \end{pmatrix} .$$

☛ ***Příklad 14.*** Nalezněte tok vektorového pole

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = (z - 1, 2x, 2y)$$

částí roviny $2x + y + z = 2$ ležící v prvním oktantu a orientované směrem k počátku.

Řešení. Z rovnice roviny dostáváme: $z = 2 - 2x - y$, proto bude nejjednodušší uvažovat $x = u,\ \ y = v,\ \ z = 2 - 2u - v.$

Plocha má ležet v prvním oktantu, tj. $x, y, z \geq 0$, proto:

$0 \leq u, \qquad 0 \leq v, \qquad 0 \leq 2 - 2u - v$, tj. $0 \leq v \leq 2 - 2u$

Z poslední podmínky plyne také:

$0 \leq 2 - 2u$, tj. $2u \leq 2$, proto $0 \leq u \leq 1$

Celkem tak získáme parametrizaci:

$$\boldsymbol{g}(u, v) = (u, v, 2 - 2u - v), \quad 0 \leq v \leq 2 - 2u,\ 0 \leq u \leq 1$$

Máme tedy parametrizaci:

$$\boldsymbol{g}(u,v)=(u,v,2-2u-v),\quad 0\le v\le 2-2u,\ 0\le u\le 1$$

a hledáme tok funkce

$$f(\boldsymbol{g}(u,v))=(2-2u-v-1,2u,2v)=(1-2u-v,2u,2v)$$

danou plochou.

Tečné vektory: $$\boldsymbol{t}_u=\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u}=(1,0,-2)$$
$$\boldsymbol{t}_v=\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v}=(0,1,-1)$$

Normálový vektor: $\boldsymbol{n}=(1,0,-2)\times(0,1,-1)=(2,1,1)$

Orientace: normálový vektor $(2,1,1)$ směřuje v bodech zadané plochy pryč od počátku, orientace je proto **opačná** než bylo zadáno. Ničemu to ale nevadí, parametrizaci můžeme použít i tak, jen by nám tok vyšel s opačným znaménkem, proto před integrál doplníme znaménko minus:

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{f}\, \mathbf{d}\boldsymbol{S} = - \int_0^2 \int_0^{2-2u} \left(\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{g}(u,v)\right) \bullet \boldsymbol{n}\right)\ \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u =$$

$$= - \int_0^2 \int_0^{2-2u} (1 - 2u - v, 2u, 2v) \bullet (2, 1, 1)\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u =$$

$$= - \int_0^2 \int_0^{2-2u} (2 - 4u - 2v + 2u + 2v)\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u =$$

$$- \int_0^2 \int_0^{2-2u} (2 - 2u)\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u = - \int_0^2 [2(v - uv)]_0^{2-2u} =$$

$$= -2 \int_0^2 \left(2 - 2u - 2u - 2u^2\right)\ \mathrm{d}u = -2 \int_0^2 \left(2 - 4u - 2u^2\right)\ \mathrm{d}u =$$

$$= -2 \left[2u - \tfrac{4}{2}u^2 - \tfrac{2}{3}u^3\right]_0^1 = -2(2 - 2 - \tfrac{2}{3}) = 4/3$$

☛ ***Příklad 15.*** Nechť ***i***, ***j***, ***k*** jsou jednotkové vektory ve směru osy x, y, z. Vypočítejte tok vektorového pole

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$$

částí sféry $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2+y^2+z^2 = 1) \wedge (z \geq 0)\}$ orientované vnějším normálovým polem.

Řešení. Zadanou vektorovou funkci můžeme zapsat jako vektor:

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z^2(0, 0, 1) = (x, y, z^2)$$

Parametrizace – 1. možnost: Plochu můžeme parametrizovat podobně jako v předchozím případě tak, že položíme $x = u$, $y = v$ a z vyjádříme z rovnice plochy. Tím dostaneme poměrně jednoduchý výpočet tečných vektorů i vektoru normály, ale trochu „ošklivější“ meze. Těch si zatím nebudeme příliš všímat a teprve až budeme počítat dvojný integrál, tak použijeme substituci a proměnné u, v vyjádříme v polárních souřadnicích. Tedy:

Parametrizace: $\boldsymbol{g}(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}), \quad u^2+v^2 \le 1$

Tečné vektory: $\boldsymbol{t}_u = \dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u} = \left(1, 0, \dfrac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)$

$$\boldsymbol{t}_v = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)$$

Normálový vektor: $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v = \left(\dfrac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \dfrac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 1\right)$

Daná funkce: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(u,v)) = (u, v, 1-u^2-v^2)$

Orientace: například v bodě (0,0,1), tj. pro $(u,v) = (0,0)$, je v naší parametrizaci $\boldsymbol{n} = (0,0,1)$. Tento vektor míří ven ze sféry, orientace indukovaná naší parametrizací je proto souhlasná se zadanou orientací.

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{f}\ \mathbf{d}\boldsymbol{S} = \iint_{u^2+v^2\le 1} (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(u,v))\bullet \boldsymbol{n})\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$

$$= \iint_{u^2+v^2\le 1} (u, v, 1-u^2-v^2)\bullet\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 1\right)\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \iint_{u^2+v^2\le 1}\left(\frac{u^2+v^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}+1-u^2-v^2\right)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$

$$= \left|\begin{array}{l}\text{Substituce:}\\ u = r\cos\varphi \\ v = r\sin\varphi \\ 0\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{array}\right| = \int_0^1\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}+1-r^2\right)r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r =$$

$$= \pi\int_0^1\left(\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}+1-r^2\right)2r\,\mathrm{d}r = \left|\begin{array}{l} t = 1-r^2 \\ \mathrm{d}t = -2r\,\mathrm{d}r \\ 0\to 1,\ 1\to 0\end{array}\right| =$$

$$= -\pi\int_1^0\left(\frac{1-t}{\sqrt{t}}+t\right)\mathrm{d}t = \int_0^1\left(t^{-\frac{1}{2}}-t^{\frac{1}{2}}+t\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \pi\left[2t^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \pi\left(2-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right) = \pi\,\frac{12-4+3}{6} = \underline{\underline{\frac{11\pi}{6}}}$$

Při předchozím postupu jsme měli poměrně jednoduchou parametrizaci, ale při výpočtu dvojného integrálu bylo třeba provést substituci do polárních souřadnic.

Při výpočtu se nám objevil Jakobián – ale pozor, bylo to **až při řešení dvojného integrálu, kdy bylo potřeba provést změnu souřadnic, nikoli při samotném sestavování plošného integrálu,** kdy vycházíme z úvah o toku plochou s danou parametrizací a **používáme vztah (6.15).**

Postupovat můžeme také tak, že polární souřadnice pro x, y použijeme hned v parametrizaci. Pak již nebude nutné provádět substituci ve dvojném integrálu, protože jej budeme mít hned od začátku vyjádřený v polárních souřadnicích a budeme znát meze, ale zase budou vycházet o trochu složitější výrazy v tečných vektorech. V obou případech se nakonec dostaneme ke stejnému integrálu.

Parametrizace – 2. možnost:

Zkusme tedy rovnou $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$. Z rovnice plochy plyne $z = \sqrt{1-r^2}$. Tím dostaneme **parametrizaci:**

$$\boldsymbol{g}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \sqrt{1-r^2}), \quad 0 < r < 1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

Tečné vektory: $$\boldsymbol{t}_r = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial r} = \left(\cos\varphi, \sin\varphi, \frac{-r}{\sqrt{1-r^2}}\right) \dots \text{ pro } r < 1$$

$$\boldsymbol{t}_\varphi = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \varphi} = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0)$$

Normálový vektor: $$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_r \times \boldsymbol{t}_\varphi = \left(\frac{r^2\cos\varphi}{\sqrt{1-r^2}}, \frac{r^2\sin\varphi}{\sqrt{1-r^2}}, r\right)$$

Daná funkce: $$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(r,\varphi)) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 1-r^2)$$

Orientace: například pro $r = 0$ dostaneme bod $(0,0,1)$ a normálový vektor $\boldsymbol{n} = (0,0,1)$, který míří ven ze sféry, orientace daná naší parametrizací je proto souhlasná se zadanou orientací.

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f} \, d\mathbf{S} =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, 1-r^2\right) \bullet \left(\frac{r^2\cos\varphi}{\sqrt{1-r^2}}, \frac{r^2\sin\varphi}{\sqrt{1-r^2}}, r\right) \, d\varphi \, d$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^3\cos^2\varphi + r^3\sin^2\varphi}{\sqrt{1-r^2}} + (1-r^2)r\right) \, d\varphi \, dr =$$

$$= \pi \int_0^1 \left(\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} + 1 - r^2\right) \, 2r \, dr = \left| \begin{array}{l} t = 1 - r^2 \\ dt = -2r \, dr \\ 0 \to 1, \; 1 \to 0 \end{array} \right| =$$

$$= -\pi \int_1^0 \left(\frac{1-t}{\sqrt{t}} + t\right) \, dt = \int_0^1 \left(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}} + t\right) \, dt =$$

$$= \pi \left[2t^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \pi\left(2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \pi \, \frac{12 - 4 + 3}{6} = \underline{\underline{\frac{11\pi}{6}}}$$

☛ ***Příklad 16.*** Najděte plošný integrál

$$\iint_{\mathcal{S}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - (x+y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

přes plochu $\mathcal{S}$, která je částí paraboloidu

$$z = x^2 + y^2, \qquad z \leq 1,$$

orientovaného tak, že třetí složka normálového vektoru je záporná.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že integrovaná funkce má vzhledem k (6.12) tvar:

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = (0, -(x+y), z)\,.$$

Parametrizaci zkusme rovnou pomocí válcových souřadnic

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z\,.$$

Z rovnice plochy plyne:

$$z = r^2, \qquad r^2 \leq 1,\ \text{tj. } 0 < r \leq 1, \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Máme tedy **parametrizaci:**

$$\boldsymbol{g}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, r^2), \quad 0 < r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Tečné vektory: $$\boldsymbol{t}_r = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial r} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 2r)$$

$$\boldsymbol{t}_\varphi = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \varphi} = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0)$$

Normálový vektor: $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_r \times \boldsymbol{t}_\varphi = (-2r^2\cos\varphi, -2r^2\sin\varphi, r)$

Daná funkce: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(r,\varphi)) = (0, -r(\cos\varphi + \sin\varphi), r^2)$

Orientace: třetí složka normálového vektoru $\boldsymbol{n} = (-2r^2\cos\varphi, -2r^2\sin\varphi, r)$ je kladná, orientace daná naší parametrizací je tedy opačná, než jaká byla zadaná. Integrál by nám vyšel s opačným znaménkem, proto před něj musíme doplnit znamenko minus.

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{f} \,\mathbf{d}\boldsymbol{S} =$$

$$= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(0, -r(\cos\varphi + \sin\varphi), r^2\right) \bullet \left(-2r^2 \cos\varphi, -2r^2 \sin\varphi, r\right) \; \mathrm{d}r$$

$$= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(0 + 2r^3(\cos\varphi \sin\varphi + \sin^2\varphi) + r^3\right) \; \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r =$$

$$= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r^3(2\cos\varphi \sin\varphi + 2\sin^2\varphi + 1)\right) \; \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r =$$

$$= - \left[\tfrac{1}{4} r^4\right]_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\sin 2\varphi + 2 \cdot \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) + 1\right) \; \mathrm{d}\varphi =$$

$$= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (\sin 2\varphi + 2 - \cos 2\varphi) \; \mathrm{d}\varphi =$$

$$= -\frac{1}{4} \; \left(-\tfrac{1}{2} \cos 2\varphi + 2\varphi - \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi\right]_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{1}{4} \; \left[\left(-\tfrac{1}{2} + 4\pi - 0\right) - \left(-\tfrac{1}{2} + 0 + 0\right)\right] = -\frac{1}{4} \; (4\pi) = \underline{\underline{-\pi}}$$

☛ ***Příklad 17.*** Najděte plošný integrál

$$\iint_{\mathcal{S}} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

přes plochu kruhu $x^2 + y^2 \leq 1, z = 1$, orientovaného proti orientaci osy z.

Řešení. Zvolme **parametrizaci:**

$$\boldsymbol{g}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 1), \quad 0 < r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Tečné vektory: $\boldsymbol{t}_r = \dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial r} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$

$$\boldsymbol{t}_\varphi = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \varphi} = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0)$$

Normálový vektor: $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_r \times \boldsymbol{t}_\varphi = (0, 0, r)$

Daná funkce: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(r, \varphi)) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 1)$

Orientace: normálový vektor $\boldsymbol{n} = (0, 0, r)$, $r > 0$, má stejný směr jako osa z. Orientace daná naší parametrizací je tedy opačná než orientace zadaná. Integrál by nám vyšel s opačným znaménkem, proto před něj musíme doplnit znamenko minus.

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{f}\ \mathbf{d}\boldsymbol{S} = - \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 1) \bullet (0, 0, r)\ \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi =$$

$$= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi = -\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \underline{\underline{-\pi}}$$

☛ ***Příklad 18.*** Najděte plošný integrál

$$\iint_{\mathcal{S}} x^2 \, dy \, dz + z^2 \, dx \, dy$$

po části kuželové plochy $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq 1$, orientované vnějším normálovým polem.

Řešení. Zvolme **parametrizaci:**

$$\boldsymbol{g}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, r), \qquad 0 < r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Tečné vektory: $\boldsymbol{t}_r = \dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial r} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 1)$

$$\boldsymbol{t}_\varphi = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \varphi} = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0)$$

Normálový vektor: $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_r \times \boldsymbol{t}_\varphi = (-r \cos \varphi, -r \sin \varphi, r)$

Daná funkce: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(r, \varphi)) = (r^2 \cos^2 \varphi, 0, r^2)$

Orientace: například pro $r = 1$, $\varphi = 0$ dostaneme bod $(1, 0, 1)$ a normálový vektor $\boldsymbol{n} = (-1, 0, 1)$, který směřuje dovnitř paraboloidu. Orientace daná naší parametrizací je tedy opačná než orientace zadaná. Integrál by nám vyšel s opačným znaménkem, proto před něj musíme doplnit znamenko minus.

$$\iint_S \boldsymbol{f}\ \mathrm{d}\boldsymbol{S} =$$

$$= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r^2 \cos^2 \varphi, 0, r^2\right) \bullet \left(-r \cos \varphi, -r \sin \varphi, r\right)\ \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi =$$

$$= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(-r^3 \cos^3 \varphi + r^3\right)\ \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \left(\cos^3 \varphi - 1\right)\ \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \left[\tfrac{1}{4} r^4\right]_0^1 \int_0^{2\pi} \left((1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi - 1\right)\ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \tfrac{1}{4} \left[\sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi - \varphi\right]_0^{2\pi} = \tfrac{1}{4}(-2\pi) = \underline{\underline{-\pi/2}}$$

Odvození vztahu (6.12)

Použijeme-li na pravidlo pro smíšený součin, dostáváme

$$\boldsymbol{f} \bullet \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u_2} \right) = \det \begin{pmatrix} f_1, & f_2, & f_3 \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial u_1}, & \dfrac{\partial g_2}{\partial u_1}, & \dfrac{\partial g_3}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial u_2}, & \dfrac{\partial g_2}{\partial u_2}, & \dfrac{\partial g_3}{\partial u_2} \end{pmatrix},$$

a tedy

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{f} \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \iint_{I} (\boldsymbol{f} \bullet \boldsymbol{n})\, \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2 = \\
&= \iint_{I} (f_1 n_1 + f_2 n_2 + f_3 n_3)\, \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2 \\
&= \iint_{I} \left(f_1 \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_1} \frac{\partial g_3}{\partial u_2} - \frac{\partial g_3}{\partial u_1} \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \right) + \right. \qquad (6.16) \\
&+ f_2 \left(\frac{\partial g_3}{\partial u_1} \frac{\partial g_1}{\partial u_2} - \frac{\partial g_1}{\partial u_1} \frac{\partial g_3}{\partial u_2} \right) + \\
&+ \left. f_3 \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_1} \frac{\partial g_2}{\partial u_2} - \frac{\partial g_2}{\partial u_1} \frac{\partial g_1}{\partial u_2} \right) \right) \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2 .
\end{aligned}
$$

Pro plošný integrál 2. druhu se také používá zápis

$$
\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{f} \mathrm{d}S \equiv \iint_{\mathcal{S}} f_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3 + f_2\, \mathrm{d}x_3\, \mathrm{d}x_1 + f_3\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 . \qquad (6.17)
$$

Ukažme nyní jeho oprávněnost. Pro

$$x_1 = g_1(u_1, u_2),\ x_2 = g_2(u_1, u_2),\ x_3 = g_3(u_1, u_2) \tag{6.18}$$

je

$$\mathrm{d}x_1 = \frac{\partial g_1}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial g_1}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2,$$

$$\mathrm{d}x_2 = \frac{\partial g_2}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial g_2}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2, \tag{6.19}$$

$$\mathrm{d}x_3 = \frac{\partial g_3}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial g_3}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2.$$

Definujeme-li součin diferenciálů $\mathrm{d}u_i$ a $\mathrm{d}u_j$ tak, že požadujeme, aby platila rovnost $\mathrm{d}u_i\,\mathrm{d}u_j = -\,\mathrm{d}u_j\,\mathrm{d}u_i,\ i, j = 1, 2$, (jinak by tok plochou závisel na tom, v jakém pořadí zvolíme proměnné v parametrizaci), pak nutně platí $\mathrm{d}u_i\,\mathrm{d}u_i = 0\,,\ i = 1, 2$, takže dostáváme

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 &= \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial g_2}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2\right)\left(\frac{\partial g_3}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial g_3}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2\right) \\
&= \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_1}\frac{\partial g_3}{\partial u_2} - \frac{\partial g_3}{\partial u_1}\frac{\partial g_2}{\partial u_2}\right)\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2, \\
\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_1 &= \left(\frac{\partial g_3}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial g_3}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2\right)\left(\frac{\partial g_1}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial g_1}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2\right) \\
&= \left(\frac{\partial g_3}{\partial u_1}\frac{\partial g_1}{\partial u_2} - \frac{\partial g_1}{\partial u_1}\frac{\partial g_3}{\partial u_2}\right)\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2, \\
\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 &= \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial g_1}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2\right)\left(\frac{\partial g_2}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial g_2}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2\right) \\
&= \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_1}\frac{\partial g_2}{\partial u_2} - \frac{\partial g_2}{\partial u_1}\frac{\partial g_1}{\partial u_2}\right)\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2,
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

Dosadíme-li nyní do (6.17), dostaneme (6.16).