Přednáška 1

Neurčitý integrál

Osnova přednášky

1. Primitivní funkce; příklad

$$f(x) = \sin 2x\,, \qquad F_1(x) = \sin^2 x\,, \quad F_2(x) = -\cos^2 x\,, \quad F_3(x) = -\tfrac{1}{2}\,\cos 2x\,.$$

2. Vztah mezi primitivními funkcemi.

3. Odhad integrálu $\int \mathrm{e}^{ax} P_N(x)\,\mathrm{d}x$, kde $a \neq 0$; příklad:

$$\int \mathrm{e}^{-2x}(x^2 - x + 3)\,\mathrm{d}x\,.$$

4. Odhad integrálů $\int \mathrm{e}^{\rho x}\cos\omega x\,\mathrm{d}x$ a $\int \mathrm{e}^{\rho x}\sin\omega x\,\mathrm{d}x$; příklad:

$$\int \mathrm{e}^{-2x}\big(2\cos 3x - \sin 3x\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

5. Linearita neurčitého integrálu.

6. Věta o integraci per partes; příklady

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \ln\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \mathrm{e}^x \sin 2x\,\mathrm{d}x\,.$$

7. První věta o substituci; příklady

$$\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^8+1}\,, \qquad \int \cos^3 x\,\mathrm{d}x\,.$$

8. Druhá věta o substituci; rozdíl mezi první a druhou větou o substituci.

9. Lineární substituce; příklady

$$\int \mathrm{e}^{3x+2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+3x+4}\,.$$

10. Příklad $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$; substituce $x = \sin t$.

11. Výpočet integrálů typu

$$\int \sin\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \sin\alpha x\sin\beta x\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \cos\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x\,.$$

V této přednášce se budeme zabývat řešením rovnice $y'(x) = f(x)$, kde $f(x)$ je daná funkce definovaná na množině $X \subset \mathbb{R}$. Každé řešení, tj. funkce $y = y(x)$, této rovnice se nazývá primitivní funkce k funkci $f(x)$ a množina všech jejích řešení se nazývá neurčitý integrál.

Definice. Nechť je dána funkce $f : X \to \mathbb{R}$, kde $X \subset \mathbb{R}$. Každou funkci $F : X \to \mathbb{R}$, pro kterou platí

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in X\,, \tag{1}$$

nazýváme *primitivní funkce* k funkci $f(x)$ na množině X.

Příklad. Funkce $F_1(x) = \sin^2 x$, $F_2(x) = -\cos^2 x$ a $F_3(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$ jsou primitivní funkce k funkci $f(x) = \sin 2x$ na $\mathbb{R}$.

Věta. Jsou-li $F_1(x)$ a $F_2(x)$ primitivní funkce k funkcím $f_1(x)$ a $f_2(x)$ na množině X a c_1, c_2 reálná čísla, je funkce $F(x) = c_1F_1(x) + c_2F_2(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x) = c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$ na množině X.
Důkaz: Pro každé $x \in X$ je

$$F'(x) = \big(c_1F_1(x) + c_2F_2(x)\big)' = c_1F_1'(x) + c_2F_2'(x) = c_1f_1(x) + c_2f_2(x) = f(x)\,.$$

Věta. Nechť jsou $F_1(x)$ a $F_2(x)$ dvě primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu $\mathcal{I}$. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in \mathcal{I}$ je $F_2(x) = F_1(x) + c$.
Důkaz: Uvažujme funkci $F(x) = F_2(x) - F_1(x)$. Protože jsou funkce $F_1(x)$ a $F_2(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu $\mathcal{I}$ je podle předchozí věty

$$F'(x) = \big(F_2(x) - F_1(x)\big)' = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

pro každé $x \in \mathcal{I}$. Z Cauchyovy věty o střední hodnotě pak plyne, že $F(x)$ je na $\mathcal{I}$ konstantní. $\square$

Poznámka. Není-li množina X interval, může existovat víc primitivních funkcí. Například jedna primitivní funkce k funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ na množině $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je $F_1(x) = \ln|x|$. Ale také funkce $F_2(x) = \ln|x| + c_+$ pro $x > 0$ a $F_2(x) = \ln|x| + c_-$ pro $x < 0$ je primitivní funkce k $f(x)$ na množině X.

Definice. Nechť je $f : X \to \mathbb{R}$. Množina všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na množině X se nazývá *neurčitý integrál* funkce $f(x)$ na množině X. Tuto množinu funkcí budeme značit $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Poznámka. Často se pro vyjádření skutečnosti, že neurčitý integrál není funkce, ale celá množina funkcí, používá zápis

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c\,,$$

kde $F(x)$ je jedna z primitivních funkcí k funkci $f(x)$. Toto označení pochází z toho, že na intervalu je neurčitý integrál určen až na konstantu jednou primitivní funkcí.

V přednášce většinou nebudu toto značení používat, ale musíte si uvědomit, že například z rovnosti $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + 1$ neplyne $0 = 1$.

Neurčitý integrál se většinou počítá tak, že jej buď znáte, aspoň přibližně, nebo se jej snažíte převést na integrál, který znáte, pomocí vět, které jsou důsledkem vět o derivacích.

Tabulka některých primitivních funkcí

$f(x)$	$F(x)$	**poznámka**
x^a	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$	a je konstantní, $a+1 \neq 0$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2}\pi$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \operatorname{argtgh} x\,,\quad \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = \operatorname{argcotgh} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\arcsin x = -\arccos x + \frac{1}{2}\pi$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln\bigl(x+\sqrt{x^2+1}\,\bigr)$	$\ln\bigl(x+\sqrt{x^2+1}\,\bigr) = \operatorname{argsinh} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\bigl(x+\sqrt{x^2-1}\,\bigr)$	$\ln\bigl(x+\sqrt{x^2-1}\,\bigr) = \operatorname{argcosh} x$
e^x	e^x	
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$a>0$, $a\neq 1$ je konstanta, $a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}$
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotg} x$	
$\sinh x$	$\cosh x$	$\sinh x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\cosh x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$
$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\operatorname{tgh} x$	$\operatorname{tgh} x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$
$\dfrac{1}{\sinh^2 x}$	$-\operatorname{cotgh} x$	$\operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$

Mnohdy stačí znát pouze přibližný tvar primitivní funkce $F(x)$, ve kterém jsou neznámé konstanty a ty pak najít z rovnosti

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) \iff f(x) = F'(x)\,.$$

Uvedeme pouze dva příklady takových typů integrálu, se kterými se setkáme ještě na konci semestru při řešení jistých typů diferenciálních rovnic.

1. Integrály typu $\int \mathrm{e}^{ax} P_N(x)\,\mathrm{d}x$, kde $a \neq 0$ a $P_N(x)$ je polynom stupně N lze najít ve tvaru
$$\int \mathrm{e}^{ax} P_N(x) = \mathrm{e}^{ax} Q_N(x)\,, \tag{2}$$
kde $Q_N(x)$ je polynom stupně N s neznámými koeficienty.

2. Integrály typu $\int \mathrm{e}^{\rho x} \cos \omega x \, \mathrm{d}x$, resp. $\int \mathrm{e}^{\rho x} \sin \omega x \, \mathrm{d}x$ lze najít ve tvaru

$$\begin{aligned} \int \mathrm{e}^{\rho x} \cos \omega x \, \mathrm{d}x &= \mathrm{e}^{\rho x} \big(A \cos \omega x + B \sin \omega x \big) \,, \\ \int \mathrm{e}^{\rho x} \sin \omega x \, \mathrm{d}x &= \mathrm{e}^{\rho x} \big(A \cos \omega x + B \sin \omega x \big) \,, \end{aligned} \tag{3}$$

kde A a B jsou reálná čísla.

Příklad. Podle (2) je

$$\int \mathrm{e}^{-2x} \big(x^2 - x + 3 \big) \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2x} \big(Ax^2 + Bx + C \big) \,,$$

kde A, B a C jsou nějaká reálná čísla. Ta najdeme z rovnosti

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-2x} \big(x^2 - x + 3 \big) &= \Big(\mathrm{e}^{-2x} \big(Ax^2 + Bx + C \big) \Big)' = \\ &= -2\mathrm{e}^{-2x} \big(Ax^2 + Bx + C \big) + \mathrm{e}^{-2x} \big(2Ax + B \big) = \\ &= \mathrm{e}^{-2x} \big(-2Ax^2 + (2A - 2B)x + (B - 2C) \big) \,, \end{aligned}$$

která musí platit pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Proto musí být

$$-2A = 1 \,, \quad 2A - 2B = -1 \,, \quad B - 2C = 3 \,, \quad \text{neboli} \quad A = -\tfrac{1}{2} \,, \quad B = 0 \,, \quad C = -\tfrac{3}{2} \,.$$

a platí

$$\int \mathrm{e}^{-2x} \big(x^2 - x + 3 \big) \, \mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2} \, \mathrm{e}^{-2x} \big(x^2 + 3 \big) \,.$$

Příklad. Podle (3) a linearity neurčitého integrálu, viz dále, je

$$\int \mathrm{e}^{-x} \big(2 \cos 3x - \sin 3x \big) \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-x} \big(A \cos 3x + B \sin 3x \big) \,,$$

kde A a B jsou jistá reálná čísla, která najdeme ze vztahu

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-x} \big(2 \cos 3x - \sin 3x \big) &= \Big[\mathrm{e}^{-x} \big(A \cos 3x + B \sin 3x \big) \Big]' = \\ &= -\mathrm{e}^{-x} \big(A \cos 3x + B \sin 3x \big) + \mathrm{e}^{-x} \big(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x \big) = \\ &= \mathrm{e}^{-x} \Big((-A + 3B) \cos 3x + (-B - 3A) \sin 3x \Big) \end{aligned}$$

který musí platit pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Z toho plyne, že musí být

$$-A + 3B = 2 \,, \quad -3A - B = -1 \,, \quad \text{neboli} \quad A = \tfrac{1}{10} \,, \quad B = \tfrac{7}{10} \,.$$

Z toho pak dostaneme

$$\int \mathrm{e}^{-x} \big(2 \cos 3x - \sin 3x \big) \, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{10} \, \mathrm{e}^{-x} \big(\cos 3x + 7 \sin 3x \big) \,.$$

Linearita neurčitého integrálu

Věta. Pokud existují neurčité integrály funkcí $f_1(x)$ a $f_2(x)$ a a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$, je

$$\int \big(a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)\big)\,\mathrm{d}x = a_1 \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + a_2 \int f_2(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{4}$$

Integrace per partes

Metoda integrace per partes souvisí s derivací součinu dvou funkcí, tj. se vztahem

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,.$$

Intergací tohoto vztahu dostanem následující větu.

Věta (*integrace per partes*). Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ diferencovatelné a existuje $\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$. Pak existuje $\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ a platí

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{5}$$

Důkaz: Tato věta je důsledkem věty o derivaci součinu. Z ní plyne, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(f(x)\,g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\Big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f(x)g'(x) = f'(x)g(x)\,. \qquad \square$$

Uvedeme tři typické příklady na použití metody integrace per partes.

Příklad. Najděte neurčitý integrál $\int x \sin x\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Derivací funkce $g(x) = x$ se zbavíme mocniny a zůstane nám integrál, který známe. Vybereme tedy $f'(x) = \sin x$ a $g(x) = x$. Pak je $f(x) = -\cos x$ a $g'(x) = 1$. Podle vztahu (5) pak je

$$\int x \sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x - \int (-\cos x)\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x\,.$$

`Poznámka`: Kdybychom zvolili $f'(x) = x$ a $g(x) = \sin x$ dostali bychom ze vztahu (5)

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\,x^2\sin x - \tfrac{1}{2}\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x\,,$$

což je sice správně, ale k výpočtu integrálu to nevede.

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \ln\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Položíme $f'(x) = 1$ a $g(x) = \ln\sqrt{x^2+1}$. Protože je $f(x) = x$ a $g'(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, dostaneme z (5)

$$\begin{aligned}\int \ln\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= x\ln\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = x\ln\sqrt{x^2+1} - \int\Big(1 - \frac{1}{x^2+1}\Big)\,\mathrm{d}x = \\ &= x\ln\sqrt{x^2+1} - x + \operatorname{arctg} x\,.\end{aligned}$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \mathrm{e}^x \sin 2x \,\mathrm{d}x$.

Řešení: Označíme $f'(x) = \mathrm{e}^x$ a $g(x) = \sin 2x$. Protože $f(x) = \mathrm{e}^x$ a $g'(x) = 2\cos 2x$, je podle (5)

$$\int \mathrm{e}^x \sin 2x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \sin 2x - 2\int \mathrm{e}^x \cos 2x \,\mathrm{d}x \,.$$

V integrálu na pravé straně použijeme ještě jednou integrace per partes. Označíme $f'(x) = \mathrm{e}^x$ a $g(x) = \cos 2x$. Protože $f(x) = \mathrm{e}^x$ a $g'(x) = -2\sin 2x$, je podle (5)

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x \sin 2x \,\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x \sin 2x - 2\Big(\mathrm{e}^x \cos 2x + 2\int \mathrm{e}^x \sin 2x \,\mathrm{d}x\Big) = \\ &= \mathrm{e}^x \sin 2x - 2\mathrm{e}^x \cos 2x - 4\int \mathrm{e}^x \sin 2x \,\mathrm{d}x \,.\end{aligned}$$

To je rovnice pro $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin 2x \,\mathrm{d}x$, ze které plyne

$$\int \mathrm{e}^x \sin 2x = \tfrac{1}{5}\,\mathrm{e}^x \sin 2x - \tfrac{2}{5}\,\mathrm{e}^x \cos 2x \,.$$

`Poznámka.` Tento integrál jsme mohli také počítat pomocí vztahů (3). Bylo by dobré, kdybyste si srovnali oba postupy a při výpočtu integrálů podobného typu si jeden vybrali.

Substituční metoda

Další metoda integrace souvisí s derivací složené funkce. Zhruba řečeno platí

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F\big(\varphi(t)\big) \,.$$

Následující dvě věty o substituci se liší v tom, že v první větě předpokládáme, že známe integrál vlevo a počítáme integrál vpravo, kdežto ve druhé je tomu naopak.

Věta (*první věta o substituci*). Nechť je $f : X \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\varphi : T \to X$ je diferencovatelná funkce. Pak platí

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F\big(\varphi(t)\big) \,. \tag{6}$$

Důkaz: Podle věty o derivaci složené funkce je pro každé $t \in T$

$$\frac{\mathrm{d}F\big(\varphi(t)\big)}{\mathrm{d}t} = F'\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t) \,,$$

protože $F'(x) = f(x)$. □

Uvedeme dva příklady na použití této věty.

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^8+1}$.

Řešení: Když označíme $y = y(x) = x^4$, je derivace $y'(x) = 4x^3$ a integrál lze zapsat ve tvaru

$$\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^8+1} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3\,\mathrm{d}x}{x^8+1} = \frac{1}{4}\int \frac{y'(x)\,\mathrm{d}x}{y^2(x)+1}\,.$$

A protože $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \operatorname{arctg} y$, je

$$\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^8+1} = \tfrac{1}{4}\operatorname{arctg} x^4.$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Toto je typický příklad na substituci v integrálech, které obsahují funkce $\sin x$ a $\cos x$. Protože $(\sin x)' = \cos x$ a sudé mocniny $\cos x$ lze pomocí vztahu $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ převést na mocniny funkce $\sin x$, je výhodné v integrálech, které jsou liché ve funkci $\cos x$, tj. když změníme znaménko u funkce $\cos x$, změní se znaménko integrované funkce, zavést substituci $y(x) = \sin x$. V našem případě je

$$\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x = \int \cos^2 x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \int \bigl(1 - \sin^2 x\bigr)\cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \int \bigl(1 - y^2(x)\bigr)\cdot y'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

A protože $\int (1-y^2)\,\mathrm{d}y = y - \frac{1}{3}\,y^3$, je

$$\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x = \sin x - \tfrac{1}{3}\sin^3 x\,.$$

Ve druhé větě o substituci předpokládáme, že známe integrál

$$\int f\bigl(\varphi(t)\bigr)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \Psi(t)\,.$$

Abychom se vrátili zpět k proměnné $x = \varphi(t)$, musíme udělat předpoklady, které zaručí, že existuje inverzní funkce $t = \varphi^{(-1)}(x)$.

Věta (*druhá věta o substituci*) Nechť je $\mathcal{T}$ interval, $\varphi : \mathcal{T} \to X$ je vzájemně jednoznačná diferencovatelná funkce a $\varphi'(t) \neq 0$ pro každé $t \in \mathcal{T}$. Jestliže existuje integrál $\int f\bigl(\varphi(t)\bigr)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \Psi(t)$, pak existuje

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \Psi\bigl(\varphi^{(-1)}(x)\bigr)\,. \tag{7}$$

`Poznámka.` Při praktickém použití vět o substituci často nerozlišujeme, zda používáme první nebo druhou větu o substituci. Stojíme totiž před úkolem najít neurčitý integrál

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{8}$$

Když se rozhodneme použít substituci $x = x(t)$, najdeme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x'(t) \implies \mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Po dosazení do (8) dostaneme

$$\int f\big(x(t)\big)\, x'(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Jestliže umíme najít tento integrál, tj. funkci $\Psi(t)$, musíme z rovnice $x = x(t)$ ještě najít t jako funkci proměnné x, tj. inverzní funkci, a dosadit. To je právě druhá věta o substituci.

Jestliže z rovnice $x = x(t)$ nejprve najdeme funkci $t = \varphi(x)$ a derivujeme tento vztah, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \varphi'(x) \implies \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\varphi'(x)}\,, \qquad \varphi'(x) \neq 0\,.$$

Po dosazení dostaneme

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = \int f\big(x(t)\big) \frac{\mathrm{d}t}{\varphi'\big(x(t)\big)}\,.$$

To je vlastně taky druhá věta o substituci. První větu o substituci dostaneme v podstatě tehdy, když se nám výraz $\dfrac{1}{\varphi'\big(x(t)\big)}$ po dosazení "vykrátí". Pak tímto výrazem nepotřebujeme dělit a nemusíme předpokládat, že je nenulový.

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \mathrm{e}^{3x+2}\, \mathrm{d}x$.

Řešení: Uvědomte si, že znáte pouze integrál $\int \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$, nikoliv tento integrál. Proto je výhodné tento integrál na takový integrál převést. To uděláte nejlépe tak, že zavedeme novou proměnnou $t = 3x + 2$. Pak je

$$\mathrm{d}t = 3\, \mathrm{d}x \implies \mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\, \mathrm{d}t$$

a po dosazení dostaneme

$$\int \mathrm{e}^{3x+2}\, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{3} \int \mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{3}\, \mathrm{e}^t = \tfrac{1}{3}\, \mathrm{e}^{3x+2}\,.$$

`Poznámka.` Při výpočtu posledního integrálu jsme udělali lineární substituce, tj. substituce typu $t = ax + b$. Tato substituce se používá poměrně často, a proto uvedeme obecný výsledek. Je-li $\displaystyle\int f(x)\, \mathrm{d}x = F(x)$ a $a \neq 0$, pak

$$\int f(ax + b)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\, F(ax + b)\,. \tag{9}$$

Máme-li totiž najít neurčitý integrál $\int f(ax + b)\, \mathrm{d}x$ uděláme substituci $ax + b = t$. Pak je $a\, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ a

$$\int f(ax + b)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \int f(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{a}\, F(t) = \frac{1}{a}\, F(ax + b)\,.$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2 + 3x + 4}$.

Řešení: Výpočet integrálů tohoto typu závisí na tom, zda má kvadratický polynom $2x^2 + 3x + 4$ reálné kořeny. Každý z integrálů

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x - a)^2}\,, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{(x - a)(x - b)} \quad \text{a} \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2}$$

se totiž počítá jinak. Protože rovnice $2x^2+3x+4=0$ nemá reálná řešení, je tento integrál posledního typu a budeme jej snažit na tento tvar převést.

Postupně dostaneme

$$2x^2+3x+4=2\bigl(x^2+\tfrac{3}{2}\,x+2\bigr)=2\bigl((x+\tfrac{3}{4})^2-\tfrac{9}{16}+2\bigr)=2\bigl((x+\tfrac{3}{4})^2+\tfrac{23}{16}\bigr)\,.$$

Z toho dostaneme

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{2x^2+3x+4}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{3}{4})^2+\frac{23}{16}}\,.$$

Když si uvědomíme, jaký integrál chceme dostat, nabízí se substituce $x+\frac{3}{4}=t$. Pak je $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ a

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{2x^2+3x+4}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{23}{16}}\,.$$

Teď je otázka, zda znáte integrál $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$ nebo pouze integrál $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=\operatorname{arctg}x$. Pokud znáte pouze tento integrál, musíte ještě náš integrál převést na tento tvar.

To uděláme tak, že napíšeme

$$\frac{1}{x^2+a^2}=\frac{1}{a^2}\,\frac{1}{\bigl(\frac{x}{a}\bigr)^2+1}$$

a použijeme substituci $\dfrac{x}{a}=y$, tj. $x=ay$. Pak je $\mathrm{d}x=a\,\mathrm{d}y$ a

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{a\,\mathrm{d}y}{y^2+1}=\frac{\operatorname{arctg}y}{a}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,. \tag{10}$$

Integrál typu (10) se poměrně často vyskytuje při výpočtu integrálů a stojí za to, si jej zapamatovat.

V našem integrálu je $a=\dfrac{\sqrt{23}}{4}$, a tedy

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{2x^2+3x+4}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{t^2+\frac{23}{16}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\frac{4t}{\sqrt{23}}=\frac{2}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\frac{4x+3}{\sqrt{23}}\,.$$

`Poznámka.` Vztah (9) lze použít i k výpočtu integrálů typu $\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$ a $\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$. Podle Eulerových vztahů je

$$\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}=\mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{ibx}=\mathrm{e}^{ax}\bigl(\cos bx+\mathrm{i}\sin bx\bigr)=\mathrm{e}^{ax}\cos bx+\mathrm{i}\mathrm{e}^{ax}\sin bx\,.$$

Tedy $\mathrm{e}^{ax}\cos bx=\operatorname{Re}\bigl(\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}\bigr)$ a $\mathrm{e}^{ax}\sin bx=\operatorname{Im}\bigl(\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}\bigr)$. Proto je

$$\int\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}\,\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int\mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x\,,$$

neboli

$$\int\mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x=\operatorname{Re}\left(\int\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}\,\mathrm{d}x\right),\qquad\int\mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x=\operatorname{Im}\left(\int\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}\,\mathrm{d}x\right).$$

Podle (9) je

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}}{a+\mathrm{i}b} = \frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}\,\mathrm{e}^{ax}\big(\cos bx + \mathrm{i}\sin bx\big) = \\ &= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}\big(a\cos bx + b\sin bx\big) + \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}\big(a\sin bx - b\cos bx\big)\,.\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}\big(a\cos bx + b\sin bx\big)\,,\\ \int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}\big(a\sin bx - b\cos bx\big)\,.\end{aligned}$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Tento integrál lze najít integrací per partes nebo pomocí substituce. Při použití substituce jde o to, abychom se v integrovaném výrazu zbavili druhé odmocniny. Jedna z možností, jak to udělat, je použít vztah $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ Pak je $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ a na intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, kde je funkce $\cos t$ kladná, je $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$.

Proto položíme $x = \sin t$. Pak je $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ a z integrálu dostaneme pro $t \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t\,.$$

`Poznámka.` Neurčité integrály typu

$$\int \sin\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x\,,\qquad \int \sin\alpha x\sin\beta x\,\mathrm{d}x\,,\qquad \int \cos\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x$$

lze najít buď dvojnásobnou integrací per partes podobně jako integrál $\int \mathrm{e}^{ax}\sin\beta x\,\mathrm{d}x$ nebo $\int \mathrm{e}^{ax}\cos\beta x\,\mathrm{d}x$, viz příklad dříve, nebo pomocí vzorců

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,,\qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,,$$

ze kterých plyne

$$\begin{aligned}\sin\alpha\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\big)\,,\\ \cos\alpha\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big)\,,\\ \sin\alpha\sin\beta &= \tfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big)\,.\end{aligned} \tag{11}$$

Z druhého vztahu v (11) pro $\alpha = \beta = t$ dostaneme $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$. Tedy

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\int \big(1+\cos 2t\big)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\big(t + \tfrac{1}{2}\sin 2t\big) = \tfrac{1}{2}\,t + \tfrac{1}{2}\sin t\cos t\,.$$

Z definičního vztahu $x = \sin t$ plyne $t = \arcsin x$ a protože $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2}$, je hledaný integrál

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\,\arcsin x + \tfrac{1}{2}\,x\sqrt{1-x^2}\,.$$