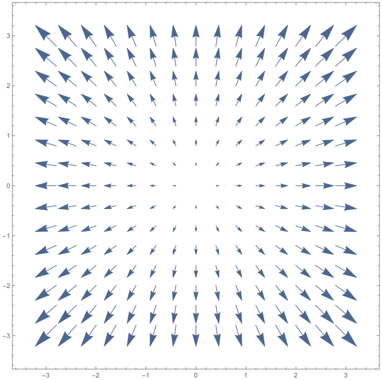
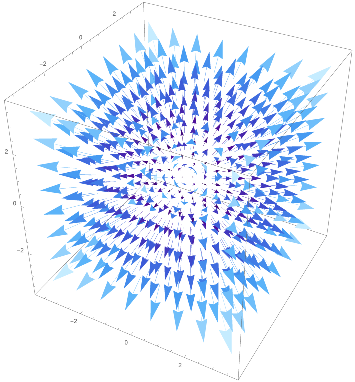
KAPITOLA 7

INTEGRÁLNÍ VĚTY

7.1 Vektorové pole

Je-li $\boldsymbol{f}$ vektorová funkce n reálných proměnných definovaná na množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, pak můžeme $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_n(\boldsymbol{x}))$ chápat jako vektor s počátečním bodem $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Vektorová funkce $\boldsymbol{f}$ tak určuje tzv. **vektorové pole** na množině Ω. Můžeme si například představit, že vektor udává směr a rychlost proudění kapaliny v daném bodě, intenzitu gravitačního nebo elektrostatického pole apod.V dalším budeme ztotožňovat vektorové pole s vektorovou funkcí, která ho popisuje.





7.2 Nezávislost křivkového integrálu 2. druhu na cestě

Z prvního semestru známe pojem **úplný diferenciál funkce více proměnných,**

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial z}\,\mathrm{d}z,$$

který udává celkový přírůstek dané funkce U odpovídající změně souřadnic o $(\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}z)$.

Představme si, že hledáme křivkový integrál druhého druhu

$$\int_c \boldsymbol{f}\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_c \boxed{f_1}\,\mathrm{d}x + \boxed{f_2}\,\mathrm{d}y + \boxed{f_3}\,\mathrm{d}z$$

a zrovna máme to štěstí, že složky $f_1,\ f_2,\ f_3$ jsou derivacemi jedné a té samé funkce U podle x, y, z. Pak je

$$\int_c \boldsymbol{f}\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_c \boxed{\frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial x}}\,\mathrm{d}x + \boxed{\frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial y}}\,\mathrm{d}y + \boxed{\frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial z}}\,\mathrm{d}z = \int_c \mathrm{d}U\,.$$

To znamená, že jdeme po dané křivce a sčítáme přírůstky funkce U, čímž získáme celkovou změnu U.

Je-li $\boldsymbol{a}$ počáteční bod a $\boldsymbol{b}$ koncový bod dané křivky křivky $\mathcal{C}$ a $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$ je spojitá funkce, pro kterou platí

$$f_1(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial x}, \quad f_2(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial y}, \quad f_3(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial z}, \tag{7.1}$$

neboli $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \operatorname{grad} U(\boldsymbol{x})$, potom

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f} \, \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{\mathcal{C}} f_1 \, \mathrm{d}x + f_2 \, \mathrm{d}y + f_3 \, \mathrm{d}z = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}U =$$

$$= U(b) - U(a) \,. \tag{7.2}$$

Místo výpočtu křivkového integrálu 2. druhu tedy v takovém případě stačí nalézt funkci U a jen do ní dosadit krajní body křivky. **Funkce U se nazývá potenciál vektorového pole f** a toto vektorové pole se nazývá **potenciálové.**

Vztah (7.2) zároveň znamená, že v potenciálovém poli křivkový integrál 2. druhu – tedy práce – nezávisí na cestě, ale jen na hodnotě potenciálu počátečním a koncovém bodě.

Je-li speciálně křivka $\mathcal{C}$ uzavřená, tedy koncový bod splývá s počátečním, což značíme kolečkem přes integrační znak, tak

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}\,\mathbf{ds} = U(a) - U(a) = 0\,.$$

Jinými slovy:

Je-li vektorové pole $\boldsymbol{f}$ potenciálové, pak křivkový integrál nezávisí na cestě a je roven

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}\,\mathbf{ds} = U(b) - U(a). \tag{7.3}$$

Pro libovolnou uzavřenou křivku $\mathcal{C}$ navíc platí:

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}\,\mathbf{ds} = 0\,. \tag{7.4}$$

Definice 1. Vektorové pole

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \ldots, f_n(\boldsymbol{x}))$$

se nazývá **potenciálové na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$**, jestliže existuje taková skalární funkce $U(\boldsymbol{x})$, že na Ω platí:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \operatorname{grad} U(\boldsymbol{x}), \tag{7.5}$$

$$\text{tj.} \qquad f_1(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \ldots \; f_n(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}.$$

Funkce $U(\boldsymbol{x})$ se nazývá **potenciál vektorového pole $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.**

Viděli jsme, že pro potenciálové pole platí (7.3) a (7.4). Vektorové pole splňující podmínku (7.4) se nazývá **konzervativní.** Lze dokázat, že **vektorové pole je potenciálové na množině Ω právě tehdy, když je konzervativní.** Existence potenciálu, nezávislost křivkového integrálu na cestě a nulová práce po uzavřené křivce jsou tedy ekvivalentní.

Jak zjistíme, že potenciál existuje?

Je-li vektorové pole potenciálové na množině Ω a má na této množině spojité parciální derivace, potom existují druhé derivace potenciálu U a jak víme z Calculu 1, nezáleží na pořadí derivování, tedy:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Pro každé $i, j = 1, 2, \dots, n$ tedy platí:

$$\frac{\partial f_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 U(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 U(\boldsymbol{x})}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j},$$

tedy

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}). \tag{7.6}$$

Jestliže pro nějakou dvojici indexů i, j podmínka (7.6) neplatí, pak potenciál neexistuje. Proto říkáme, že se jedná o nutnou podmínku existence potenciálu. Je-li navíc daná množina jednoduše souvislá (zhruba řečeno: nejsou v ní žádné díry), pak je podmínka (7.6) také postačující, neboli zaručuje existenci potenciálu.

Ověření existence potenciálu:

Má-li vektorové pole $\boldsymbol{f}$ na jednoduše souvislé množině Ω spojité parciální derivace, potom platí:

- V rovině $\mathbb{R}^2$:

  $\boldsymbol{f}$ je potenciálové právě tehdy, když platí:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(\boldsymbol{x}) \,. \tag{7.7}$$

- V prostoru $\mathbb{R}^3$:

  $\boldsymbol{f}$ je potenciálové právě tehdy, když platí:

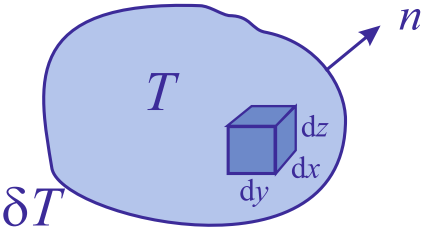
$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(\boldsymbol{x}) \,, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial z}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f_3}{\partial x}(\boldsymbol{x}) \,, \tag{7.8}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f_3}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \,.$$

7.3 Gaussova věta a její využití

Věta 1 (Gaussova). Nechť $H \subset \mathbb{R}^3$ je omezená, uzavřená, souvislá množina, jejíž hranice ∂T je uzavřená plocha orientovaná vnějším normálovým polem. Nechť $G \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená souvislá množina taková, že $T \subset G$ a nechť $\boldsymbol{f}$ je spojitě diferencovatelné vektorové pole na oblasti G. Pak platí rovnost:

$$\int_{\partial T} \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_T \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{7.9}$$



Divergence funkce $\boldsymbol{f}$:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

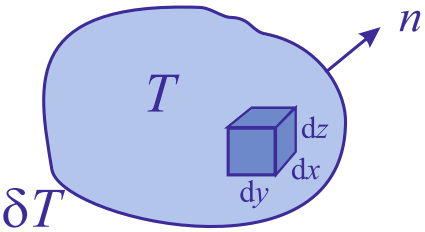
Gaussova věta udává vztah mezi plošným integrálem po uzavřené ploše a trojným integrálem přes oblast, kterou tato plocha ohraničuje.

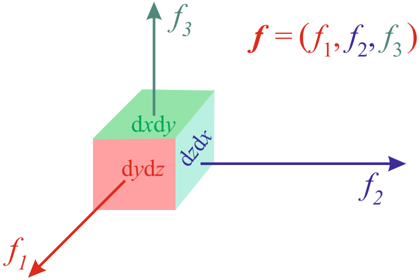
$$\int_{\partial T} \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_T \left(\mathrm{d}f_1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \mathrm{d}f_2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}f_3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right) =$$

$$= \iiint_T \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \frac{\partial f_2}{\partial y}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f_3}{\partial z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right) =$$

$$= \iiint_T \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= \iiint_T \operatorname{div}\boldsymbol{f}(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

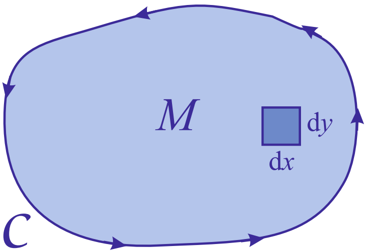


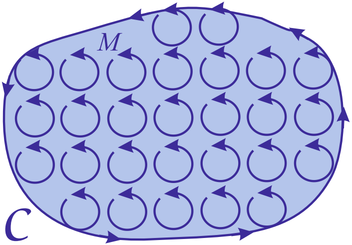


7.4 Greenova věta a její využití

Věta 2 (Green). *Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je omezená a uzavřená množina, jejíž hranicí je jediná kladně orientovaná uzavřená křivka $\mathcal{C}$* (v jiné terminologii prostá po částech hladká uzavřená křivka). *Nechť $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ je vektorové pole takové, že obě jeho složky f_1, f_2 mají v nějaké otevřené oblasti Ω obsahující množinu M spojité parciální derivace. Pak platí:*

$$\oint_{\mathcal{C}} f_1 \,\mathrm{d}x + f_2 \,\mathrm{d}y = \iint_M \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,. \qquad (7.10)$$





Rotace a cirkulace

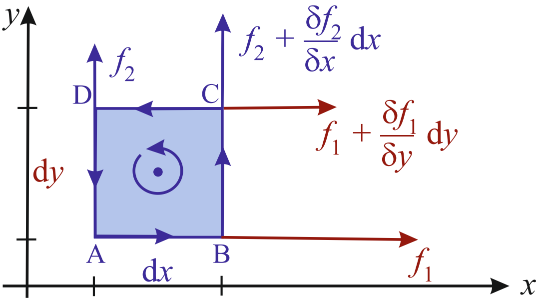
Při zavedení křivkového integrálu 2. druhu jsme si funkci $\boldsymbol{f}$ představovali jako sílu a integrál jako práci, kterou tato síla vykoná při pohybu po dané křivce. Podobně jako v případě plošných integrálů 2. druhu však funkci $\boldsymbol{f}$ můžeme chápat také jako **rychlost proudění**. Integrál po uzavřené křivce

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f} \mathbf{d}\boldsymbol{s} \tag{7.11}$$

se pak nazývá **cirkulací vektorového pole f po křivce $\mathcal{C}$**. Skalární součin funkce $\boldsymbol{f}$ a jednotkového tečného vektoru v tomto případě představuje složku rychlosti ve směru pohybu; kdybychom si křivku představili jako potrubí a integrál vynásobili průřezem tohoto potrubí a hustotou kapaliny, pak bychom získali celkovou hybnost vody, která cirkuluje v potrubí.

Rotace vzhledem k ose z

Uvažujme křivku $\mathcal{C}_0$, která je hranicí elementu oblasti v rovině xy o obsahu $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ a hledejme cirkulaci touto křivkou.



$$\oint_{\mathcal{C}_0} \mathbf{f}\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{AB} \mathbf{f}\mathrm{d}\mathbf{s} + \int_{BC} \mathbf{f}\mathrm{d}\mathbf{s} + \int_{CD} \mathbf{f}\mathrm{d}\mathbf{s} + \int_{DA} \mathbf{f}\mathrm{d}\mathbf{s} =$$

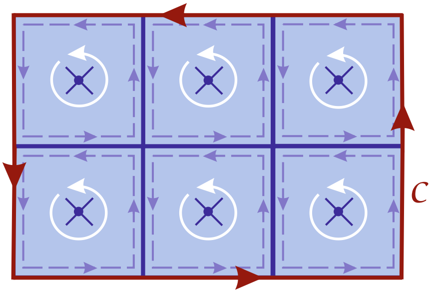
$$= f_1\,\mathrm{d}x + \left(f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y - \left(f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x - f_2\,\mathrm{d}y =$$

$$= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Dostali jsme cirkulaci po hranici uvažovaného elementu:

$$\oint_{\mathcal{C}_0} \boldsymbol{f}\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint_{\mathcal{C}} f_1\,\mathrm{d}x + f_2\,\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (7.12)$$

Budeme-li takovéto elementy klást vedle sebe, pak bude kapalina proudit pouze po obvodu, proudění uvnitř se vždy navzájem vyruší:



Cirkulace po křivce $\mathcal{C}$ je tedy součtem jednotlivých „mikrocirkulací“:

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iint_M \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (7.13)$$

Vztah (7.13) lze dokázat pro libovolnou množinu $M \subset \mathbb{R}^2$, která je omezená a uzavřená a jejíž hranici tvoří jediná kladně orientovaná uzavřená křivka $\mathcal{C}$,

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f} \mathbf{ds} = \iint_M \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{7.14}$$

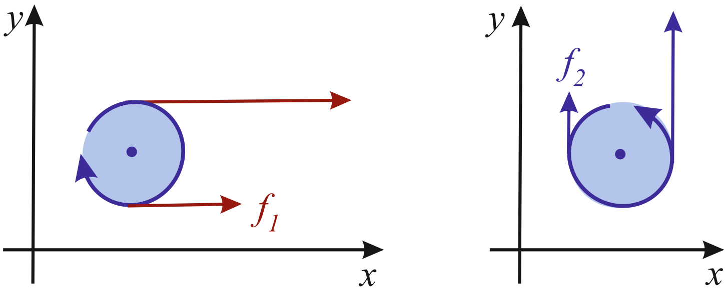
což je uvedená Greenova věta. Výraz

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

se označuje jako **rotace vektorového pole *f* vzhledem k ose z.** Ze vztahu (7.12) plyne, že rotace vyjadřuje cirkulaci připadající na jednotku obsahu (cirkulaci jsme získali vynásobením obsahem $\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$).

Zhruba řečeno: zůstaneme-li i představy vektorové funkce ***f*** jako rychlosti proudění, pak v určitém bodě bude vznikat vír – tedy kapalina bude rotovat – je-li $\dfrac{\partial f_2}{\partial x} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \neq 0.$

Čím větší je $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$ (tj. čím rychleji poroste y-ová složka rychlosti směrem doprava), tím větší bude rotace v kladném směru (proti směru pohybu hodinových ručiček). Naopak čím rychleji roste f_1 směrem nahoru, tj. čím větší je derivace $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}$, tím větší je tendence rotovat v záporném směru.



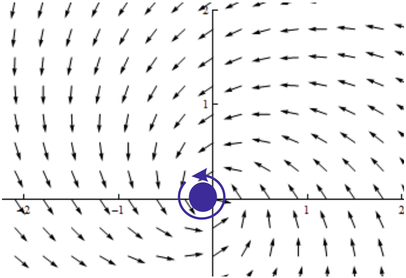
Výsledná **rotace vzhledem k ose z** je proto rozdíl těchto derivací:

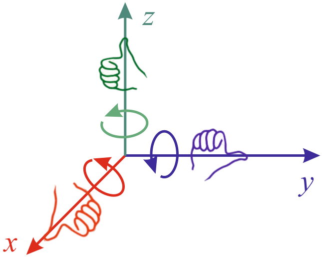
$$\mathrm{rot}_z\, \boldsymbol{f} = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \tag{7.15}$$

Ve fyzice budete potřebovat také vztah mezi rotací a úhlovou rychlostí, s níž se vír o poloměru r otáčí. Označme pro názornost $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{v}$. Víme, že $v = r\omega$. Vzhledem k (7.12) platí:

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}_0} \boldsymbol{v}\,\mathbf{ds} &= \operatorname{rot}_z \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}S \\
2\pi r v &= (\operatorname{rot}_z \boldsymbol{v}) \cdot \pi r^2 \\
2\pi r \cdot r\omega &= (\operatorname{rot}_z \boldsymbol{v}) \cdot \pi r^2 \\
2\omega &= \operatorname{rot}_z \boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

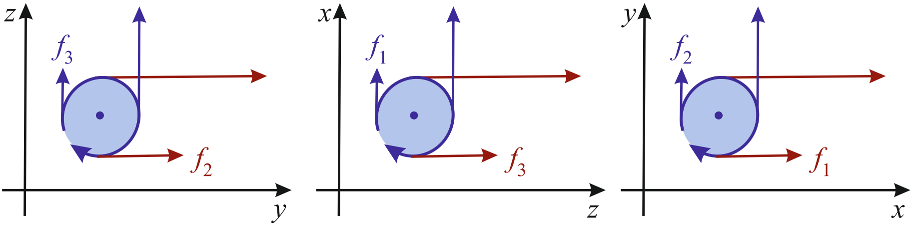
Ještě jinak: umístíme-li do daného bodu malou kuličku upevněnou tak, aby mohla otáčet kolem svislé osy, pak tato kulička bude rotovat s uvedenou úhlovou rychlostí.





Rotace vektorového pole v $\mathbb{R}^3$

Analogicky se vztahem (7.15) lze vyjádřit také rotace vzhledem k osám x a y. Jako kladný směr rotace se vždy uvažuje směr, kam ukazují prsty pravé ruky, když palec míří ve směru osy (tj. směrem k větším kladným hodnotám).



$$\operatorname{rot}_x \boldsymbol{f} = \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \quad \operatorname{rot}_y \boldsymbol{f} = \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \tag{7.16}$$

$$\operatorname{rot}_z \boldsymbol{f} = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}.$$

Rotaci vzhledem k libovolné ose lze získat složením rotací vzhledem k osám rovnoběžným s osami souřadnic. Obecně tedy **rotací vektorového pole *f*** nazýváme vektor

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \tag{7.17}$$

Formálně se rotace zapisuje také ve tvaru

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} = \nabla \times \boldsymbol{f} = \tag{7.18}$$

$$= \boldsymbol{i} \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) + \boldsymbol{j} \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) + \boldsymbol{k} \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_2}{\partial y} \right),$$

kde ***i***, ***j***, ***k*** jsou jednotkové vektory ve směru osy x, y, z.

Diferenciální operátory

Na předchozí stránce jsme použili symbol

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \tag{7.19}$$

který se označuje jako **operátor nabla**. Používá se ke zjednodušení a zkrácení zápisu. Jedná se o formální označení, kdy součin např. symbolu $\frac{\partial}{\partial x}$ a funkce U znamená, že se tato funkce zderivuje podle x. Symbolu $\frac{\partial}{\partial x}$ se také říká **operátor** – lidově řečeno: narazí-li na funkci, tak s ní něco provede, v tomto případě zderivuje podle x.

Narazí-li tedy operátor $\boldsymbol{\nabla}$ na skalární funkci, např. U, pak z ní „vyrobí“ gradient. Přesněji řečeno, výsledkem formálního součinu operátoru $\boldsymbol{\nabla}$ a skalární funkce U je **gradient funkce** U:

$$\boldsymbol{\nabla} U = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \operatorname{grad} U\,. \tag{7.20}$$

Máme tedy **gradient skalární funkce** $U(x, y, z)$ vyjádřený ve tvaru:

$$\operatorname{grad} U(x, y, z) = \nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \tag{7.21}$$

Podobně můžeme vyjádřit **divergenci vektorové funkce** $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$ jako skalární součin operátoru ∇ a funkce $\boldsymbol{f}$:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \nabla \bullet \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}. \tag{7.22}$$

A konečně **rotaci vektorové funkce** $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$ lze vyjádřit jako vektorový součin operátoru ∇ a funkce $\boldsymbol{f}$:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \nabla \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}. \tag{7.23}$$

Poznámka. Obsah P omezené oblasti $\mathcal{S}$, jejíž hranice je prostá po částech hladká křivka $\mathcal{C}$, je roven

$$P = \oint_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}y = -\oint_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)\,,$$

kde křivka $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná, tj. při pohybu po křivce leží oblast $\mathcal{S}$ vlevo.

☛ ***Příklad 1.*** Vypočítejte plošný obsah vnitřní oblasti elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, a > 0\,, b > 0\,.$$

Řešení. K výpočtu použijeme Greenovu větu a zobecněné polární souřadnice $x = a\cos t\,,\; y = b\sin t\,,\; t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Pak

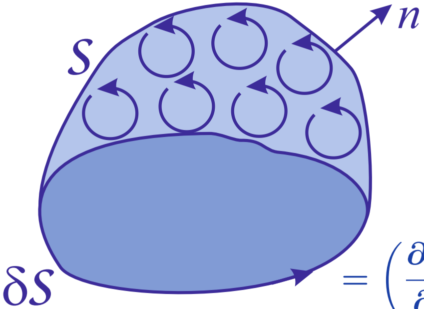
$$P = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t\, b\cos t - b\sin t(-a\sin t))\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,\mathrm{d}t = \underline{\underline{\pi ab.}}$$

7.5 Stokesova věta a její využití

Věta 3 (Stokesova). Nechť $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ je orientovaná plocha, jejíž hranice $\partial\mathcal{S}$ je uzavřená křivka orientovaná koherentní orientací. Nechť $G \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená souvislá množina taková, že $\mathcal{S} \subset G$ a nechť $\boldsymbol{f}$ je spojitě diferencovatelné vektorové pole na oblasti G. Pak platí rovnost

$$\oint\limits_{\partial\mathcal{S}} \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int\limits_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{7.24}$$



Rotace funkce $\boldsymbol{f}$:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}, & \dfrac{\partial}{\partial y}, & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1, & f_2, & f_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$