

## Integrály

1. Spočítejte  $\iint_A xy \, dx \, dy$ , kde  $A = \{(x, y); 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ .  $\left[\frac{a^2 b^2}{4}\right]$ 

---
2. Spočítejte  $\iint_A x^2 y \, dx \, dy$ , kde  $A = \{(x, y); 4x^2 + y^2 \leq 4\}$ . [0]

---
3. Spočítejte  $\iint_A (x + y) \, dx \, dy$ , kde  $A = \{(x, y); 0 \leq x \leq 2, y \leq x \leq 2y\}$ .  $\left[\frac{7}{3}\right]$ 

---
4. Spočítejte  $\iint_A xy \, dx \, dy$ , kde  $A = \{(x, y); y^2 \leq 2x, y \geq x - 4\}$ . [90]

---
5. Spočítejte  $\iiint_A dx \, dy \, dz$ , kde  $A = \{(x, y, z); x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$ .  $\left[\frac{1}{6}\right]$ 

---
6. Určete těžiště tělesa  $A$  v  $\mathbb{R}^3$ , kde  $A = \{(x, y, z); 0 \leq z \leq x^2 + y^2, x^2 \leq y \leq 1\}$ .  
 $\left[x_T = 0, y_T = \frac{25}{105}, z_T = \frac{503}{1089}\right]$ 

---
7. Spočítejte objem tělesa  $A = \{(x, y, z); 0 \leq z, x + y + z \leq 1, z \leq xy, x \geq 0, y \geq 0\}$ .  
 $\left[\frac{17}{12} - 2 \ln 2\right]$ 

---
8. Určete objem tělesa  $A = \{(x, y, z); 0 \leq z \leq 2 - x - y, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ .  $\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right]$ 

---
9. Vypočítejte  $\iint_A \frac{dx \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , kde  $A = \{(x, y); 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ . [2 $\pi$ ]

---
10. Vypočítejte integrál  $\iint_A xy^2 \, dx \, dy$ , kde  $A = \{(x, y); x^2 + (y - 1)^2 \geq 1, x^2 + (y - 2)^2 \leq 4\}$ . [0]

---
11. Určete souřadnice těžiště obrazce  $A = \{(x, y); (x^2 + y^2)^2 \leq 2y^3\}$ .  $\left[x_T = 0, y_T = \frac{21}{20}\right]$ 

---
12. Vypočítejte obsah obrazce  $A = \{(x, y); (x^2 + y^2)^3 \leq x^4 + y^4\}$ .  $\left[\frac{3}{4}\pi\right]$ 

---
13. Vypočítejte obsah obrazce  $A = \{(x, y); (x^2 + y^2)^2 \leq 2(x^2 - y^2), x^2 + y^2 \geq 1\}$ .  $\left[\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right]$ 

---
14. Vypočítejte obsah obrazce  $A = \left\{(x, y); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq x + y\right\}$ , kde  $a, b > 0$ .  $\left[\frac{\pi}{4} ab(a^2 + b^2)\right]$ 

---
15. Určete obsah obrazce  $A = \{(x, y); 1 \leq x + y \leq 2, x \leq y \leq 2x, x \geq 0, y \geq 0\}$ .  $\left[\frac{1}{4}\right]$ 

---
16. Určete polární moment obrazce  $A = \{(x, y); 1 \leq xy \leq 2, x \leq y \leq 2x, x \geq 0\}$ .  $\left[\frac{9}{8}\right]$ 

---
17. Určete moment setrvačnosti  $J_z(A)$  tělesa  
 $A = \{(x, y, z); x^2 + y^2 - 2z + 2 \leq 0, x^2 + y^2 + z \leq 4\}$ . [2 $\pi$ ]

---
18. Určete objem tělesa  $A = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, 1 \leq z \leq 2\}$ .  $\left[\frac{20}{3}\pi\right]$ 

---

19. Určete moment setrvačnosti  $J_z(A)$  tělesa  $A = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq 4, x + y + z \leq 4, z \geq 0\}$ , je-li hustota rovna jedné.  $[32\pi]$

---

20. Určete hmotnost tělesa  $A = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ , je-li hustota rozložení hmoty  $\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2)$ .  $\left[\frac{4k\pi}{15}(8\sqrt{2} - 7)\right]$

---

21. Určete souřadnice těžiště tělesa  $A = \{(x, y, z); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq z \leq 4\}$ , je-li hustota rozložení hmoty rovna jedné.  $[x_T = y_T = 0, z_T = \frac{8}{3}]$

---

22. Určete souřadnice těžiště tělesa  $A = \{(x, y, z); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{z^2}{c^2}, 0 \leq z \leq c\}$ , je-li hustota rozložení hmoty rovna jedné.  $[x + T = y_T = 0, z_T = \frac{3}{4}c]$

---

23. Spočtěte  $\iiint_A (x + y + z) dx dy dz$ , kde  $A = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq 2y, z \geq 0, z^2 \leq x^2 + y^2\}$ .  $\left[\frac{3}{4}\pi + \frac{64}{15}\right]$

---

24. Určete moment setrvačnosti  $J_z(A)$  pro těleso  $A = \{(x, y, z); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0\}$ , je-li hustota rozložení hmoty rovna jedné.  $\left[\frac{2}{15}abc(a^2 + b^2)\right]$

---

25. Spočtěte  $\iiint_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , kde  $A = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$ .  $\left[\frac{8}{5}\pi\right]$

---

26. Spočtěte integrál  $\iint_A \sin(x + y) dx dy$ , kde  $A = \{(x, y); y > 0, x + y < \frac{\pi}{2}, x - y > -\frac{\pi}{2}\}$ . [1]

---

27. Spočtěte integrál  $\iint_A dx dy$ , kde  $A = \{(x, y); xy \geq 1, x + y \leq \frac{5}{2}, x > 0, y > 0\}$ .  $\left[\frac{15}{8} - 2 \ln 2\right]$

---

28. Spočtěte integrál  $\iint_A dx dy$ , kde  $A = \{(x, y); (x - y)^2 + x^2 \leq a^2\}$ .  $[\pi a^2]$

---

29. Spočtěte integrál  $\iint_A \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy$ , kde  $A = \{(x, y); x^2 \leq 2y, y \leq x\}$ .  $[\ln 2]$

---

30. Spočtěte integrál  $\iint_A x \ln y dx dy$ , kde  $A = \{(x, y); 1 \leq y \leq 3, x > 0, x + y < 3\}$ .  $\left[\frac{9}{2} \ln 3 - \frac{40}{9}\right]$

---

31. Spočtěte polární moment  $J_0(A)$  množiny  $A = \{(x, y); x^2 \leq y, y^2 \leq x\}$ .  $\left[\frac{6}{35}\right]$

---

32. Spočtěte  $\iint_A \sin^2 x \sin^2 y dx dy$ , kde  $A = \{(x, y); 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ .  $\left[\frac{\pi^2}{4}\right]$

---

33. Spočítejte  $\iint_A xy^2 e^{xy} dx dy$ , kde  $A = \{(x, y); 0 \leq x \leq 2, 0 < y < 1\}$ . [2]
- 
34. Vypočítejte  $\iint_A \frac{y^3}{x^2 + y^2} dx dy$ , kde  $A = \{(x, y); 0 \leq x \leq y, -2 \leq y \leq 4\}$ . [6 $\pi$ ]
- 
35. Vypočítejte  $\iint_A x^2 y dx dy$ , kde  $A = \{(x, y); y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2x\}$ . [ $\frac{4}{5}$ ]
- 
36. Vypočítejte  $\iint_A \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy$ , kde  $A = \{(x, y); x \leq 2, y \leq x \leq 2y\}$ . [ $\frac{\pi}{2} - 2 \arctg \frac{1}{2}$ ]
- 
37. Vypočítejte  $\iint_A (x^3 - x^2 y) dx dy$ , kde  $A = \{(x, y); y \geq x^2, x \geq y^2\}$ . [ $\frac{1}{504}$ ]
- 
38. Vypočítejte objem tělesa  $A$ , kde  $A = \{(x, y, z); x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 4 - x - y\}$ . [ $\frac{68}{15}$ ]
- 
39. Vypočítejte objem tělesa  $A$ , kde  $A = \{(x, y, z); 0 \leq z \leq 4 - x - y, 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$ . [ $\frac{55}{6}$ ]
- 
40. Vypočítejte objem tělesa  $A = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ . [ $\frac{2}{3}$ ]
- 
41. Vypočítejte objem tělesa  $A = \{(x, y, z); -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$ . [ $\frac{8}{3}$ ]
- 
42. Vypočítejte  $\iiint_A xy dx dy dz$ , kde  $A = \{(x, y, z); 0 \leq z \leq xy, x + y \leq 1, x > 0\}$ . [ $\frac{1}{180}$ ]
- 
43. Vypočítejte  $\iiint_A y \cos(x + z) dx dy dz$ , kde  $A = \{(x, y, z); 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2} - x, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ . [ $\frac{\pi^2}{116} - \frac{1}{2}$ ]
- 
44. Vypočítejte obsah obrazce  $A = \{(x, y); 1 \leq xy \leq 2, x \leq y \leq 2x, x \geq 0\}$ . [ $\frac{1}{2} \ln 2$ ]
- 
45. Vypočítejte obsah obrazce  $A = \{(x, y); x \leq y^2 \leq 4x, 2y \leq x^2 \leq 4y\}$ . [2]
- 
46. Určete souřadnice těžiště tělesa  $A = \{(x, y, z); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ , je-li hustota rozložení hmoty  $\rho(x, y, z) = x + y + z$ . [ $x_T = y_T = z_T = \frac{5}{9}$ ]
- 
47. Určete objem tělesa  $A = \{(x, y, z); 2z \geq x^2 + y^2 + 2, x^2 + y^2 + z \leq 4\}$ . [3 $\pi$ ]
- 
48. Určete těžiště a moment  $J_z(A)$  tělesa  $A = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, 1 \leq z \leq 2\}$ , je-li hustota rozložení hmoty rovna jedné. [ $x_T = y_T = 0, z_T = \frac{117}{80}; J_z = \frac{113}{5} \pi$ ]
- 
49. Určete souřadnice těžiště tělesa  $A = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq 4, z \geq 0, x + y + z \leq 4\}$ , je-li hustota rozložení hmoty rovna jedné. [ $x_T = y_T = -\frac{1}{4}, z_T = \frac{9}{4}$ ]
-

50. Spočítejte objem tělesa  $A = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ .  $\left[\frac{4}{3} \pi(2\sqrt{2} - 1)\right]$

---

51. Určete momenty setrvačnosti  $J_x(A)$ ,  $J_y(A)$ ,  $J_z(A)$  vzhledem k souřadnicovým osám pro těleso  $A = \left\{(x, y, z); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{z^2}{c^2}, 0 \leq z \leq c\right\}$ , je-li hustota rozložení hmoty rovna jedné.

$$\left[J_x = \frac{\pi}{20} abc(b^2 + 4c^2), J_y = \frac{\pi}{20} abc(a^2 + 4c^2), J_z = \frac{\pi}{20} abc(a^2 + b^2)\right]$$


---

52. Určete objem tělesa  $A = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq 4, y + z \leq 2, y - z \leq 2\}$ . [16 $\pi$ ]

---

53. Určete souřadnice těžiště tělesa  $A = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq 2y, z \geq 0, z^2 \leq x^2 + y^2\}$ .

$$\left[x_T = 0, y_T = \frac{6}{5}, z_T = \frac{27}{128} \pi\right]$$


---

54. Spočítejte  $\iiint_A \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ , kde  $A = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}$ .  $\left[\frac{\pi}{6}\right]$

---

55. Spočítejte moment setrvačnosti  $J_z(A)$  pro těleso  $A = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$ , je-li hustota rozložení hmoty rovna jedné.  $\left[\frac{4}{15} \pi R^5\right]$

---

56. Spočítejte  $\iiint_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , kde  $A = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0\}$ .  $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

---

57. Spočítejte  $\iiint_A xyz dx dy dz$ , kde  $A = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x > 0, y > 0, z > 0\}$ .

$$\left[\frac{R^6}{48}\right]$$


---

58. Spočítejte objem tělesa  $A = \left\{(x, y, z); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq \frac{z^2}{c^2}, z \geq 0\right\}$ .

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{3} \pi abc\right]$$


---

59. Vypočítejte objem tělesa  $A = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 \leq Rx\}$ .

$$\left[\frac{2}{9} (3\pi - 4)R^3\right]$$


---