# Křivkové integrály

Určete $\int_{\mathcal{C}} x^2 \,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C} = \{(x,y)\,;\ y = \ln x\,,\ 1 \le x \le 3\}$. $\left[\frac{1}{3}\,(10\sqrt{10} - 2\sqrt{2})\right]$

---

Určete $\int_{\mathcal{C}} (x+y) \,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C}$ je obvod trojúhelníka s vrcholy $A_1 = [0;0]$, $A_2 = [0;2]$, $A_3 = [1;0]$. $\left[\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}\right]$

---

Určete hmotnost oblouku paraboly $y^2 = 2x$, $|y| < 1$, je-li hmota rozložena s hustotou $f(x,y) = |y|$. $\left[\frac{2}{3}\,(2\sqrt{2} - 1)\right]$

---

Určete $\int_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2 + y^2} \,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C} = \big\{(x,y)\,;\ x^2 + y^2 = x\big\}$. $[2]$

---

Určete $\int_{\mathcal{C}} y \,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C}$ je část křivky popsané rovnicí $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$, která leží v prvním kvadrantu, tj. $x > 0$, $y > 0$. $\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

---

Stanovte hmotu jednoho závitu šroubovice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = kt$; $0 \le t \le 2\pi$, je-li hustota úměrná čtverci vzdálenosti od počátku. $\left[2\pi\left(a^2 + \frac{4}{3}\,\pi^2 k^2\right)\sqrt{a^2 + k^2}\right]$

---

Určete $\int_{\mathcal{C}} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C}$ je část Archimedovy spirály, která má v polárních souřadnicích rovnici $r = \varphi$ a leží uvnitř kruhu o poloměru $R \le \pi/2$. $\left[\frac{1}{3}\left((1 + R^2)^{3/2} - 1\right)\right]$

---

Určete hmotnost křivky $\mathcal{C} = \big\{(x,y,z)\,;\ x = y\,,\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2\,,\ x > 0\,,\ y > 0\,,\ z > 0\big\}$, je-li hmota rozložena s hustotou $f(x,y,z) = x + y$. $\left[\sqrt{2}\,R^2\right]$

---

Určete $\int_{\mathcal{C}} \left(x^2 + y^2\right) \,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C}$ je úsečka s krajními body $A = [a;a]$, $B = [b,b]$, $a < b$. $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\,(b^3 - a^3)\right]$

---

Určete hmotnost oblouku křivky $y = \ln x$, $0 < a < x < b$, je-li hmota rozložena s hustotou $f(x,y) = kx^2$. $\left[\frac{k}{3}\left((1 + b^2)^{3/2} - (1 + a^2)^{3/2}\right)\right]$

---

Určete $\int_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2 + y^2} \,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C} = \big\{((x,y),;\ x = a(\cos t + t\sin t)\,,\ y = a(\sin t - t\cos t)\,,\ 0 \le t \le 2\pi\,,\ a > 0\big\}$. $\left[\frac{a^3}{3}\left((1 + 4\pi^2)^{3/2} - 1\right)\right]$

---

Určete těžiště homogenní křivky $\mathcal{C} = \big\{(x,y)\,;\ x^2 + y^2 = R^2\,,\ y \ge 0\big\}$. $\left[x_T = 0\,,\ y_T = \frac{2}{\pi}\,R\right]$

---

Určete těžiště homogenního oblouku cykloidy dané parametrickou rovnicí $\mathcal{C} = \big\{(x,y)\,;\ x = a(t - \sin t)\,,\ y = a(1 - \cos t)\,,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle\,,\ a > 0\big\}$. $\left[x_T = \pi a\,,\ y_Y = \frac{4}{3}\,a\right]$

---

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Určete $\int_{\mathcal{C}} xy\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C}$ je obvod obdélníku s vrcholy $A_1 = [0;0]$, $A_2 = [0;2]$, $A_3 = [4;2]$, $A_4 = [4;0]$.

[24]

---

Určete $\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{x-y}$, kde $\mathcal{C}$ je úsečka s krajními body $A = [0;-2]$, $B = [4;0]$. $\left[\sqrt{5}\ln 2\right]$

---

Určete $\int_{\mathcal{C}} \left(5 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 4\right\}$. $[20\pi]$

---

Určete $\int_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C}$ je oblouk paraboly $y = \frac{x^2}{2}$ mezi body $A = [0;0]$, $B = [4;8]$.

$$\left[\frac{33}{4}\sqrt{17} - \frac{1}{16}\ln\left(4 + \sqrt{17}\right)\right]$$

---

Určete $\int_{\mathcal{C}} xy\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C} = \left\{(x,y)\,;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,\ x > 0\,,\ y > 0\right\}$. $\left[\frac{ab(b^3 - a^3)}{3(a^2 - b^2)}\right]$

---

Určete $\int_{\mathcal{C}} \sqrt{2y}\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C}$ je oblouk cykloidy dané rovnicí $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in (0, 2\pi)$.

$[4\pi a^{3/2}]$

---

Určete těžiště oblouku homogenní asteroidy dané rovnicí $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $x > 0$, $y > 0$; $a > 0$.

$$\left[x_T = y_T = \frac{2}{5}\,a\right]$$

---

Určete momenty setrvačnosti jednoho závitu šroubovice $\mathcal{C} = \left\{(x,y,z)\,;\ x = a\cos t\,,\ y = a\sin t\,,\ z = \frac{ht}{2\pi}\,,\ t \in (0, 2\pi)\right\}$, je-li hustota rozložení hmoty rovna jedné.

$$\left[J_x = J_y = \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right)\,,\ J_z = a^2\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}\right]$$

---

Určete hmotnost oblouku křivky $\mathcal{C} = \left\{(x,y,z)\,;\ x = at\,,\ y = \frac{a}{2}t^2\,,\ z = \frac{a}{3}t^3\,,\ 0 \le t \le 1\right\}$, je-li hmota rozložena s hustotou $f(x,y,z) = \sqrt{2y/a}$. $\left[\frac{3a}{16}\left(\ln\frac{2\sqrt{3}+3}{3} + 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\right)\right]$

---

Určete $\int_{\mathcal{C}} \sqrt{2y^2 + z^2}\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C}$ je dána rovnicemi $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x = y$. $\left[2\pi R^2\right]$

---

Určete těžiště obvodu křivočarého trojúhelníka složeného z oblouků, které jsou průnikem kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ se souřadnicovými rovinami v prvním kvadrantu, tj.$x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

$$\left[x_T = y_T = z_T = \frac{4R}{3\pi}\right]$$

---

Určete $\int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}s}{x+y}$, kde $\mathcal{C} = \{(x,y)\,;\ 2x - y + 1 = 0\,,\ 0 \le x \le 1\}$. $\left[\frac{2}{3}\sqrt{5}\ln 2\right]$

---

Určete $\int_{\mathcal{C}} \sqrt{y}\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C}$ je dáno parametrickou rovnicí $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in (0, 2\pi)$.

$[2\pi a\sqrt{2a}]$

---

Vypočtěte křivkové integrály prvního druhu

$\int_{\mathcal{C}} y^2\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C}$ je oblouk cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$; $0 \le t \le 2\pi$. $\left[\frac{256}{15}\,a^3\right]$

---

$\int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C}$ je křivka $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$; $0 \le t \le 2\pi$.

$\left[2\pi^2 a^3(1 + 2\pi^2)\right]$

---

$\int_{\mathcal{C}} xy\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C}$ je část hyperboly $x = a\cosh t$, $y = a\sinh t$; $0 \le t \le t_0$. $\left[\frac{a^3}{6}\left(\cosh^{3/2} 2t_0 - 1\right)\right]$

---

$\int_{\mathcal{C}} \left(x^{4/3} + y^{4/3}\right)\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C}$ je oblouk asteroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. $[4a^{7/3}]$

---

$\int_{\mathcal{C}} \exp\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C}$ je hranice konvexní oblasti omezená křivkami $r = a$, $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$; $r$ a $\varphi$ jsou polární souřadnice. $\left[\mathrm{e}^a\left(2 + \frac{\pi}{4}\,a\right) - 2\right]$

---

$\int_{\mathcal{C}} |y|\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C}$ je lemniskáta $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. $[2a^2(2 - \sqrt{2})]$

---

$\int_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C}$ je část logaritmické spirály $r = a\mathrm{e}^{k\varphi}$, $k > 0$, která leží uvnitř kruhu $r = a$.

$\left[2a^2\,\frac{k\sqrt{1 + k^2}}{1 + 4k^2}\right]$

---

$\int_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C}$ je kružnice $x^2 + y^2 = ax$. $[2a^2]$

---

$\int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}s}{y^2}$, kde $\mathcal{C}$ je řetězovka $y = a\cosh\frac{x}{a}$. $\left[\frac{\pi}{a}\right]$

---

Najděte délku oblouku křivky (všechny parametry jsou kladné)

$x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$ od bodu $[0; 0; 0]$ do bodu $[3; 3; 2]$. $[5]$

---

$x = \mathrm{e}^{-t}\cos t$, $y = \mathrm{e}^{-t}\sin t$, $z = \mathrm{e}^{-t}$, $0 < t < \infty$. $[\sqrt{3}]$

---

$y = a\arcsin\frac{x}{a}$, $z = \frac{a}{4}\ln\frac{a - x}{a + x}$ od bodu $[0; 0; 0]$ do bodu $[x_0; y_0; z_0]$. $\left[x_0 + \frac{a}{4}\ln\frac{a + x_0}{a - x_0}\right]$

---

$(x-y)^2 = a(x+y)$, $x^2 - y^2 = \frac{9}{8}\,z^2$ od bodu $[0; 0; 0]$ do bodu $[x_0; y_0; z_0]$. $\left[\frac{1}{a\sqrt{2}}\,(a + x_0 - y_0)(x_0 - y_0)\right]$

---

$x^2 + y^2 = cz$, $\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\,\frac{z}{c}$ od bodu $[0; 0; 0]$ do bodu $[x_0; y_0; z_0]$. $\left[\sqrt{z_0/c}\left(\frac{2}{3}\,z_0 + c\right)\right]$

---

Vypočtěte křivkový integrál prvního druhu

$\int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C}$ je část šroubovice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$; $0 \le t \le 2\pi$.

$\left[\frac{2}{3}\,\pi(3a^2 + 4\pi^2 b^2)\sqrt{a^2 + b^2}\right]$

---

$\int_{\mathcal{C}} x^2\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C}$ je kružnice $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$. $\left[\frac{2}{3}\,\pi a^3\right]$

---

$\int_{\mathcal{C}} z\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C}$ je kónická šroubovice $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$; $0 \le t \le t_0$. $\left[\frac{1}{3}\left(\left(2 + t_0^2\right)^{3/2} - 2^{3/2}\right)\right]$

Určete hmotnost křivky $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$, je-li její hustota v bodě $[x; y]$ rovna $\rho(x, y) = |y|$. $[4a^2]$

---

Najděte hmotnost oblouku paraboly $y^2 = 2px$, $0 \le x \le \dfrac{p}{2}$, je-li její hustota v bodě $[x; y]$ rovna $|y|$. $\left[\dfrac{2}{3}\, p^2 (2\sqrt{2} - 1)\right]$

---

Najděte hmotnost oblouku křivky $x = at$, $y = \dfrac{a}{2}\, t^2$, $z = \dfrac{a}{3}\, t^3$; $0 \le t \le 1$, jejíž hustota se mění podle vztahu $\rho = \sqrt{\dfrac{2y}{a}}$. $\left[\dfrac{a}{8}\left(3\sqrt{3} - 1 + \dfrac{3}{2}\,\ln\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\right)\right]$

---

Najděte těžiště oblouku homogenní cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$; $0 \le t \le \pi$. $\left[x_T = \dfrac{4}{3}\, a\,,\ y_T = \dfrac{4}{3}\, a\right]$

---

Najděte statické momenty $S_x = \displaystyle\int_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}s$, $S_y = \displaystyle\int_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}s$ oblouku asteroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $x > 0$, $y > 0$. $\left[S_x = S_y = \dfrac{3}{5}\, a^2\right]$

---

Najděte moment setrvačnosti kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ vzhledem k jejímu průměru. $[\pi a^3]$

---

Najděte polární momenty setrvačnosti vzhledem k bodu $[0; 0]$ $I_0 = \displaystyle\int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}s$ následujících křivek:

a) obvodu $\mathcal{C}$ čtverce $\max\{|x|, |y|\} = a$ $\left[\dfrac{32}{3}\, a^3\right]$

b) obvodu $\mathcal{C}$ rovnostranného trojúhelníka s vrcholy v polárních souřadnicích $[\rho; \varphi]$; $[a; 0]$, $[a; 2\pi/3]$, $[a; 4\pi/3]$ $\left[\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\, a^3\right]$

---

Najděte střední polární moment asteroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, tj. číslo $r_0$ dané vztahem $I_0 = \displaystyle\int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}s = s r_0$, kde $s$ je délka oblouku asteroidy. $\left[\dfrac{a^2}{2}\right]$

---

Najděte souřadnice těžiště homogenního oblouku $x = \mathrm{e}^t \cos t$, $y = \mathrm{e}^t \sin t$, $z = \mathrm{e}^t$; $-\infty < t \le 0$. $\left[x_T = \dfrac{2}{5}\,,\ y_T = -\dfrac{1}{5}\,,\ z_T = \dfrac{1}{2}\right]$

---

Vypočtěte $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (x^2 - xy)\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y$ kde $\mathcal{C} = \big\{(x, y)\,;\ y = x^2\,,\ -1 \le x \le 1\big\}$. $\left[-\dfrac{14}{15}\right]$

---

Vypočtěte $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y$, kde $\mathcal{C}$ je křivka $y = 1 - |1 - x|$, $0 < x < 2$. $\left[\dfrac{4}{3}\right]$

---

Vypočtěte $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (x + y)\,\mathrm{d}x + (x - y)\,\mathrm{d}y$, kde $\mathcal{C} = \left\{(x, y)\,;\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\right\}$. $[0]$

---

Vypočtěte $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} x^2\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{C} = \big\{(x, y, z)\,;\ x^2 + y^2 = z^2\,,\ z = 1\,,\ x > 0\,,\ y > 0\big\}$. $\left[\dfrac{1}{6}\right]$

---

Vypočtěte $\displaystyle\oint\limits_{ABCDA} \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{|x| + |y|}$, kde $ABCDA$ je obvod čtverce s vrcholy $A = [1;0]$, $B = [0;1]$, $C = [-1;0]$, $D = [0;-1]$. $[0]$

---

Vypočtěte $\displaystyle\oint\limits_{OmAnO} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}y - \mathrm{d}x$, kde $OmA$ je část paraboly $y = x^2$ a $OnA$ je úsečka $y = x$.

$\left[\frac{\pi}{4} - 1\right]$

---

Určete $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y^2\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{C} = \left\{(x,y,z)\,;\ x^2+y^2+z^2 = 1\,,\ x^2+y^2 = x\,,\ z > 0\right\}$. $\left[-\frac{\pi}{4}\right]$

---

Určete $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$ po křivce $\mathcal{C} = \left\{x,y,z)\,;\ x^2+y^2 = 1\,,\ x+z = 1\right\}$. $[-2\pi]$

---

Určete $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (y^2+1)\,\mathrm{d}x + 2z\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{C} = \left\{(x,y,z)\,;\ x^2+y^2+z^2 = 1\,,\ y = x\,,\ z > 0\right\}$.

$\left[\frac{\sqrt{2}}{6}\,(7+3\pi)\right]$

---

Určete $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x - \frac{x-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$, kde $\mathcal{C}$ je kružnice $x^2+y^2 = R^2$ orientovaná ve směru od kladné poloosy $x$ ke kladné poloose $y$. $[-2\pi]$

---

Určete $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y$, kde $\mathcal{C}$ je určena parametrickou rovnicí $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 < t < 2\pi$.

$\left[-\frac{3}{4}\,\pi a^2\right]$

---

Určete $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \sin y\,\mathrm{d}x + \sin x\,\mathrm{d}y$, kde $\mathcal{C}$ je úsečka s počátečním bodem $A = [0;\pi]$ a koncovým bodem $B = [\pi;0]$. $[0]$

---

Určete $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{C}$ je lomená čára s vrcholy $[0;0;0]$, $[1;0;0]$, $[1;1;0]$, $[1;1;1]$. $[1]$

---

Určete $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y$, kde $\mathcal{C} = \left\{(x,y)\,;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,\ x > 0\right\}$. $[-\pi ab]$

---

Určete $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} 2xy\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y$, kde $\mathcal{C}$ je:

a) úsečka s počátečním bodem $[0;0]$ a koncovým bodem $[2;1]$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

b) oblouk paraboly $y = \frac{1}{4}\,x^2$ s počátečním bodem $[0;0]$ a koncovým bodem $[2;1]$ $[0]$

c) oblouk paraboly $x = 2y^2$ s počátečním bodem $[0;0]$ a koncovým bodem $[2;1]$ $\left[\frac{12}{5}\right]$

d) lomená čára s vrcholy $[0;0]$, $[2;0]$, $[2;1]$ $[-4]$

e) lomená čára s vrcholy $[0;0]$, $[0;1]$, $[2;1]$ $[4]$

---

Určete $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (2a-y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$ po křivce $\mathcal{C}$ dané parametrickou rovnicí $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $0 < t < 2\pi$. $[-2\pi a^2]$

---

Určete $\int_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$ po obvodu trojúhelníka, jehož vrcholy jsou průsečíky roviny $3x+2y+6z = 6$ se souřadnicovými osami. $[-6]$

---

Určete $\int_{\mathcal{C}} (x-y)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{C} = \left\{(x,y,z)\,;\ x^2+y^2 = a^2\,,\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{h} = 1\,,\ a > 0\,,\ h > 0\right\}$ je orientována tak, že tečna ke křivce v bodě $[a;0;0]$ má kladnou druhou složku, tj. $\boldsymbol{t}(a,0,0)\cdot(0,1,0) > 0$. $[-2\pi a h]$

---

Určete $\int_{\mathcal{C}} xy\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y$ po úsečce s počátečním bodem $A = [1;1]$ a koncovým bodem $B = [2;3]$. $\left[\dfrac{13}{6}\right]$

---

Určete $\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$, kde $\mathcal{C}$ je oblouk paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $A = [1;1]$ a koncovým bodem $B = [2;4]$. $\left[\dfrac{17}{2}\right]$

---

Určete $\int_{\mathcal{C}} (4-y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, kde $\mathcal{C}$ je dáno parametrickou rovnicí $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $t \in (0, 2\pi)$. $[2\pi a(4-3a)]$

---

Určete $\int_{\mathcal{C}} y\sqrt{xy}\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, kde $\mathcal{C}$ je oblouk paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $A = [0;0]$ a koncovým bodem $B = [1;1]$. $\left[\dfrac{8}{9}\right]$

---

Určete $\int_{\mathcal{C}} \dfrac{x}{y}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\mathrm{d}y}{y-1}$, kde $\mathcal{C}$ je oblouk cykloidy dané parametrickou rovnicí $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$; $\pi/6 \le t \le \pi/3$. $\left[\dfrac{1}{24}\,\pi^2 + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,\ln 3\right]$

---

Přesvědčte se, že integrovaný výraz je úplný diferenciál a pomocí toho spočítejte

$$\int_{[-1;2]}^{[2;3]} x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x.$$ $[u = xy\,;\ 8]$

---

$$\int_{[0;1]}^{[3;-4]} x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y.$$ $\left[u = \dfrac{1}{2}\,(x^2+y^2)\,;\ 12\right]$

---

$$\int_{[0;1]}^{[2;3]} (x+y)\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y.$$ $\left[u = \dfrac{1}{2}\,x^2 + xy - \dfrac{1}{2}\,y^2\,;\ 4\right]$

---

$$\int_{[1;-1]}^{[1;1]} (x-y)(\,\mathrm{d}x - \,\mathrm{d}y).$$ $\left[u = \dfrac{1}{2}\,(x-y)^2\,;\ -2\right]$

---

$$\int_{[2;1]}^{[1,2]} \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2},$$ kde křivka neprotíná osu $Oy$. $\left[u = -\dfrac{y}{x}\,;\ -\dfrac{3}{2}\right]$

---

$$\int_{[1;0]}^{[6;8]} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$ kde křivka neprochází počátkem. $\left[u = \sqrt{x^2+y^2}\,;\ 9\right]$

---

$$\int_{[-2;-1]}^{[3;0]} (x^4 + 4xy^3)\,\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\,\mathrm{d}y$$ $\left[\frac{1}{5}\,x^5 + 2x^2y^3 - y^5\,;\ 62\right]$

---

$$\int_{[0;-1]}^{[1;0]} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{(x-y)^2},$$ kde křivka neprotíná přímku $y = x$. $\left[u = \frac{y}{x-y}\,;\ 1\right]$

---

$$\int_{[1;\pi]}^{[2;\pi]} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y,$$ kde křivka neprotíná osu $Oy$.

$\left[u = x + y\sin\frac{y}{x}\,;\ 1+\pi\right]$

---

$$\int_{[0;0]}^{[a;b]} \mathrm{e}^x(\cos y\,\mathrm{d}x - \sin y\,\mathrm{d}y).$$ $[u = \mathrm{e}^x\cos y\,;\ \mathrm{e}^a\cos b - 1]$

---

Dokažte, že je-li $f(u)$ spojitá funkce a $\mathcal{C}$ po částech hladká uzavřená křivka, je $\oint_{\mathcal{C}} f(x^2+y^2)(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y) = 0$.

---

Najděte funkci $z(x,y)$, je-li

$\mathrm{d}z = (x^2 + 2xy - y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 - 2xy - y^2)\,\mathrm{d}y.$ $\left[z = \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3}\right]$

$\mathrm{d}z = \dfrac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{3x^2 - 2xy + 3y^2}.$ $\left[z = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ \mathrm{arctg}\,\frac{3x-y}{2\sqrt{2}\,y}\right]$

$\mathrm{d}z = \dfrac{(x^2 + 2xy + 5y^2)\,\mathrm{d}x + 2(x^2 - 2xy - y^2)\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2}.$ $\left[z = \frac{x^2 + 3xy - 2y^2}{x+y}\right]$

$\mathrm{d}z = \mathrm{e}^x\left[\mathrm{e}^y(x - y + 2) + y\right]\mathrm{d}x + \mathrm{e}^x\left[\mathrm{e}^y(x-y) + 1\right]\mathrm{d}y.$ $\left[z = \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^y(x-y+1) + y\right)\right]$

---

Vypočtěte $\int_{\mathcal{C}} (y^2 - z^2)\,\mathrm{d}x + 2yz\,\mathrm{d}y - x^2\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{C}$ je křivka $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \le t \le 1$, orientovaná ve směru rostoucího parametru. $\left[\frac{1}{35}\right]$

---

Vypočtěte $\int_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{C}$ je závit šroubovice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le 2\pi$, orientovaný ve směru rostoucího parametru. $\left[-\pi a^2\right]$

---

Vypočtěte $\int_{\mathcal{C}} (y - z)\,\mathrm{d}x + (z - x)\,\mathrm{d}y + (x - y)\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{C}$ je kružnice $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $0 < \alpha < \pi/2$, která se probíhá proti směru hodinových ručiček, jestliže se na ni díváme ze strany kladných $x$. $\left[2\pi a^2(\cos\alpha - \sin\alpha)\right]$

---

Vypočtěte $\int_{\mathcal{C}} (y^2 - z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{C}$ je hranice části kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, která se probíhá tak, že vnější strana plochy je vlevo. [4]

---

Přesvědčte se, že integrovaný výraz je úplný diferenciál a pomocí toho integrál spočítejte

$$\int_{[1;1;1]}^{[2;3;-4]} x\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y - z^3\,\mathrm{d}z. \qquad \left[u = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{z^4}{4}\,;\ -53 - \frac{7}{12}\right]$$

---

$$\int_{[1;2;3]}^{[6;1;1]} yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z. \qquad [u = xyz\,;\ 0]$$

---

$$\int_{[x_1;y_1;z_1]}^{[x_2;y_2;z_2]} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \text{kde } x_1^2+y_1^2+z_1^2 = a^2,\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 = b^2,\ a>0,\ b>0.$$

$$\left[u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,;\ b-a\right]$$

---

$$\int_{[x_1;y_1;z_1]}^{[x_2;y_2;z_2]} f(x+y+z)(\,\mathrm{d}x +\,\mathrm{d}y +\,\mathrm{d}z),\ \text{kde } f \text{ je spojitá funkce.}$$

$$[u = F(x+y+z)\,;\ F'(u) = f(u)\,;\ F(x_2+y_2+z_2) - F(x_1+y_1+z_1)]$$

---

$$\int_{[x_1;y_1;z_1]}^{[x_2;y_2;z_2]} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z),\ \text{kde } f \text{ je spojitá funkce.}$$

$$\left[u = F\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\ ;\ F'(r) = rf(r)\,;\ F\left(\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\right) - F\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\right)\right]$$

---

Najděte funkci $u(x,y,z)$, jestliže

$$\mathrm{d}u = (x^2-2yz)\,\mathrm{d}x + (y^2-2xz)\,\mathrm{d}y + (z^2-2xy)\,\mathrm{d}z. \qquad \left[u = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} - 2xyz\right]$$

---

$$\mathrm{d}u = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)\,\mathrm{d}y - \frac{xy}{z^2}\,\mathrm{d}z. \qquad \left[u = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z}\right]$$

---

$$\mathrm{d}u = \frac{(x+y-z)\,\mathrm{d}x + (x+y-z)\,\mathrm{d}y + (x+y+z)\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2+2xy}.$$

$$\left[u = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2+z^2+2xy\right) - \operatorname{arctg}\frac{x+y}{z}\right]$$

---

Najděte práci, kterou vykoná homogenní gravitační síla, jestliže se bod o hmotnosti $m$ přemístí z bodu $[x_1;y_1;z_1]$ do bodu $[x_2;y_2;z_2]$; osa $Oz$ směřuje vertikálně nahoru. $[mg(z_1-z_2)]$

---

Najděte práci elastické síly směřující k počátku souřadnic, jestliže její velikost je úměrná vzdálenosti hmotného bodu od počátku souřadnic, když se hmotný bod pohybuje proti směru hodinových ručiček po kladné čtvrtině elipsy $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. $\left[\dfrac{km}{2}(a^2-b^2)\right]$

---

Najděte práci gravitační síly $F = \dfrac{k}{r^2}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, která působí na hmotný bod s hmotností 1, který se přemístí z bodu $[x_1;y_1;z_1]$ do bodu $[x_2;y_2;z_2]$. $\left[k\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\right)\right]$

---

Pomocí Greenovy věty převeďte křivkový integrál $\oint_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + y\left[xy + \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]\,\mathrm{d}y$, kde $\mathcal{C}$ je hranice konečné oblasti $\mathcal{S}$. $\left[\iint_{\mathcal{S}} y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]$

---

Pomocí Greenovy věty vypočtěte

$\oint_{\mathcal{C}} xy^2\,\mathrm{d}x - x^2y\,\mathrm{d}y$, kde $\mathcal{C}$ je kružnice $x^2+y^2=a^2$. [0]

$\oint_{\mathcal{C}} (x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y$, kde $\mathcal{C}$ je elipsa $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. $[-2\pi ab]$

$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{e}^x[(1-\cos y)\,\mathrm{d}x - (y-\sin y)\,\mathrm{d}y]$, kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná hranice oblasti $0<x<\pi$, $0<y<\sin x$. $\left[\dfrac{1}{5}\left(1-\mathrm{e}^{\pi}\right)\right]$

$\oint_{x^2+y^2=R^2} \exp\left[-(x^2+y^2)\right](\cos 2xy\,\mathrm{d}x + \sin 2xy\,\mathrm{d}y)$. [0]

---

Jakou rovnici musí splňovat dvakrát diferencovatelné funkce $P(x,y)$ a $Q(x,y)$, aby křivkový integrál $\oint_{\mathcal{C}} P(x+\alpha, y+\beta)\,\mathrm{d}x + Q(x+\alpha, y+\beta)\,\mathrm{d}y$, nezávisel na konstantách $\alpha$, $\beta$ pro jakoukoliv po částech hladkou uzavřenou křivku $\mathcal{C}$? $[Q_x - P_y = \text{konst.}]$

---

Jakou podmínku musí splňovat funkce $F(x,y)$, aby křivkový integrál $\int_{AmB} F(x,y)(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$ nezávisel na integrační cestě? $[xF_x - yF_y = 0\,;\ F(x,y) = f(xy)]$

---

Pomocí křivkových integrálů vypočtěte obsah množiny omezené křivkou

Elipsou $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$. $[\pi ab]$

Asteroidou $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0\le t\le 2\pi$. $\left[\dfrac{3}{8}\,\pi a^2\right]$

Parabolou $(x+y)^2 = ax$ a osou $Ox$, $a>0$. $\left[\dfrac{a^2}{6}\right]$

Smyčkou Descartova listu $x^3+y^3 = 3axy$, $a>0$. Položte $y = tx$. $\left[\dfrac{3}{2}\,a^3\right]$

Lemniskátou $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$. $[a^2]$

Epicykloida je křivka, kterou opisuje bod kružnice s poloměrem $r$, která se valí bez prokluzování po nehybné kružnici s poloměrem $R$ a leží vně této kružnice. Předpokládejte, že $R = nr$, kde $n\ge 1$ je celé, a najděte obsah epicykloidy. $\left[(n+1)(n+2)\pi r^2\right]$

---

Hypocykloida je křivka, kterou opisuje bod kružnice s poloměrem $r$, která se valí bez prokluzování po nehybné kružnici s poloměrem $R$ a leží uvnitř této kružnice. Předpokládejte, že $R = nr$, kde $n\ge 2$ je celé, a najděte obsah hypocykloidy. $\left[n(n-1)\pi r^2\right]$

---

Vypočtěte integrál $\int_{\mathcal{C}} (x^2 - yz)\,\mathrm{d}x + (y^2 - xz)\,\mathrm{d}y + (z^2 - xy)\,\mathrm{d}z$ po části šroubovice $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = \dfrac{h}{2\pi}\,\varphi$ s počátečním bodem $A = [a; 0; 0]$ a koncovým bodem $B = [a; 0; h]$. $\left[\dfrac{1}{3}\,h^3\right]$

---

Pomocí Stokesovy věty vypočtěte integrál $\oint_{\mathcal{C}} (y + z)\,\mathrm{d}x + (z + x)\,\mathrm{d}y + (x + y)\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{C}$ je elipsa $x = a\sin^2 t$, $y = 2a\sin t\cos t$, $z = \cos^2 t$, $0 \le t \le \pi$, orientovaná ve směru rostoucího parametru $t$.

$[0]$

---

Pomocí Stokesovy věty vypočtěte integrál $\oint_{\mathcal{C}} (y - z)\,\mathrm{d}x + (z - x)\,\mathrm{d}y + (x - y)\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{C}$ je elipsa $x^2 + y^2 = a^2$, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{h} = 1$, $a > 0$, $h > 0$. $[-2\pi a(a + h)]$

---

Pomocí Stokesovy věty vypočtěte integrál $\oint_{\mathcal{C}} (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 + z^2)\,\mathrm{d}y + (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}z$ kde $\mathcal{C}$ je křivka $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $x^2 + y^2 = 2rx$, $0 < r < R$, $z > 0$, orientovaná tak, že vnější strana menší části kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ ohraničená touto křivkou je vlevo. $[2\pi Rr^2]$

---