KAPITOLA 1–2

NEURČITÝ INTEGRÁL

1.1 Primitivní funkce

V prvním semestru jsme hledali derivace funkcí. Nyní se budeme zabývat opačným problémem: **nalézt funkci, jejíž derivace je rovna dané funkci.** Takováto "antiderivace" se nazývá **primitivní funkce**.

Přesněji tento pojem zavádí následující definice:

Definice 1. Nechť je dána funkce f definovaná v otevřeném (omezeném nebo neomezeném) intervalu (a, b). Každou funkci F, pro kterou platí:

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro každé } x \in (a, b),$$

nazveme **primitivní funkcí k funkci f na intervalu** (a, b).

☛ *Příklad 1.*

(a) $F(x) = x^4$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = 4x^3$ na intervalu $(-\infty, +\infty)$, protože $(x^4)' = 4x^3$.

(b) Nyní hledejme primitivní funkci k funkci $f(x) = x^3$. Zřejmě stačí vydělit předchozí primitivní funkci 4, protože

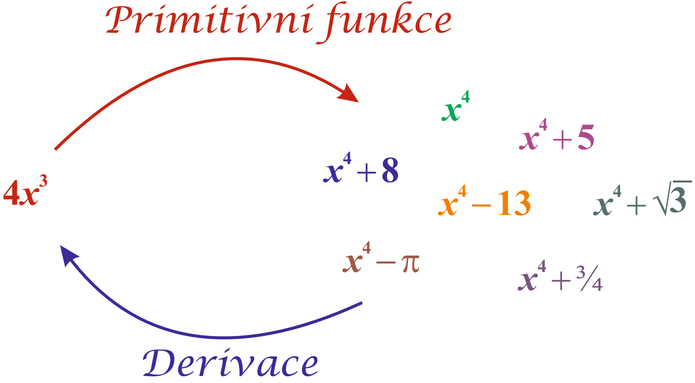
$$\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = \frac{1}{4}\cdot 4x^3 = x^3\,.$$

$F(x) = \frac{1}{4}x^4$ je tedy primitivní funkcí k funkci $f(x) = x^3$ na intervalu $(-\infty, +\infty)$.

(c) $F(x) = -x^{-1}$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = x^{-2}$ na intervalu $(-\infty, 0)$ a na intervalu $(0, +\infty)$, ale ne např. na intervalu $(-1, 5)$ který obsahuje $0 \notin D_f$ (derivace funkce $F(x)$ musí být rovna $f(x)$ na celém intervalu).

(d) Viděli jsme, že x^4 je primitivní funkcí k funkci $4x^3$. Ale například $x^4 + 5$ je také primitivní funkcí k funkci $4x^3$, protože derivace konstanty je rovna nule.

Totéž platí pro $x^4 - 13$, $x^4 + \sqrt{3}$, atd.



Funkce $f(x) = 4x^3$ má nekonečně mnoho primitivních funkcí:

$$F(x) = x^4 + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Poznámka. Je-li F primitivní funkce k funkci f v intervalu (a, b), pak zřejmě i každá funkce tvaru $G(x) = F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, je primitivní funkcí k funkci f v (a, b). Následující věta říká, že tímto jsou již všechny primitivní funkce vyčerpány:

Věta 1. Jsou-li F, G dvě primitivní funkce k funkci f v intervalu (a, b), pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$, že pro všechna $x \in (a, b)$ platí:

$$G(x) = F(x) + c\,.$$

Důkaz. Uvažujme funkci $H(x) = G(x) - F(x)$. Funkce F, G jsou primitivní funkce k funkci f, proto pro každé $x \in (a, b)$ platí:

$$H'(x) = (G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Z Cauchyho věty o střední hodnotě pak plyne, že $H(x)$ je na intervalu (a, b) konstantní, tj. $H(x) = c\,.$

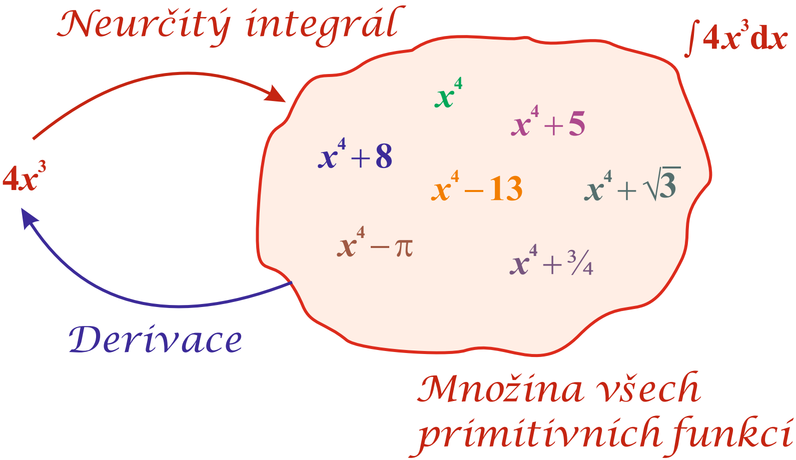
Z předchozí věty plyne, že k nalezení všech primitivních funkcí stačí nalézt jen jednu a jakoukoli jinou získáme přičtením nějakého reálného čísla.

Definice 2. Množinu všech primitivních funkcí (je-li neprázdná) k funkci f na intervalu (a, b) nazýváme **neurčitým integrálem funkce f na intervalu** (a, b). Pro neurčitý integrál funkce f používáme symbol $\int f$ nebo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

K nalezení neurčitého integrálu k funkci $f(x)$ stačí nalézt jednu primitivní funkci $F(x)$ na daném intervalu a zapsat

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c. \tag{1.1}$$

Může se stát, že výsledek, který vám vyjde, se bude lišit od výsledku uvedeného v materiálech. Stále ještě existuje šance, že je váš výsledek správný a rozdíl je jen v konstantě.

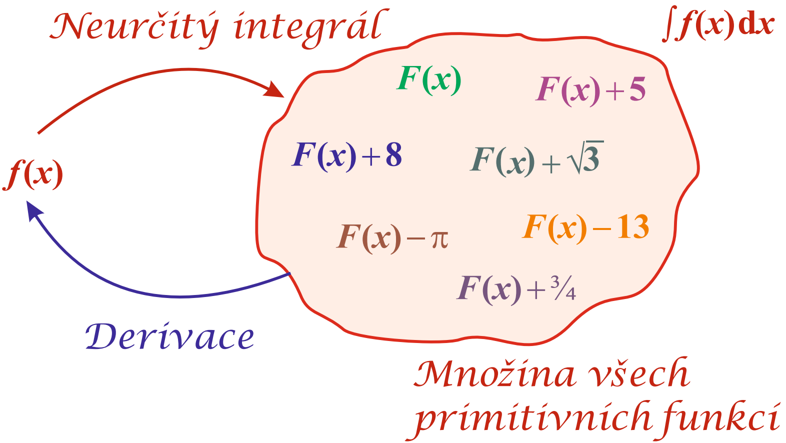


☛ ***Příklad 2.***

(a) $\int 4x^3 \,\mathrm{d}x = x^4 + c, \quad c \in \mathbb{R}\,.$

(b) $\int x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + c, \quad c \in \mathbb{R}\,.$

(c) $\int 5 \,\mathrm{d}x = 5x + c, \quad c \in \mathbb{R}\,.$



Neurčitý integrál funkce $f(x)$:

$$\int \underbrace{f(x)}\,\mathrm{d}x = \underbrace{F(x)} + c$$

Integrační znak

Integrand

Integrační proměnná

Primitivní funkce

Integrační konstanta

Připomenutí pojmu derivace

V Calculu 1 jsme definovali derivaci funkce f v bodě x_0, který je vnitřním bodem definičního oboru D_f, jako limitu

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

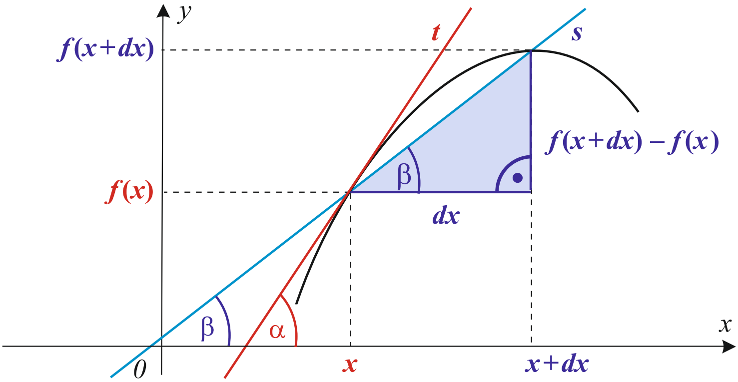
Známe také pojem **diferenciál funkce**, který je v případě, že existuje konečná derivace $f'(x_0)$ roven

$$\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0)h\,,$$

V následujícím budeme uvažovat derivaci v libovolném vnitřním bodě definičního oboru x a pro názornost budeme používat symbol $\mathrm{d}x$ také ve smyslu přírůstku veličiny x, tj. místo h.

Připomenutí pojmu derivace ... $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$

Připomeňme, že **derivace funkce** f v bodě x udává směrnici tečny ke grafu funkce f v tomto bodě:



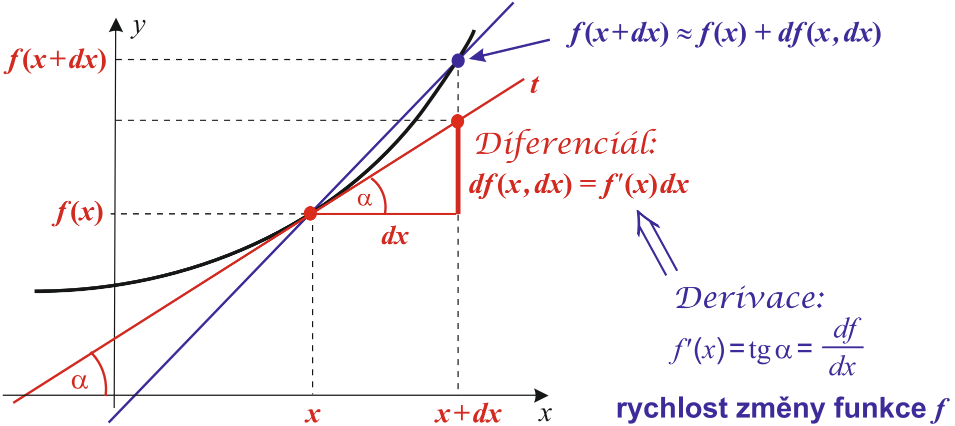
Směrnice sečny s **:** $\xrightarrow[\mathrm{d}x \to 0]{}$ **Směrnice tečny** t **:** $\operatorname{tg}\alpha =$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f(x+\mathrm{d}x) - f(x)}{\mathrm{d}x} \quad \to \quad f'(x_0) = \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{f(x+\mathrm{d}x) - f(x)}{\mathrm{d}x}$$

Lidově řečeno, **diferenciál funkce**

$$\mathrm{d}f(x,\,\mathrm{d}x) = f'(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.2}$$

udává změnu svislé souřadnice odpovídající změně proměnné o hodnotu $\mathrm{d}x$, vyjdeme-li z bodu x a pohybujeme se rovně po tečně (místo po grafu funkce f). Pro dostatečně malou hodnotu $\mathrm{d}x$ lze diferenciál využít k aproximaci skutečného přírůstku funkce:



Fyzikální význam – vzdálenost a rychlost

Okamžitá rychlost (intuitivně: průměrná rychlost v nekonečně krátkém časovém intervalu) je derivací funkce vyjadřující dráhu:

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,.$$

Uražená vzdálenost je proto primitivní funkcí k rychlosti, tj. jedna z funkcí vyjádřených neurčitým integrálem

$$s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Symbol $\int$ vznikl protažením písmene **S** značícího **S**oučet diferenciálů

$$\mathrm{d}s = v(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Každý z těchto diferenciálů vyjadřuje vzdálenost, kterou předmět urazí, pohybuje-li se konstantní rychlostí $v(t)$ po dobu $\mathrm{d}t$. Součet pak aproximuje celkovou vzdálenost, kterou bychom (opět zjednodušeně řečeno) získali přechodem k limitě pro $\mathrm{d}t \to 0$.

Integrační konstantu lze určit z tzv. počáteční podmínky, tj. z informace o vzdálenosti v určitém okamžiku (například pro $t = 0$).

☛ ***Příklad 3.*** Pan Smutný jede po dálnici konstantní rychlostí 120 km/h. Začneme-li měřit uraženou dráhu od místa, kde se nacházel v čase $t = 0$ h (tj. když jsme začali měřit čas), pak

$$s_1(t) = 120t\,,$$

kde t je čas vyjádřený v hodinách. Víme-li, že v čase $t = 0$ již urazil 50 km, pak je celková dráha

$$s_2(t) = 120t + 50\,.$$

Obě funkce jsou primitivní ke konstantní funkci $v(t) = 120$ [km/h] a liší se jen o konstantu, a to o počáteční dráhu s_0. Proto

$$s(t) = \int 120\,\mathrm{d}t = 120t + s_0\,.$$

Fyzikální význam – rychlost a zrychlení

Průměrná rychlost je podílem dráhy (celkové změny polohy) uražné v určitém časovém intervalu a délky tohoto intervalu. Podobně průměrné zrychlení je podílem změny rychlosti a času, během něhož k této změně došlo. Limitním přechodem (intuitivně, pro nekonečně krátký časový interval) pak získáme **okamžité zrychlení** jako derivaci dráhy funkce vyjadřující okamžitou rychlost:

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,.$$

Často potřebujeme zjistit rychlost v určitém časovém okamžiku na základě známého zrychlení. Podobně jako u celkové uražené dráhy hledáme neurčitý integrál

$$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Rychlost závisí nejen na zrychlení a času, ale také na počáteční rychlosti v_0, která představuje integrační konstantu.

☛ ***Příklad 4.*** Uvažujme kámen, který padá k zemi v gravitačním poli, tj. s konstantním zrychlením g. Jeho rychlost je

$$v(t) = \int g \,\mathrm{d}t = gt + c\,.$$

Je-li počáteční rychlost $v_0 = 0$ (kámen se jen uvolnil a padá), pak $v(0) = g \cdot 0 + c = 0$, tedy $c = 0$ a $v = gt$. Jestliže kámen někdo vrhl svisle dolů s počáteční rychlostí v_0, je $c = v_0$, a tedy

$$v(t) = gt + v_0\,.$$

Uražená dráha je pak rovna

$$s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int (gt + v_0)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0\,.$$

Poznámka. Význam značení používaného pro neurčitý integrál bude jasnější, až se dostaneme k určitému integrálu.

Následující věty shrnují důležité vlastnosti primitivních funkcí a neurčitých integrálů.

Věta 2 (Aditivita vzhledem k integračnímu oboru).

1. Má-li funkce f integrál v intervalu (a, b) a je-li I otevřený podinterval intervalu (a, b), pak funkce f má integrál také v intervalu I.
2. Má-li funkce f integrál v intervalech $I_1, I_2, \cdots, I_m$ a je-li jejich sjednocení $I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_m$ interval, pak má funkce f integrál také v intervalu I .

Poznámka. Tvrzení 2 se používá i v případech, kdy sjednocení I integračních oborů I_n není interval. Tuto skutečnost ilustruje následující příklad.

☛ ***Příklad 5.*** Nalezněte neurčitý integrál $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení.

$$\begin{aligned} x \in (0,\infty) &: \quad (\ln x)' = 1/x\,; \\ x \in (-\infty,0) &: \quad (\ln(-x))' = 1/x\,. \end{aligned}$$

Je tedy

$$\begin{aligned} &\textstyle\int 1/x\,\mathrm{d}x = \ln x + c && \text{v intervalu } (0,\infty)\,; \\ &\textstyle\int 1/x\,\mathrm{d}x = \ln(-x) + c && \text{v intervalu } (-\infty,0)\,. \end{aligned}$$

Funkce $\ln|x|$ je tedy primitivní funkcí k funkci $1/x$ jak v intervalu $(-\infty,0)$, tak i v intervalu $(0,\infty)$. Proto obvykle píšeme:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c \quad \text{v } M = (-\infty,0)\cup(0,\infty).$$

Je třeba si uvědomit, že tento zápis není zcela korektní: množina M je sjednocením dvou disjunktních intervalů, integrační konstantu c proto může být zvolena libovolně na každém z obou intervalů.

Věta 3 (Linearita integrálu).

1. *Nechť F, resp. G, je primitivní funkce k funkci f, resp. g, na intervalu (a,b), r je číslo. Potom $F+G$ je primitivní funkcí k funkci $f+g$ a rF je primitivní funkcí k funkci rf na intervalu (a,b).*

2. *Nechť funkce f, g mají neurčité integrály v intervalu (a,b) a nechť r je číslo. Pak také funkce $f+g$ a funkce rf má neurčitý integrál v intervalu (a,b) a platí:*

$$\begin{aligned}\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x &= \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x\,,\\ \int rf(x)\,\mathrm{d}x &= r\int f(x)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

3. *Nechť funkce $f_1, f_2, \cdots, f_m$ mají neurčité integrály v (a,b) a nechť $r_1, r_2, \cdots, r_m$ jsou konstanty. Pak také funkce $r_1f_1 + r_2f_2 + \cdots + r_mf_m$ má integrál v intervalu (a,b) a platí:*

$$\int (r_1f_1(x)+r_2f_2(x)+\cdots+r_nf_n(x))\,\mathrm{d}x =$$

$$= r_1\int f_1(x)\,\mathrm{d}x + r_2\int f_2(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + r_n\int f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 4 (Neurčitý integrál spojité funkce).

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje k ní na intervalu (a, b) primitivní funkce.

Věta 5 (Neurčitý integrál derivace).

Je-li $f'(x)$ spojitá na intervalu (a, b), je

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + c.$$

1.2 Základní integrační vzorce

Známé vzorce z diferenciálního počtu nám dávají následující výsledky (c je integrační konstanta):

$$1)\quad \int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{Z},\ n > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{Z},\ n < -1, \\ x > 0 \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{R},\ n \notin \mathbb{Z} \end{array}$$

$$2)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

$$3)\quad \int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + c; \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$4)\quad \int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c \qquad x \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$$

$$5)\quad \int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$6)\quad \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + c, \qquad x \in \mathbb{R}$$

7) $$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c$$

$$x \in \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$$

8) $$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + c$$

$$x \in (2k\pi, (2k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

9) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \arcsin x + c \\ -\arccos x + c, \end{cases} \qquad x \in (-1, 1)$$

10) $$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + c \\ -\operatorname{arccotg}\ x + c, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}$$

11) $$\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + c; \qquad x \in \mathbb{R}$$

12) $$\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + c; \qquad x \in \mathbb{R}$$

13) $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tgh} x + c,$

14) $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{cotgh} x + c,$

15) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{argsinh} x + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c$

16) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{argcosh} x + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c$

16) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|,$

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \operatorname{argtgh} x, \quad \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \operatorname{argcotgh} x$$

☛ ***Příklad 6.***

Vypočítejte následující integrály:

(a) $\boldsymbol{I = \int (5x^4 - 2x^3 - 3x + 7)\, \mathrm{d}x}$

Řešení. Podle věty o linearitě integrálu lze psát:

$$\boldsymbol{I = \int (5x^4 - 2x^3 - 3x + 7)\, \mathrm{d}x =}$$

$$\boldsymbol{= 5 \int x^4\, \mathrm{d}x - 2 \int x^3\, \mathrm{d}x - 3 \int x\, \mathrm{d}x + 7 \int 1\, \mathrm{d}x =}$$

$$\boldsymbol{= 5 \left(\frac{x^5}{5} + c_1 \right) - 2 \left(\frac{x^4}{4} + c_2 \right) - 3 \left(\frac{x^2}{2} + c_4 \right) + 7(x + c_5) =}$$

$$\boldsymbol{= x^5 - \frac{1}{2} x^4 - \frac{3}{2} x^2 + 7x + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.}$$

V dalším už řešení budeme zapisovat trochu méně podrobně.

(b) $I = \int \frac{2x^3 - 3\sqrt{x} + 5}{x}\,\mathrm{d}x$

Řešení. Po vydělení čitatele integrandu jmenovatelem stačí opět využít základní vzorce:

$$I = \int \frac{2x^3 - 3\sqrt{x} + 5}{x}\,\mathrm{d}x = \int (2x^2 - 3x^{-\frac{1}{2}} + 5x^{-1})\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^3}{3} - 3 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 5 \cdot \ln|x| + c =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - 6\sqrt{x} + \ln|x| + c\,, \qquad x \in (0, +\infty)\,.$$

(c) $I = \int \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x$

Řešení. Uvědomme si, že $(\mathrm{e}^{4x})' = 4\mathrm{e}^{4x}$, proto abychom při zpětné derivaci primitivní funkce získali e^{4x}, musí být:

$$I = \int \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{4x}}{4} + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(d) $\quad I = \int \cos(3x - 2)\,\mathrm{d}x$

Řešení. Protože $(\cos(3x-2))' = 3\sin(3x-2)$, bude:

$$I = \int \cos(3x-2)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(3x-2)}{3} + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Viděli jsme, že

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bohužel, podobná pravidla neplatí (stejně jako u derivací) pro součin a podíl:

$$\int f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x \neq \int f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x \neq \frac{\int f(x)\,\mathrm{d}x}{\int g(x)\,\mathrm{d}x}$$

1.3 Metoda integrace per partes

I když nemáme žádný vzorec pro přímý výpočet integrálu součinu dvou funkcí, v některých případech můžeme využít následující metodu, která umožňuje nahradit integrál součinu dvou funkcí integrálem součinu jiných dvou funkcí.

Metoda vychází ze vzorce pro derivaci součinu:

$$(uv)' = u'v + uv',$$

tedy

$$\begin{aligned} \int (uv)' &= \int (u'v + uv') \\ uv + c &= \int u'v + \int uv' \\ \int u'v &= uv - \int uv' + c \end{aligned}$$

Další integrační konstanta se objeví po výpočtu integrálu na pravé straně, proto můžeme jednoduše psát:

před derivací

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

po integraci *po derivaci*

Věta 6 (Itegrace per partes). Nechť funkce u, v jsou spojitě diferencovatelné v intervalu (a, b). Pak platí:

$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\,. \qquad (1.3)$$

☛ ***Příklad 7.*** Nalezněte integrál $\int x \cos x \,\mathrm{d}x\,.$

Řešení. Jedná se o typickou situaci, kdy je metoda per partes užitečná. Uvědomme si, že $(x)' = 1$. To znamená, že položíme-li $v = x$, pak díky vzorci (1.3) nahradíme x jedničkou, a tím se zbavíme problému se součinem. Zbývající funkce $\cos x$ se integrací nezkomplikuje, proto budeme schopni dopočítat výsledek:

$$\int x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \cos x\,, & u = \sin x \\ v = x\,, & \boxed{v' = 1} \end{array} \right| =$$

$$= x \cdot \sin x - \int \boxed{1} \cdot \sin x \,\mathrm{d}x = x \sin x - \int \sin x =$$

$$= x \sin x + \cos x + c\,. \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

☛ ***Příklad 8.***

Vypočítejte integrál $\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Opět se jedná o případ, kdy se jedna z funkcí, tj. x^2 , zjednodušuje derivováním. Jen je potřeba metodu per partes použít dvakrát za sebou. Nejprve nahradíme x^2 derivací $(x^2)' = 2x$ a derivaci x pak nahradíme jedničkou:

$$\int x^2 \cdot \sin x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \sin x \,, & \boxed{u = -\cos x} \\ v = x^2 \,, & \boxed{v' = 2x} \end{array} \right| =$$

$$= x^2 \cdot \boxed{(-\cos x)} - \int \boxed{2x} \cdot \boxed{(-\cos x)} \, \mathrm{d}x = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u' = \cos x \,, & u = \sin x \\ v = x \,, & \boxed{v' = 1} \end{array} \right| = -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \boxed{1} \cdot \sin x \, \mathrm{d}x \right)$$

$$= \underline{\underline{-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c \,, \qquad x \in \mathbb{R} \,.}}$$

☛ ***Příklad 9.***

Vypočítejte integrál $\int (x^2 + 2x - 5)\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Integrand postupně zjednodušíme:

$$\int (x^2 + 2x - 5)\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^{3x}, & u = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} \\ v = x^2 + 2x - 5, & v' = 2x + 2 \end{array} \right| =$$

$$= \tfrac{1}{3}\left(x^2 + 2x - 5\right)\mathrm{e}^{3x} - \tfrac{1}{3}\int (2x+2)\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^{3x}, & u = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} \\ v = 2x + 2, & v' = 2 \end{array} \right| =$$

$$= \tfrac{1}{3}\left(x^2 + 2x - 5\right)\mathrm{e}^{3x} - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}(2x+2)\mathrm{e}^{3x} - \tfrac{2}{3}\int \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \tfrac{1}{3}\left(x^2 + 2x - 5\right)\mathrm{e}^{3x} - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}(2x+2)\mathrm{e}^{3x} - \tfrac{2}{9}\mathrm{e}^{3x}\right) + c =$$

$$= \underline{\underline{\left(\tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{4}{9}x - \tfrac{49}{27}\right)\mathrm{e}^{3x} + c, \qquad x \in \mathbb{R}.}}$$

☛ ***Příklad 10.***

Vypočítejte integrál $\int x^3 \mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Integrand postupně zjednodušíme:

$$\int x^3 \mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^{5x}, & u = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x} \\ v = x^3, & v' = 3x^2 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{5}x^3\mathrm{e}^{5x} - \frac{3}{5}\int x^2\mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^{5x}, & u = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x} \\ v = x^2, & v' = 2x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{5}x^3\mathrm{e}^{5x} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{5}x^2\mathrm{e}^{5x} - \frac{2}{5}\int x\mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x\right) = \left| \begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^{5x}, & u = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x} \\ v = x, & v' = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{5}x^3\mathrm{e}^{5x} - \frac{3}{25}x^2\mathrm{e}^{5x} + \frac{6}{25}\left(\frac{1}{5}x\mathrm{e}^{5x} - \frac{1}{5}\int \mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{5}x^3\mathrm{e}^{5x} - \frac{3}{25}x^2\mathrm{e}^{5x} + \frac{6}{125}x\mathrm{e}^{5x} - \frac{6}{625}\mathrm{e}^{5x} + c, \qquad x \in \mathbb{R}.}}$$

Poznámka. V předchozích příkladech jsme vypočítali:

$$\int (x^2 + 2x - 5)\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \left(\tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{4}{9}x - \tfrac{49}{27}\right)\mathrm{e}^{3x} + c\,,$$

$$\int x^3\mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x = \left(\tfrac{1}{5}x^3 - \tfrac{3}{25}x^2 + \tfrac{6}{125}x - \tfrac{6}{625}\right)\mathrm{e}^{5x} + c\,.$$

Všimněte si, že ve všech těchto případech vypadá výsledek podobně jako původní integrovaná funkce – obě funkce obsahují stejnou exponenciální funkci a polynom téhož stupně (v prvním kroku označený jako v). Není to náhoda: výsledek obsahuje opět polynom v a jeho derivace (tj. polynomy nižších stupňů), násobené nějakými čísly.

Obecně pro libovolný polynom $P(x)$ konstantu k platí:

$$\int P(x)\mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x = Q(x)e^{kx}\,,$$

kde $Q(x)$ je polynom téhož stupně jako polynom $P(x)$.

Podobné úlohy proto můžeme řešit jednoduše tak, že nalezneme polynom $Q(x)$, pro který $\left(Q(x)e^{kx}\right)' = P(x)\mathrm{e}^{kx}$.

☛ ***Příklad 11.***

Pomocí odhadu vypočítejte integrál $\int (x^2 + 2x - 5)\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Již víme, že výsledek bude obsahovat opět kvadratický polyno násobený exponenciální funkcí e^{3x} :

$$\int (x^2 + 2x - 5)\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = (Ax^2 + Bx + C)\,\mathrm{e}^{3x} .$$

Pouze neznáme koeficienty $A,\ B,\ C$. Hledáme taková čísla tak, aby se derivace pravé strany rovnala integrované funkci:

$$\left((Ax^2 + Bx + C)\,\mathrm{e}^{3x}\right)' = (x^2 + 2x - 5)\,\mathrm{e}^{3x} ,$$

tedy

$$\begin{aligned} (2Ax + B)\,\mathrm{e}^{3x} + (Ax^2 + Bx + C) \cdot 3\mathrm{e}^{3x} &= (x^2 + 2x - 5)\,\mathrm{e}^{3x} \\ (3Ax^2 + (2A + 3B)x + (B + 3C)) \cdot \mathrm{e}^{3x} &= (x^2 + 2x - 5) \cdot \mathrm{e}^{3x} \end{aligned}$$

$$3Ax^2 + (2A + 3B)x + (B + 3C) = x^2 + 2x - 5$$

Aby se funkce na obou stranách rovnaly, musí se rovnat koeficienty u jednotlivých mocnin proměnné x :

$$\begin{array}{lcrcl} x^2 & \dots & 3A & = & 1 \\ x^1 & \dots & 2A + 3B & = & 2 \\ x^0 & \dots & B + 3C & = & -5 \end{array}$$

Řešením této soustavy lineárních rovnic je

$$A = \tfrac{1}{3}, \quad B = \tfrac{4}{9}, \quad C = -\tfrac{49}{27},$$

takže

$$\int (x^2 + 2x - 5)\, e^{3x}\, dx = \underline{\underline{\left(\tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{4}{9}x - \tfrac{49}{27}\right) e^{3x} + c\,.}}$$

☛ ***Příklad 12.***

Vypočítejte integrál $\int x^5 \ln x \, dx$.

Řešení. Tentokrát si uvědomíme, že ke zjednodušení dojde, budeme-li derivovat funkci $\ln x$:

$$\int x^5 \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = x^5 \,, & u = \dfrac{x^6}{6} \\ v = \ln x \,, & v' = \dfrac{1}{x} \end{array} \right| = \tfrac{1}{6} x^6 \ln x - \tfrac{1}{6} \int \frac{x^6}{x} \, dx =$$

$$= \tfrac{1}{6} x^6 \ln x - \tfrac{1}{6} \int x^5 \, dx = \underline{\underline{\tfrac{1}{6} x^6 \ln x - \tfrac{1}{36} x^6 + c \,, \qquad x \in \mathbb{R} \,.}}$$

☛ ***Příklad 13.***

Vypočítejte integrál $\int \ln x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Na první pohled integrand není součinem dvou funkcí, přesto lze metodu per partes s úspěchem použít. Při integraci by nám velmi pomohlo, kdybychom mohli funkci $\ln x$ nahradit její derivací $1/x$. K tomu si stačí zadaný integrand představit jako součin $1 \ln x$:

$$\int 1 \ln x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = 1\,, & u = x \\ v = \ln x\,, & v' = \dfrac{1}{x} \end{array} \right| =$$

$$= x \ln x - \int \frac{x}{x} \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int 1 \, \mathrm{d}x = \underline{\underline{x \ln x - x + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.}}$$

Nepřímé nalezení neurčitého integrálu: per partes vedoucí na řešení rovnice

V některých případech se stane, že po opakovaném užití per partes se objeví stejný integrál jako na začátku. Typickým příkladem je součin dvou funkcí typu $\mathrm{e}^{kx}, \sin kx, \cos kx$, jejichž derivováním či integrováním (jednou či dvakrát) obdržíme stejnou funkci, jen násobenou nějakým číslem. Například:

$$(\mathrm{e}^{2x})' = 2e^{2x}, \qquad \int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + c\,,$$

$$(\sin 3x)' = 3\cos 3x, \quad (3\cos 3x)' = -9\sin 3x\,,$$

$$\int \sin 3x\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{3}\cos 3x + c,\ -\tfrac{1}{3}\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{9}\sin 3x + c$$

V podobných případech se můžeme zcela vyhnout přímému integrování tím, že opakovaně použijeme metodu per partes a nakonec jen vyřešíme rovnici pro hledaný integrál,

$$I = h(x) + qI\,.$$

☛ ***Příklad 14.*** Vypočítejte integrál $\int e^x \cos x \, dx$.

Řešení. Aplikujeme-li metodu per partes dvakrát, obdržíme na pravé straně opět původní integrál:

$$\int e^x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = e^x \, , & u = e^x \\ v = \cos x \, , & v' = -\sin x \end{array} \right| =$$

$$= e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = e^x \, , & u = e^x \\ v = \sin x \, , & v' = \cos x \end{array} \right| =$$

$$= e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \right)$$

Tím jsme získali rovnici, kterou snadno vyřešíme:

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x \, dx &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\ 2 \int e^x \cos x \, dx &= e^x \cos x + e^x \sin x \end{aligned}$$

Po vydělení obou stran dvěma získáme řešení:

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \left(e^x \cos x + e^x \sin x \right) + c$$

☛ ***Příklad 15.*** Vypočítejte integrál $\int e^{-2x} \cos 3x \, \mathrm{d}x$.

Řešení.

$$\int e^{-2x} \cos 3x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \cos 3x\,, & u = \frac{1}{3} \sin 3x \\ v = \mathrm{e}^{-2x}\,, & v' = -2\mathrm{e}^{-2x} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3} e^{-2x} \sin 3x + \frac{2}{3} \int e^{-2x} \sin 3x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \sin 3x\,, & u = -\frac{1}{3} \cos 3x \\ v = \mathrm{e}^{-2x}\,, & v' = -2\mathrm{e}^{-2x} \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{3} e^{-2x} \sin 3x + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} e^{-2x} \cos 3x - \frac{2}{3} \int e^{-2x} \cos 3x \, \mathrm{d}x \right)$$

Tím jsme získali rovnici:

$$\int e^{-2x} \cos 3x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} e^{-2x} \sin 3x - \frac{2}{9} e^{-2x} \cos 3x - \frac{4}{9} \int e^{-2x} \cos 3x \, \mathrm{d}x$$

$$\frac{13}{9} \int e^{-2x} \cos 3x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} e^{-2x} \sin 3x - \frac{2}{9} e^{-2x} \cos 3x$$

Po vynásobení obou stran $9/13$ získáme řešení:

$$\int e^{-2x} \cos 3x \, \mathrm{d}x = \frac{3}{13} e^{-2x} \sin 3x - \frac{2}{13} e^{-2x} \cos 3x + c$$

Poznámka. Integrály typu $\int \mathrm{e}^{kx}(P(x)\cos\omega x + Q(x)\sin\omega x)\,\mathrm{d}x$ kde $P(x)$, resp. $Q(x)$, je polynom stupně n_1,, resp. n_2, a k a ω nejsou současně rovny nule, vždy vycházejí ve tvaru

$$\int \mathrm{e}^{kx}(P(x)\cos\omega x + Q(x)\sin\omega x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{kx}(R(x)\cos\omega x + S(x)\sin\omega x),$$

kde $R(x)$ a $S(x)$ jsou polynomy stupně $n = \max(n_1; n_2)$ s neznámými koeficienty, které najdeme derivací podobně jako na str. 32.

☛ ***Příklad 16.***

Najděte integrál $\int \mathrm{e}^{-x}(3\cos 2x - (4x+1)\sin 2x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení.

Již víme, že primitivní funkce musí být ve tvaru

$$F(x) = \mathrm{e}^{-x}\left[(Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x\right] \; .$$

K tomu si stačí uvědomit, že aby nějaká funkce měla derivaci rovnou

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left[3\cos 2x - (4x+1)\sin 2x\right] \; ,$$

nemůže obsahovat vedle konstanty žádnou jinou funkci než tutéž exponenciální funkci, sinus a cosinus téhož argumentu a polynomy obsahující nanejvýš první mocninu x , „nakombinované“ obdobným způsobem jako ve funkci f .

Aby funkce F byla primitivní funkcí k f, musí být $F'(x) = f(x)$:

$$F'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\left[(Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x\right] +$$

$$+\mathrm{e}^{-x}\left[(A\cos 2x - 2(Ax+B)\sin 2x) + (C\sin 2x + 2(Cx+D)\cos 2x)\right]$$

$$= \mathrm{e}^{-x}\Big[(-Ax - B + A + 2(Cx+D))\cdot\cos 2x +$$

$$+ (-Cx - D - 2(Ax+B) + C)\cdot\sin 2x\Big] =$$

$$= \mathrm{e}^{-x}\left[3\cdot\cos 2x - (4x+1)\cdot\sin 2x\right]$$

Aby byla splněna poslední rovnost, musí být

$$\begin{array}{lcccc} \cos 2x & \ldots & (-A+2C)x - B + A + 2D & = & 3 \\ \sin 2x & \ldots & (-C-2A)x - D - 2B + C & = & -4x - 1 \end{array}$$

V červené rovnici, která porovnává členy jimiž se násobí $\cos 2x$, není na pravé straně žádné x, proto musí být také $-A - C = 0$, a konstanta $-B + A - D$ musí být rovna 3. Podobně v modré rovnici: potřebujeme získat $-4x$ a konstantu -1. Tyto podmínky vedou k soustavě lineárních rovnic:

$$\begin{array}{llrcr}
x^1 & \dots & -A+2C & = & 0 \\
\text{konstanta} & \dots & -B+A+2D & = & 3 \\
x^1 & \dots & -C-2A & = & -4 \\
\text{konstanta} & \dots & -D-2B+C & = & -1
\end{array}$$

Řešení této soustavy je $A = \frac{8}{5}$, $B = \frac{11}{25}$, $C = \frac{4}{5}$, $D = \frac{23}{25}$.

Tím dostáváme hledaný integrál:

$$\int \mathrm{e}^{-x}(3\cos 2x - (4x+1)\sin 2x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \mathrm{e}^{-x}\left(\left(\tfrac{8}{5}x + \tfrac{11}{25}\right)\cos 2x + \left(\tfrac{4}{5}x + \tfrac{23}{25}\right)\sin 2x\right).$$

Poznámka.

Integrály typu

$$\int \sin ax \ \cos bx \, \mathrm{d}x, \quad \int \sin ax \ \sin bx \, \mathrm{d}x \ ,$$

$$\int \cos ax \ \cos bx \, \mathrm{d}x, \quad a \neq b,$$

můžeme počítat opakovaným použitím metody per partes, anebo rychleji tak, že součin v integrandu převedeme na součet pomocí vztahů

$$\sin\alpha \ \cos\beta = \tfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)) \ ,$$
$$\sin\alpha \ \sin\beta = \tfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) \ ,$$
$$\cos\alpha \ \cos\beta = \tfrac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)) \ .$$

Speciálně pro $\alpha = \beta$:

$$\cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

☛ ***Příklad 17.***

a) $\int \sin 5x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 6x + \sin 4x) \, dx =$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{12} \cos 6x - \frac{1}{8} \cos 4x + c\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.}}$$

b) $\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 4x + c\,, \ x \in \mathbb{R}\,.}}$

c) $\int \cos^2 3x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 6x) \, dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} x + \frac{1}{12} \sin 6x + c\,, \ x \in \mathbb{R}\,.}}$

d) $\int \cos^4 x \, dx = \int (\cos^2 x)^2 \, dx = \int \left(\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\right)^2 \, dx =$

$$= \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \left[x + \sin 2x + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) \, dx\right] =$$

$$= \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + c =$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad x \in \mathbb{R}\,.}}$$

1.4 Substituční metoda integrování

Věta 7 (První věta o substituci v neurčitém integrálu)

Nechť v intervalu J existuje integrál na levé straně rovnosti

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (1.4)$$

a rovná se $F(t)$. Nechť funkce $t = \varphi(x)$ je diferencovatelná v intervalu I, kde $\varphi(I) \subset J$. Pak v intervalu I existuje integrál na levé straně rovnosti (1.4) *a rovná se $F\big(\varphi(x)\big)$.*

Důkaz. Nechť F je primitivní funkce k funkci f v intervalu J. Protože funkce φ zobrazuje interval I do intervalu J, jsou složené funkce $F(\varphi(x))$ a $f(\varphi(x))$ definované v intervalu I a podle věty o derivaci složené funkce platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)\,, \quad x \in I.$$

Odtud plyne dokazované tvrzení.

První věta o substituci je užitečná v případech, kdy je integrál „připravený“ ve tvaru

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Formálně pak můžeme označit

$$t=\varphi(x), \qquad \mathrm{d}t=\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

a psát

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x=\int f(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.5}$$

Připomeňme, že výraz d$\varphi=\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ představuje to, co jsme nazývali **diferenciálem funkce** $\varphi(x)$ (viz str. 11). Formálně tedy označíme funkci $\varphi(x)$ symbolem t a její diferenciál symbolem $\mathrm{d}t$.

Poté, co nalezneme integrál $\int f(t)\,\mathrm{d}t$, se vrátíme k původní proměnné x dosazením $t=\varphi(x)$.

☛ ***Příklad 18.***

Vypočítejte integrál $\int \mathrm{e}^{5x+3}\,\mathrm{d}t$.

Řešení. Integrand je spojitý v $\mathbb{R}$, integrál proto existuje. Označme:

$$t = \varphi(x) = 5x + 3, \qquad \mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = 5\,\mathrm{d}x\,.$$

Všechny předpoklady věty jsou splněny. Abychom ji mohli použít, potřebujeme, aby byl v integrandu „připravený“ diferenciál $5\,\mathrm{d}x$. Protože chybí pouze číslo 5, můžeme jej jednoduše do integrandu zapsat a před integrál doplnit $\frac{1}{5}$ (uvědomme si, že toto lze provádět pouze s čísly!):

$$\int \mathrm{e}^{5x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \mathrm{e}^{5x+3}\cdot 5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{t} + c =$$

$$= \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x+3} + c\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Integrál můžeme samozřejmě nalézt i přímo, bez použití substituce. Víme, že integrál exponenciální funkce e^{x} je tatáž funkce.

Nahradíme-li argument vnitřní funkcí $5x+3$, pak

$$\left(\mathrm{e}^{5x+3}\right)' = \mathrm{e}^{5x+3} \cdot 5\,.$$

Protože číslo lze napsat před derivaci, stačí vynásobit funkci e^{5x+3} jednou pětinou,

$$\int \mathrm{e}^{5x+3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{5} \cdot \mathrm{e}^{5x+3} + c\,,$$

protože

$$\left(\tfrac{1}{5}\mathrm{e}^{5x+3}\right)' = \tfrac{1}{5} \cdot \mathrm{e}^{5x+3} \cdot 5.$$

Podobně můžeme například psát:

$$\int \sin(4x-9)\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{4}\cos(4x-9) + c\,,$$

$$\int \cos(7-3x)\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{3}\sin(3x-7) + c \quad \text{atd.}$$

Je-li vnitřní funkce komplikovanější než funkce lineární, je rozepsání substituce užitečné. Samozřejmě nezáleží na tom, jakými písmeny jsou jednotlivé proměnné označeny.

☛ ***Příklad 19.*** Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x+2)^3}\,dx$.

Řešení. Integrand je spojitý v $\mathbb{R}$, integrál proto existuje v $\mathbb{R}$. Můžeme si všimnout, že e^x v čitateli je derivací funkce $e^x + 2$. Integrand je tedy již připravený na substituci:

$$\int \frac{e^x}{(e^x+2)^3}\,dx = \int \frac{1}{(e^x+2)^3}\cdot e^x\,dx = \left| \begin{array}{c} t = e^x + 2 \\ dt = e^x\,dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{t^3}\,dt = \int t^{-3}\,dt = \frac{t^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{2t^2} + c =$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{2(e^x+2)^2}}} + c\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

☛ ***Příklad 20.***

Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{(\ln x)}{x \cdot \sqrt{(5+\ln^2 x)^3}}\,\mathrm{d}x$ na $I = (0, +\infty)$.

Řešení.

$$\int \frac{(\ln x)}{x \cdot \sqrt{(5+\ln^2 x)^3}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{(5+\ln^2 x)^3}}\,(\ln x)\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{(5+\ln^2 x)^3}}\,(2\ln x)\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} t = 5+\ln^2 x \\ \mathrm{d}t = (2\ln x)\,\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = -2\sqrt{t} + c =$$

$$= \underline{\underline{-2\sqrt{5+\ln^2 x} + c\,, \quad x \in (0, +\infty)\,.}}$$

Často je nutná kombinace substituce s některou z dalších metod. Při řešení následujícího příkladu je vhodné začít substitucí a potom použít per partes.

☛ ***Příklad 21.*** Vypočítejte integrál $\int \sin 2x \cdot \ln(3\sin^3 x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení.

$$\int \sin 2x \cdot \ln(3\sin^3 x)\,\mathrm{d}x = \int 2\sin x\cos x\ln(3\sin^3 x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int 2\sin x\ln(3\sin^3 x)\cos x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x \end{array}\right| = \int 2t\ln\left(3t^3\right)\,\mathrm{d}t$$

$$= \left|\begin{array}{ll} u' = 2t, & u = t^2 \\ v = \ln\left(3t^3\right) & v' = \dfrac{3}{t} \end{array}\right| = t^2 \cdot \ln\left(3t^3\right) - \int t^2 \cdot \frac{3}{t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= t^2 \cdot \ln\left(3t^3\right) - 3\int t\,\mathrm{d}t = t^2 \cdot \ln\left(3t^3\right) - \tfrac{3}{2}t^2 + c =$$

$$= \underline{\underline{\sin^2 x \cdot \ln\left(3\sin^3 x\right) - \tfrac{3}{2}\sin^2 x + c,\ x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}\left((-1+2k)\pi, (1+2k)\pi\right)}}$$

Věta 8 (Druhá věta o substituci v neurčitém integrálu) *Nechť v intervalu I existuje integrál na levé straně rovnosti*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.6}$$

a rovná se $F(t)$, nechť funkce $x = \varphi(t)$ má nenulovou derivaci v každém bodě intervalu I a nechť zobrazuje interval I na interval $J = \varphi(I)$. Pak v intervalu J existuje integrál na pravé straně rovnosti (1.6) *a rovná se $F\big(\psi(x)\big)$, kde $\psi(x)$ je inverzní funkce k funkci $x = \varphi(t)$.*

Důkaz. Funkce φ je podle předpokladu prostá v intervalu I. Označme $t = \psi(x)$ funkci inverzní k funkci φ. Tato funkce zobrazuje interval J na interval I. Podle předpokladu existuje funkce G, která je diferencovatelná v I a pro kterou platí: $G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, $t \in I$. Označme $F(x) = G(\psi(x))$. Podle věty o derivaci složené funkce existuje v intervalu J derivace F' a platí $F'(x) = G'(\psi(x))\psi'(x) = G'(t)\psi'(x) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \cdot 1/\varphi'(t) = f(x)$, $x \in J$.

Poznámka. Místo předpokladu $\varphi'(t) \neq 0$ pro všechna $t \in I$ stačí požadovat, aby funkce φ byla ryze monotónní a aby bylo $\varphi'(t) = 0$ pro nejvýše konečný počet bodů $t \in I$.

Při použití **první věty o subtituci** jsme označili určitou funkci $\varphi(x)$, která již byla obsažena v integrandu, symbolem pro novou proměnnou (t nebo jakýmkoli jiným písmenem). Nakonec jsme se jednoduše vrátili k původní proměnné dosazením $t = \varphi(x)$.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ \mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \tag{1.7}$$

$$= \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F(\varphi(x)) + c$$

Při použití **druhé věty o substituci** nahradíme původní proměnnou x novou funkcí $\varphi(t)$. Nakonec se potřebujeme vrátit k x. Na rozdíl od předchozího případu nyní potřebujeme **inverzní funkci** k funkci φ (to je také důvod, proč funkce φ **musí být prostá**):

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \;\Rightarrow\; t = \varphi^{-1}(x) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \tag{1.8}$$

$$= \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = G(t) + c = G(\varphi^{-1}(x)) + c\,.$$

☛ ***Příklad 22.***

Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\,,\ x \in (-1,1).$

Řešení. Integrand je spojitý na intervalu $J = (-1,1)$, integrál proto existuje na J.

Jestliže jste zapomněli vzorec pro derivaci funkce $\arcsin x$, můžete tento integrál vypočítat pomocí vhodné substituce. Bylo by pěkné, kdyby se nám podařilo nahradit x takovou funkcí φ, pro kterou by $1-\varphi^2$ byla druhá mocnina nějaké jiné funkce – pak bychom se zbavili odmocniny. Tento požadavek připomíná vztah mezi **goniometrickými funkcemi**:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$$

Takto si můžeme tipnout, že by mohlo být užitečné použít substituci $x = \sin t$, což by nám umožnilo nahradit $\sqrt{1-x^2}$ výrazem

$$\sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|\,.$$

Nakonec se budeme muset vrátit k x, to znamená, že potřebujeme inverzní funkci $t = \arcsin x$.
Definiční obor integrandu je $(-1, 1)$. Abychom pokryli všechny body tohoto intervalu prostou funkcí, budeme uvažovat t z intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{lcl} x = \sin t & \Rightarrow & t = \arcsin x \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t & & \Downarrow \\ x \in (-1,1) & \Rightarrow & t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{5}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t\,\mathrm{d}t = \int \frac{5}{\sqrt{\cos^2 t}} \cos t\,\mathrm{d}t = \int \frac{5}{|\cos t|} \cos t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \cos t > 0 \text{ on } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \quad\Downarrow \\ |\cos t| = \cos t \end{array} \right| = \int \frac{5}{\cos t} \cos t\,\mathrm{d}t = 5\int 1\,\mathrm{d}t = 5t + c =$$

$$= \underline{\underline{5 \arcsin x + c\,, \quad x \in (-1,1)\,.}}$$

V tomto případě jsme si hned na začátku mohli vzpomenout na jeden ze základních vzorců pro integrály (a také bychom si na něj měli vzpomenout!), v komplikovanějších případech nám však tato substituce pomůže:

☛ ***Příklad 23.*** Vypočítejte integrál $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, $x \in [-1,1]$.

Řešení.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ccc} x = \sin t & \Rightarrow & t = \arcsin x \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t & & \Downarrow \\ x \in [-1,1]) & \Rightarrow & t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array} \right| =$$

$$= \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \int \sqrt{\cos^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int |\cos t| \cos t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \cos t > 0 \text{ on } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \quad\Downarrow \\ |\cos t| = \cos t \end{array} \right| = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \tfrac{1}{2}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin 2t + c = \tfrac{1}{2}\arcsin x + \tfrac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + c$$

Výsledek můžeme ještě upravit do hezčího tvaru. Vzhledem k tomu, že $\sin$ a $\arccos$ jsou navzájem inverzní, platí

$$\sin(\arcsin x) = x\,.$$

Aby nám vznikl tento výraz, využijeme vztah

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}, \qquad \text{tj.,}$$

$$\sin(2\arcsin x) = 2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x) =$$

$$= 2\sin(\arcsin x)\sqrt{1-(\sin(\arcsin x))^2} = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Celkem tedy dostáváme

$$\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\arcsin x + \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c,\ x\in[-1,1]\,.}}$$

Musíme být opatrní při práci s výrazem typu $\sqrt{g^2(t)}$! Nejsme-li si jistí, že funkce $g(t)$ je nezáporná, je nutné použít absolutní hodnotu:

$$\sqrt{g^2(t)} = |g(t)|$$

Například:

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2.$$

1.5 Integrace racionálních funkcí

Věta 9 (Rozklad na součet parciálních zlomků)

Nechť $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ je racionální lomená funkce a nechť jmenovatel $Q(x)$ lze psát ve tvaru

$$Q(x) = a(x-x_1)^{k_1} \cdots (x-x_r)^{k_r} \cdot (x^2+2p_1x+q_1)^{l_1} \cdots (x^2+2p_sx+q_s)^{l_s},$$

kde polynomy $x^2+2p_ix+q_i$, $i = 1, \dots, s$, jsou v reálném oboru nerozložitelné. Potom lze $R(x)$ vyjádřit – až na pořadí sčítanců – právě jedním způsobem ve tvaru

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{l_k} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2+2p_ix+q_i)^j},$$

kde $p(x)$ je polynom, A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} jsou reálné konstanty; rovnost platí pro všechna $x \in \mathbf{D}_R$, tj. pro všechna reálná x různá od kořenů polynomu $Q(x)$ ve jmenovateli.

☛ ***Příklad 24.***

Rozložte funkci na součet parciálních zlomků:

$$R(x) = \frac{3x+5}{x^2-3x+2}$$

Řešení. Polynom ve jmenovateli má kořeny 1 a 2, proto:

$$R(x) = \frac{3x+5}{x^2-3x+2} = \frac{3x+5}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}\,.$$

Při hledání koeficientů A, B převeďme oba zlomky vpravo na společného jmenovatele. Aby byl výsledek identický s původní zadanou funkcí, musí být v čitateli identické funkce, tj. koeficienty u všech mocnin proměnné x musí být shodné.

$$\frac{3x+5}{(x-1)(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$3x+5 = (A+B)x + (-2A-B)$$

$$\begin{array}{rcl} x^1 \;\ldots\; 3 & = & A+B \\ x^0 \;\ldots\; 5 & = & -2A-B \\ \hline \multicolumn{3}{c}{A=-8, \quad B=11} \end{array}$$

Celkem je tedy

$$R(x) = \frac{3x+5}{x^2-3x+2} = -\frac{8}{x-1} + \frac{11}{x-2}\,.$$

☛ *Příklad 25.*

Rozložte funkci na součet parciálních zlomků:

$$R(x) = \frac{3x+5}{(x-1)^2(x-2)}$$

Řešení.

$$R(x) = \frac{3x+5}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2}$$

$$\frac{3x+5}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2}{(x-1)(x-2)}$$

$$\begin{aligned} 3x+5 &= A(x^2-3x+2) + B(x-2) + C(x^2-2x+1) \\ 3x+5 &= (A+C)x^2 + (-3A+B-2C)x + (2A-2B+C) \end{aligned}$$

Aby byly funkce na obou stranách rovnice identické, musí platit:

$$\begin{array}{llcll}
x^2 & \ldots \quad 0 & = & A + C & \qquad (\to \; A = -C) \\
x^1 & \ldots \quad 3 & = & -3A + B - 2C & \\
x^0 & \ldots \quad 5 & = & 2A - 2B + C & \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
3 & = & -A + B \\
5 & = & A - 2B \\
\hline
\end{array}$$

$$B = -8, \quad A = -11, \quad C = 11$$

Celkem je tedy

$$R(x) = \frac{3x + 5}{(x-1)^2(x-2)} = -\frac{11}{x-1} - \frac{8}{(x-1)^2} + \frac{11}{x-2}\,.$$

Poznámka. Uvědomme si, že pokud bychom hledali rozklad pouze ve tvaru

$$R(x) = \frac{3x+5}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-2},$$

získali bychom podmínku

$$\begin{aligned} 3x+5 &= A(x-2) + B(x-1)^2 \\ 3x+5 &= A(x-2) + B(x^2-2x+1) \\ 3x+5 &= Bx^2 + (A-2B)x + (-2A+B) \end{aligned}$$

a příslušnou soustavu rovnic, která nemá řešení (máme jen dvě proměnné a tři rovnice, z nichž žádná není lineární kombinací ostatních):

$$\begin{aligned} x^2 \ \ldots \ 0 &= B \\ x^1 \ \ldots \ 3 &= A-2B \\ x^0 \ \ldots \ 5 &= -2A+B \end{aligned}$$

$$B = 0, \quad A = 3 \ \wedge \ A = -\frac{5}{2}$$

Výpočet integrálu racionální funkce

Danou racionální funkci nejprve rozložíme na součet parciálních zlomků. Není-li stupeň polynomu v čitateli menší než stupeň polynomu ve jmenovateli, provedeme nejprve částečné dělené polynomů. Poté stačí zintegrovat jednotlivé zlomky.

Pro nejjednodušší parciální zlomky zřejmě platí:

$$\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \ln|x-a| + c$$

Pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $x \in (-\infty, a)$ nebo $x \in (a, \infty)$ platí:

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + c$$

☛ ***Příklad 26.***

Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2-3x}$.

Řešení.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2-3x} = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{2-3x}(-3)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\ln|2-3x| + c.$$

☛ ***Příklad 27.***

Vypočítejte integrál $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+5)^3}$.

Řešení.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+5)^3} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(2x+5)^3}\,2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x+5)^{-3}\,2\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+5)^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{4(2x+5)^2} + c\,.$$

☛ ***Příklad 28.***

Vypočítejte integrál $I = \displaystyle\int \frac{3x+5}{(x-1)^2(x-2)}\,\mathrm{d}x\,.$

Řešení. Po rozkladu na parciální zlomky obdržíme:

$$I = \int \left(-\frac{11}{x-1} - \frac{8}{(x-1)^2} + \frac{11}{x-2} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= -11 \ln|x-1| - 8\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + 11 \ln|x-2| + c =$$

$$= 11 \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + \frac{8}{x-1} + c\,.$$

Na následujících příkladech si ukážeme, jak si poradit v případech, kdy je ve jmenovateli kvadratický nerozložitelný polynom. Je-li v čitateli jen konstanta, směřujeme k funkci arctg .

☛ ***Příklad 29.***

Vypočítejte integrál $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+x^2}$.

Řešení. Polynom ve jmenovateli je v reálném oboru nerozložitelný. Integrace povede na arctg:

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\left(\frac{x^2}{2}+1\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + c\,.$$

Podobně dostaneme:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

☛ ***Příklad 30.***

Vypočítejte integrál $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+2}$.

Řešení.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\left(\frac{3x^2}{2}+1\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \int \frac{1}{\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+1} \sqrt{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + c\,.$$

☛ ***Příklad 31.***

Vypočítejte integrál $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2 - 3x + 6}$.

Řešení.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2 - 3x + 6} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - \frac{3}{2}x + 3} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 3} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{39}{16}} =$$

$$\frac{16}{2 \cdot 39}\,\frac{\sqrt{39}}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{39}}(x - \frac{3}{4})\right)^2 + 1}\,\frac{4}{\sqrt{39}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{4}{\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{4}{\sqrt{39}}\left(x - \frac{3}{4}\right) + c = \frac{2}{\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{4x - 3}{\sqrt{39}} + c.$$

Je-li v čitateli lineární funkce, budeme vždy zlomek rozkládat na součet dvou zlomků, z nichž jeden má v čitateli derivaci jmenovatele, a vede tedy na logaritmus, a druhý má v čitateli jen konstatntu a vede na arcustangens:

☛ ***Příklad 32.***

Vypočítejte integrál $I = \int \frac{3x+5}{2x^2-3x+6}\,\mathrm{d}x\,.$

Řešení.

$$I = \frac{3}{4}\int \frac{4x-3}{2x^2-3x+6}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\frac{3}{4}\cdot 3+5}{2x^2-3x+6}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{3}{4}\ln\left|2x^2-3x+6\right| + \frac{33}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{4x-3}{\sqrt{39}} + c.$$

Pro výpočet integrálu

$$K_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}\,, \quad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}.$$

využíváme rekurentní vztah

$$K_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} K_n, \quad n = 1, 2, \ldots, x \in \mathbb{R}\,, \tag{1.9}$$

který lze odvodit pomocí metody per partes:

$$K_n = \int 1 \cdot \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = 1, & u = x \\ v = \dfrac{1}{(x^2+a^2)^n}, & v' = -\dfrac{2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \left[\frac{1}{(x^2+a^2)^n} - a^2 \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}} \right] \mathrm{d}x = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nK_n -$$

Odtud již snadno plyne (1.9).

1.6 Převedení integrandu na racionální funkci

Pomocí druhé věty o substituci lze řadu integrálů převést na integrály racionální funkce.

Integrand obsahuje goniometrické funkce

Integrály typu

$$\int R(\sin^2 x, \cos x) \sin x \, \mathrm{d}x$$

převádíme substitucí $t = \cos x$, $\mathrm{d}t = -\sin x \, \mathrm{d}x$ na integrál z racionální lomené funkce v proměnné t.

☛ ***Příklad***. Máme vypočítat integrál $\int \sin^3 x \, \mathrm{d}x$.

Řešení.

$$\int \sin^3 x \, \mathrm{d}x = \int \sin^2 x \sin x \, \mathrm{d}x = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, \mathrm{d}x =$$

$$-\int (1 - t^2) \, \mathrm{d}t = t^3/3 - t + c = (\cos^3 x)/3 - \cos x + c.$$

Integrály typu

$$\int R(\sin x, \cos^2 x) \cos x \, \mathrm{d}x$$

převádíme substitucí $t = \sin x, \ \mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x$ na integrál z racionální lomené funkce v proměnné t.

Podobně převádíme integrály typu

$$\int \sin^m x \cos^n x \, \mathrm{d}x, \quad \text{kde} \quad m, n \in \mathbb{N},$$

je-li alespoň jedno z čísel m, n liché. Jsou-li obě čísla sudá, využíváme vztahy

$$\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2; \quad \cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2, \tag{1.10}$$

případně u vyšších mocnin i vícekrát po sobě.

☛ ***Příklad***

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \int (1 - \cos 2x)/2 \, \mathrm{d}x = x/2 - (\sin 2x)/4 + c.$$

☛ ***Příklad***

$$\int \cos^4 x \, \mathrm{d}x = \int (\cos^2 x)^2 \, \mathrm{d}x = (1/4) \int (1 + \cos 2x)^2 \, \mathrm{d}x =$$

$$= (1/4) \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, \mathrm{d}x =$$

$$= x/4 + (\sin 2x)/4 + (1/4) \int (\cos^2 2x) \, \mathrm{d}x =$$

$$= x/4 + (\sin 2x)/4 + (1/8) \int (1 + \cos 4x) \, \mathrm{d}x =$$

$$= 3x/8 + (\sin 2x)/4 + (\sin 4x)/32 + c.$$

☛ ***Příklad***

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\sin x\,\mathrm{d}x =$$

$$-\int \frac{1-z^2}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = z - 2\operatorname{arctg} z + c = \cos x - 2\operatorname{arctg}(\cos x) + c.$$

☛ ***Příklad***

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\cdots = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + c.$$

Integrály typu

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)\,\mathrm{d}x,$$

jejichž integrand obsahuje pouze sudé mocniny goniometrických funkcí $\sin x, \cos x$ a součiny $\sin x \cos x$, lze převést

substitucí $\quad t = \operatorname{tg} x \quad$ opět na integrál z racionální lomené

funkce v proměnné t.

Je totiž

$$\begin{aligned}
x &= \operatorname{arctg} t, \qquad \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
\cos^2 x &= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2} \\
\sin^2 x &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2} \\
\sin x \cos x &= \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t}{1+t^2}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

☛ ***Příklad***

$$\int \operatorname{tg}^4 x \, \mathrm{d}x = \left| t = \operatorname{tg} x, \;\; \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t \right| = \int \frac{t^4 - 1 + 1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t =$$

$$= \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{3} t^3 - t + \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + c.$$

☛ ***Příklad.*** $\displaystyle \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}.$

Řešení. Pro $x \neq \pi/2 + k\pi$, k celé, platí

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 5} \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - 4z + 5} = \int \frac{\mathrm{d}z}{(z-2)^2 + 1} = \operatorname{arctg}(z-2) + c =$$

$$= \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x - 2) + c.$$

Univerzální substituce pro $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$

Substitucí $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ se každý integrál, jehož integrand je racionální funkce proměnných $\sin x$ a $\cos x$, převede na integrál, jehož integrand je racionální funkce jedné proměnné, a to na každém intervalu neobsahujícím $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}$$

$$t^2 = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$t^2(1+\cos x) = 1 - \cos x \quad \Longrightarrow \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} \quad \Longrightarrow \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Takto získané integrandy však bývají složité (jmenovatele jsou často polynomy vysokých stupňů), a proto tuto substituci používáme jen tehdy, nelze-li použít některou z předchozích substitucí.

☛ ***Příklad***. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x,\ x \neq (2k+1)\pi.$

$$\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}, & \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\[2ex] \mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, & \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1-\dfrac{2t}{1+t^2}}{1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2-2t+1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1+t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = t - \ln(1+t^2) + c =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \ln\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) + c, \quad x \neq (2k+1)\pi.$$

Integrály typu $\int \sin ax \cos bx \,\mathrm{d}x$, $\int \sin ax \sin bx \,\mathrm{d}x$, $\int \cos ax \cos bx \,\mathrm{d}x$, $a \neq b$, počítáme tak, že součin v integrandu převedeme na součet pomocí vztahů

$$\begin{aligned}
\sin\alpha \cos\beta &= (\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))/2,\\
\sin\alpha \sin\beta &= (\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))/2, \qquad (1.12)\\
\cos\alpha \cos\beta &= (\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))/2.
\end{aligned}$$

☛ ***Příklad***

$$\int \sin 5x \cos x \,\mathrm{d}x = (1/2) \int (\sin 6x + \sin 4x) \,\mathrm{d}x =$$

$$= -(1/12) \cos 6x - (1/8) \cos 4x + c.$$

Integrály typu $\int R(e^{\alpha x})\,\mathrm{d}x$, $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$, převádíme substitucí

$$e^{\alpha x} = t, \quad x = \frac{1}{\alpha}\ln t, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha t}\,\mathrm{d}t$$

na integrál z racionální lomené funkce $\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int R(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

☛ ***Příklad***

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+e^x)^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)^2} = \ln\left|\frac{t}{1+t}\right| + \frac{1}{1+t} + c =$$
$$= \ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right| + \frac{1}{1+e^x} + c$$

☛ ***Příklad***

$$\int \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{1+e^{2x}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + c = \operatorname{arctg} e^x + c$$

Integrály typu

$$\int R(\ln x)\,\frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{1.13}$$

převádíme substitucí $\ln x = t$, $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ na integrál z racionální lomené funkce $\int R(t)\,\mathrm{d}t$.

☛ ***Příklad***

$$\int \frac{\ln x}{1+\ln x}\,\frac{\mathrm{d}x}{x} = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \end{array} \right| = \int \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= t - \ln|t+1| + c = \ln x - \ln|1+\ln x| + c.$$

Integrand obsahuje odmocniny podílu lineárních funkcí

Pro integrály typu

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right)\,\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N},\ a, b, c, e \in \mathbb{R},\ ae-bc \neq 0,$$

volíme substituci

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+e}, \quad x = \frac{et^n - b}{a - ct^n}, \quad \mathrm{d}x = \frac{(ae-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Je-li n sudé, je nutno předpokládat $(ax+b)/(cx+e) \geq 0$, neboť $t^n \geq 0$. Podle věty o substituci platí

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right)\,\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{et^n - b}{a - ct^n}, t\right)\frac{(ae-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Integrál na pravé straně je integrál z racionální funkce v proměnné

☛ ***Příklad***

$$I = \int \sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left| t^3 = \frac{2x+1}{x+1},\ x = \frac{t^3-1}{2-t^3},\ \ \mathrm{d}x = \frac{3t^2}{(2-t^3)^2}\,\mathrm{d}t \right| =$$

$$= \int t \left(\frac{2-t^3}{t^3-1}\right)^2 \frac{3t^2}{(2-t^3)^2}\,\mathrm{d}t = 3\int \frac{t^3}{(t^3-1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Tento integrál z racionální funkce již umíme vypočítat (proveďte sami výpočet!) a dostaneme

$$I = \frac{t}{1-t^3} + \frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{6}\ln(t^2+t+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c,$$

kde za t musíme dosadit $t = \sqrt[3]{\dfrac{2x+1}{x+1}}$.

☛ ***Příklad***

$$I = \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \frac{\left[\sqrt{1-\sqrt{x}}\right]^2}{\sqrt{1+\sqrt{x}}\sqrt{1-\sqrt{x}}} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

$$I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int (1-x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = -2(1-x)^{1/2} + c = -2\sqrt{1-x} +$$

$$I_2 = \int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{x}{1-x}} = t,\ x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ \mathrm{d}x = \frac{2t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Tento integrál již umíme spočítat. Dostaneme $I_2 = \operatorname{arctg} t - t/(1 + t^2) + c$, kde za t musíme dosadit $t = \sqrt{x/(1-x)}$. Je tedy

$$I = I_1 - I_2 = -2\sqrt{1-x} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}} - \sqrt{x(1-x)} + c.$$

☛ ***Příklad***

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x - 2\sqrt{(x+1)(x-1)})\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int (x - \sqrt{(x+1)(x-1)})\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}(x-1)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left| t^2 = \frac{x+1}{x-1},\ x = \frac{t^2+1}{t^2-1},\ x-1 = \frac{2}{t^2-1},\ \mathrm{d}x = \frac{-4t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4\int t\frac{2}{t^2-1}\,\frac{t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} + 8\int \frac{t^2}{(t^2-1)^3}\,\mathrm{d}t,$$

což je integrál z racionální funkce, který již dovedeme spočítat.

Integrand obsahuje odmocniny kvadratických trojčlenů

.

Budeme se zabývat integrály typu

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,\mathrm{d}x, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0. \tag{1.14}$$

Aby úloha měla smysl, musí být

$$ax^2 + bx + c \geq 0. \tag{1.15}$$

Připomeňme, že nerovnost (1.15) může být splněna na celé reálné ose $\mathbb{R}$, a to v případě, že kvadratická rovnice $ax^2+bx+c=0$ nemá různé reálné kořeny a $a > 0$, na sjednocení $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$ v případě, že má dva reálné kořeny $x_1 < x_2$ a současně je $a > 0$, na intervalu (x_1, x_2), má-li dva reálné kořeny $x_1 < x_2$ a současně je $a < 0$, a konečně není splněna nikde, je-li $a < 0$ a rovnice nemá reálné kořeny.

1. Eulerova substituce

V případě $a > 0$ můžeme integrál (1.14) převést na integrál z racionální funkce pomocí tzv. **1. Eulerovy substituce**

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - x\sqrt{a}. \tag{1.16}$$

Umocníme obě strany rovnosti a dostaneme $ax^2 + bx + c = t^2 - 2tx\sqrt{a} + ax^2$. Členy ax^2 se ruší a dostáváme lineární rovnici pro x. Je tedy

$$x = \frac{t^2 - c}{b + 2t\sqrt{a}}, \qquad \mathrm{d}x = 2\frac{t^2\sqrt{a} + bt + c\sqrt{a}}{(b + 2t\sqrt{a})^2}\,\mathrm{d}t. \tag{1.17}$$

Po dosazení do (1.14) dostáváme integrál z racionální funkce v proměnné t.

Příklad Máme vypočítat integrál $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2 + 6x + 7}}$.

Řešení. Jelikož je diskriminant $D = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = -20 < 0$, je integrand spojitý na $\mathbb{R}$. Je $a = 2 > 0$, takže lze použít 1. Eulerovu substituci.

$$\sqrt{2x^2 + 6x + 7} = t - x\sqrt{2},\ x = \frac{t^2 - 7}{6 + 2t\sqrt{2}},\ \mathrm{d}x = 2\frac{t^2\sqrt{2} + 6t + 7\sqrt{2}}{(6 + 2t\sqrt{2})^2}$$

$$I = \int 2\frac{1}{\left(t - \sqrt{2}\dfrac{t^2 - 7}{6 + 2t\sqrt{2}}\right)}\frac{t^2\sqrt{2} + 6t + 7\sqrt{2}}{(6 + 2t\sqrt{2})^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{3 + t\sqrt{2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|3 + t\sqrt{2}| + c =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|3 + 2x + \sqrt{2}\sqrt{2x^2 + 6x + 7}| + c,\ x \in \mathbb{R}.$$

2. Eulerova substituce.

V případě, že je $c > 0$, lze použít tzv. **2. Eulerovu substituci**

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}. \tag{1.18}$$

Opět umocníme obě strany rovnice na druhou a obdržíme $ax^2 + bx + c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c$. Nyní se zruší c a můžeme krátit obě strany x. Dostaneme lineární rovnici pro x z níž vypočteme

$$x = \frac{2t\sqrt{c} - b}{a - t^2}, \quad \mathrm{d}x = 2\frac{t^2\sqrt{c} - bt + a\sqrt{c}}{(a - t^2)^2}\,\mathrm{d}t. \tag{1.19}$$

Po dosazení do integrálu (1.14) dostáváme integrál z racionální funkce.

☛ ***Příklad***. Máme vypočítat integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

Řešení. Diskriminant je opět záporný, takže počítáme na celé množině $\mathbb{R}$. Je $c = 1 > 0$, lze tedy použít 2. Eulerovu substituci.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2-x+1} = xt - 1 \\ x = \dfrac{1-2t}{1-t^2}, \;\; \mathrm{d}x = -2\dfrac{t^2-t+1}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= 2\int \frac{t^2-t+1}{t(1-t)(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

3. Eulerova substituce Je-li $D = b^2 - 4ac > 0$, pak lze trojčlen pod odmocninou rozložit $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, kde $x_1 \neq x_2$ jsou kořeny polynomu $ax^2 + bx + c$. Integrál (1.14) můžeme nyní převést na integrál z racionální funkce pomocí tzv. **3. Eulerovy substituce**

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1). \tag{1.20}$$

Odtud $a(x-x_1)(x-x_2) = t^2(x-x_1)^2$ a po krácení dvojčlenem $x-x_1$ dostáváme rovnici $a(x-x_2) = t^2(x-x_1)$, z níž vyjádříme x pomocí t

$$x = \frac{ax_2 - x_1t^2}{a - t^2}, \qquad \mathrm{d}x = 2a\frac{(x_2 - x_1)t}{(a - t^2)^2}\,\mathrm{d}t. \tag{1.21}$$

Po dosazení do integrálu (1.14) dostaneme integrál z racionální funkce v proměnné t.

☛ ***Příklad***. Máme vypočítat integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)\sqrt{4-x^2}}$.

Řešení. Integrál počítáme pro $4 - x^2 > 0$, tj. pro $|x| < 2$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)\sqrt{4-x^2}} =$$

$$\left| \sqrt{4-x^2} = (2-x)t,\ x = 2\frac{t^2-1}{1+t^2},\ \mathrm{d}x = \frac{8t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \right| =$$

$$= \int \frac{1}{\left(4\frac{(t^2-1)^2}{(1+t^2)^2}+4\right)\left(2-2\frac{t^2-1}{1+t^2}\right)t}\frac{8t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t.$$

Dostali jsme integrál z racionální funkce, který již dovedeme spočítat.

Poznámka Eulerovými substitucemi lze za uvedených podmínek převést $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,\mathrm{d}x$ na integrál z racionální funkce. Viděli jsme, že jak převod integrandu na racionální funkci, tak i její integrace může představovat dosti zdlouhavý a pracný proces. Ukážeme si ještě další možnosti, jak lze odstranit odmocniny z integrandů v některých speciálních případech.

Integrály typu $\int R(x, \sqrt{x^2+\alpha^2})\,\mathrm{d}x$ převádíme substitucí

$$x = \alpha \sinh t, \quad \mathrm{d}x = \alpha \cosh t\,\mathrm{d}t$$

na integrál z racionální funkce

$$\int R(x, \sqrt{x^2+\alpha^2})\,\mathrm{d}x = |x = \alpha\sinh t,\ \mathrm{d}x = \alpha\cosh t\,\mathrm{d}t| =$$

$$= \int R(\alpha\sinh t, \sqrt{\alpha^2(1+\sinh^2 t)}\cdot \alpha\cosh t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int R(\alpha\sinh t, \alpha\cosh t)\alpha\cosh t\,\mathrm{d}t.$$

Tento integrál můžeme počítat podobně, jako jsme počítali integrály z goniometrických funkcí, nebo můžeme použít definici hyperbolických funkcí a převést jej na integrál z integrandu obsahujícího pouze exponenciální funkce.

☛ ***Příklad***. Máme vypočítat integrál $\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Substituce $x = \sinh t$ dává

$$\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{\sinh^2 t + 1} \cosh t\,\mathrm{d}t = \int \cosh^2 t\,\mathrm{d}t =$$

$$(1/4) \int (e^t + e^{-t})^2\,\mathrm{d}t = (1/4) \int (e^{2t} + 2 + e^{-2t})\,\mathrm{d}t =$$

$$= e^{2t}/8 + t/2 - e^{-2t}/8 + c,$$

kde za t je nutno ještě dosadit $t = \operatorname{argsinh} x$.

Integrály typu $\int R(x, \sqrt{x^2 - \alpha^2})\,\mathrm{d}x$ převádíme substitucí $x = \alpha/\cos t$ na integrály z racionální lomené funkce v sinech a kosinech

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - \alpha^2})\ \mathrm{d}x = \left| x = \frac{\alpha}{\cos t},\ \mathrm{d}x = \frac{\alpha \sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \right| =$$

$$= \int R\left(\frac{\alpha}{\cos t}, \alpha\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}\right) \cdot \frac{\alpha \sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int R\left(\frac{\alpha}{\cos t}, \alpha\frac{|\sin t|}{|\cos t|}\right) \frac{\alpha \sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int R_1(\sin t, \cos t)\,\mathrm{d}t,$$

což je integrál z racionální funkce lomené R_1 v sinech a kosinech.

Integrály typu $\int R(x, \sqrt{\alpha^2 - x^2})\,\mathrm{d}x$ převádíme substitucí $x = \alpha \sin t$ na integrály z racionální funkce v sinech a kosinech

$$\int R(x, \sqrt{\alpha^2 - x^2})\,\mathrm{d}x = |x = \alpha \sin t,\ \mathrm{d}x = \alpha \cos t\,\mathrm{d}t| =$$

$$= \int R(\alpha \sin t, \alpha\sqrt{1 - \sin^2 t})\alpha \cos t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int R(\alpha \sin t, \alpha|\cos t|)\alpha \cos t\,\mathrm{d}t = \int R_3(\sin t, \cos t)\,\mathrm{d}t.$$