Přednáška 10

Diferenciální rovnice prvního řádu

Osnova přednášky

1. Úvodní poznámky o diferenciálních rovnicích.

2. Diferenciální rovnice prvního řádu, partikulární a obecné řešení.

3. Počáteční podmínka a Cauchyova úloha pro diferenciální rovnici prvního řádu.

4. Geometrická interpretace řešení diferenciální rovnice prvního řádu.

5. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.

6. Příklady

$$x' = \frac{1-t^2}{tx}\,, \quad x(1) = 2\,, \qquad x' = \frac{2\sin x}{t(t-2)}\,, \qquad x' = 3x^{2/3}\,, \quad x(0) = 0\,.$$

7. Lineární diferenciální rovnice prvního řádu.

8. Homogenní a nehomogenní rovnice, tvar obecného řešení.

9. Řešení homogenní diferenciální rovnice prvního řádu.

10. Příklady

$$x' + 2tx = 0\,, \qquad x' + \frac{2x}{1-t^2} = 0\,, \qquad x(0) = 1 \quad \text{a} \quad x(2) = 3\,.$$

11. Řešení nehomogenní diferenciální rovnice prvního řádu, metoda variace konstanty.

12. Příklad $x' + \dfrac{2x}{t} = t + \dfrac{1}{t^3}$, $x(1) = 4$.

13. Lineární diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty.

14. Odhad řešení nehomogenní diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty.

15. Příklad $x' + 2x = \mathrm{e}^{3t}(t+2) + 3\mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{t}\cos 2t + t\mathrm{e}^{t}\sin 2t$.

Diferenciální rovnice je obecně rovnice, která obsahuje derivace neznámé funkce. Jestliže označím nezávisle proměnnou t, funkci $x = x(t)$ a její derivaci $x'(t)$, je příklad diferenciální rovnice $x' = f(t,x)$, kde $f(t,x)$ je funkce dvou proměnných definována na jisté oblasti v $\mathbb{R}^2$. Složitější rovnice je například $F(t,x,x') = 0$, kde je $F(t,x,y)$ funkce definovaná v jisté oblasti v $\mathbb{R}^3$. První z těchto rovnic se obvykle nazývá diferenciální rovnice *vyřešená vzhledem derivaci* a druhá diferenciální rovnice *nevyřešená vzhledem derivaci*. Protože tyto rovnice obsahují pouze první derivaci neznámé funkce, nazývají se diferenciální rovnice *prvního řádu*.

Obecnější diferenciální rovnice obsahují vyšší derivace neznámé funkce $x(t)$. Například diferenciální rovnice $x'' = f(t,x,x')$ se nazývá diferenciální rovnice *druhého řádu* vyřešená vzhledem k derivaci a diferenciální rovnice $F(t,x,x',x'',x''')=0$ je diferenciální rovnice třetího řádu nevyřešená vzhledem k derivaci.

Uvedené diferenciální rovnice obsahují derivace funkce jedné proměnné a souhrnně se nazývají *obyčejné diferenciální rovnice.* Diferenciální rovnice pro funkci více proměnných, například diferenciální rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\,,$$

se nazývá *parciální diferenciální rovnice.* Těmito rovnicemi se v přednášce zabývat nebudeme a diferenciální rovnice bude dále znamenat obyčejnou diferenciální rovnici.

Nejjednodušší diferenciální rovnice je diferenciální rovnice $x'=f(t)$, kde $f(t)$ je daná funkce na intervalu $\mathcal{I}$. Jak je známo, za jistých předpokladů o funkci $f(t)$, například je-li $f(t)$ spojitá na intervalu $\mathcal{I}$, má tato rovnice celou množinu řešení, které se zapisují jako

$$x(t)=\int f(t)\,\mathrm{d}t+c\,,$$

kde c je libovolné konstanta. Celá tato množina řešení se nazývá *obecné řešení* diferenciální rovnice.

Mnohdy není naším úkolem najít obecné řešení dané diferenciální rovnice, ale pouze řešení, které má určitou vlastnost. Jestliže například interpretujeme funkci $x(t)$ jako vzdálenost bodu od počátku, je $x'(t)$ jeho rychlost a diferenciální rovnice $x'=t$ popisuje polohu bodu při rovnoměrně zrychleném pohybu (přitom je rychlost v čase $t=0$ rovna nule). Obecné řešení dané diferenciální rovnice, $x(t)=\frac{1}{2}\,t^2+c$, udává vzdálenost bodu obecně. Ale pokud nás například zajímá vzdálenost bodu od počátku za předpokladu, že v čase $t=2$ byla tato vzdálenost rovna 4, musíme zvolit určitou hodnotu konstanty c, v našem případě $c=2$, tj. musíme z celé množiny obecných řešení zvolit jedno řešení. Jedno konkrétní řešení se nazývá *partikulární řešení.* Podmínka $x(2)=4$ se nazývá *počáteční podmínka* a úloha najít funkci $x=x(t)$, pro kterou platí $x'=t$ a $x(2)=4$, se nazývá *Cauchyova úloha.*

Diferenciální rovnice prvního řádu

V této přednášce se budeme zabývat diferenciální rovnicí prvního řádu vyřešenou vzhledem k derivaci, tj. diferenciální rovnicí

$$x'=f(t,x)\,, \tag{1}$$

kde $f(t,x)$ je funkce definovaná v jisté oblasti $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^2$.

Definice: *Řešením diferenciální rovnice* (1) na intervalu $\mathcal{I}\subset\mathbb{R}$ budeme nazývat každou funkci $x=\varphi(t)$, pro kterou platí $\varphi'(t)=f\big(t,\varphi(t)\big)$ pro každé $t\in\mathcal{I}$.

Definice: *Obecným řešením diferenciální rovnice* (1) na intervalu $\mathcal{I}$ rozumíme množinu všech řešení této diferenciální rovnice na intervalu $\mathcal{I}$.
Partikulárním řešením se rozumí prvek z množiny obecných řešení, tj. jedno řešení.

Definice: *Počáteční podmínka* pro diferenciální rovnici (1) je podmínka $x(t_0)=x_0$, kde bod $[t_0,x_0]\in\mathcal{O}$.

Definice: Úloha najít řešení diferenciální rovnice (1), které splňuje danou počáteční podmínku, se nazývá *Cauchyova úloha* pro diferenciální rovnici (1).

Diferenciální rovnice (1) a její řešení lze interpretovat také geometricky. V rovině (tx) je grafem funkce $x = x(t)$ jistá křivka $\mathcal{C}$. Derivace funkce $x'(t)$ v bodě $\bigl[t, x(t)\bigr]$ udává směrnici tečny ke křivce $\mathcal{C}$ v tomto bodě neboli vektor směru tečny $\mathbf{t} = \bigl(1, x'(t)\bigr)$. Při této interpretaci je rovnicí (1) zadán v každém bodě $[t, x] \in \mathcal{O}$ vektor $\mathbf{t} = \bigl(1, f(t, x)\bigr)$.

Řešení diferenciální rovnice (1) je pak křivka, $x = \varphi(t)$, která má v každém svém bodě daný směr tečny $\mathbf{t} = \bigl(1, f(t, x)\bigr)$. Takové křivky se nazývají *integrální křivky* vektorového pole $\mathbf{t}(t, x)$.

Obecné řešení je systém všech integrálních křivek. Počáteční podmínka $x(t_0) = x_0$ zadává bod $[t_0, x_0]$, kterým integrální křivka prochází a Cauchyovu úlohu můžeme formulovat tak, že máme v rovině (tx) najít křivku, která prochází daným bodem $[t_0, x_0]$ a v každém svém bodě se dotýká daného vektorového pole $\mathbf{t}$.

Najít řešení diferenciální rovnice není snadná úloha. V přednášce se budeme zabývat pouze dvěma typy diferenciálních rovnic prvního řádu, jejichž řešení lze vyjádřit pomocí integrálů. Jsou to rovnice se separovanými proměnnými a lineární diferenciální rovnice.

Rovnice se separovanými proměnnými

Rovnice se separovanými proměnnými jsou diferenciální rovnice tvaru

$$x' = f(t) \cdot g(x)\,, \tag{2}$$

kde je pravá strana součin funkce proměnné t a funkce proměnné x.

Jestliže vynásobíme rovnici (2) funkcí $\mu(x) = \dfrac{1}{g(x)}$, dostaneme

$$\frac{1}{g(x)}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t)\,,$$

což lze formálně zapsat jako

$$\frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = f(t)\,\mathrm{d}t \implies \int \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = \int f(t)\,\mathrm{d}t + c\,, \tag{3}$$

kde c je konstanta. Vztah (3) pak definuje řešení diferenciální rovnice (2) v implicitním tvaru.

Tato metoda může selhat v bodech x_0, kde $g(x_0) = 0$. Je ale zřejmé, že v tomto případě existuje konstantní řešení diferenciální rovnice (2), tj. řešení $x(t) = x_0$. Lze ukázat, že pokud je derivace $g'(x)$ v okolí bodu x_0 omezená funkce, je konstantní řešení jediné řešení, pro které platí $x(t_0) = x_0$. Ale pokud je funkce $g'(x)$ v okolí bodu x_0 neomezená, může v okolí tohoto bodu existovat mimo konstantní řešení ještě řešení dané vztahem (3).

Příklad: Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x' = \frac{1 - t^2}{tx}\,, \quad x(1) = 2\,.$$

Řešení: Jedná se o diferenciální rovnici se separovanými proměnnými, kde $f(t) = \dfrac{1-t^2}{t}$ a $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Funkce $f(t)$ i $g(x)$ jsou spojité na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Protože počáteční podmínka je bod z intervalu $(0,\infty) \times (0,\infty)$, budeme hledat řešení $x = x(t)$, jehož definiční obor je podmnožina intervalu $(0,\infty)$, tj. $t > 0$, a obor hodnot je také podmnožina intervalu $(0,\infty)$, tj. $x = x(t) > 0$. Protože $g(x) \neq 0$, nemá diferenciální rovnice konstantní řešení.

Standardním postupem dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1-t^2}{tx} \;\Rightarrow\; x\,\mathrm{d}x = \frac{1-t^2}{t}\,\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; \int x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-t^2}{t}\,\mathrm{d}t + c \;\Rightarrow\; \tfrac{1}{2}x^2 = \ln t - \tfrac{1}{2}t^2 + c\,,$$

kde c je konstanta. Tu určíme z počáteční podmínky $x(1) = 2$, tj. pro $t = 1$ je $x = 2$. Z ní plyne

$$2 = -\tfrac{1}{2} + c\,, \quad \text{tj.} \quad c = \tfrac{5}{2}$$

a po dosazení do obecného řešení dostaneme

$$x^2 = 2\ln t - t^2 + 5\,.$$

A protože $x(t) > 0$, musí být

$$x(t) = \sqrt{5 + 2\ln t - t^2}\,.$$

Definiční obor tohoto řešení je množina $t > 0$ a $5 + 2\ln t \geq t^2$.

Příklad: Najděte řešení diferenciální rovnice

$$x' = \frac{2\sin x}{t(t-2)}\,. \tag{4}$$

Řešení: Jedná se o diferenciální rovnici se separovanými proměnnými, kde $f(t) = \dfrac{2}{t(t-2)}$ a $g(x) = \sin x$.

Funkce $f(t)$ je spojitá na intervalech $\mathcal{I}_1 = (-\infty, 0)$, $\mathcal{I}_2 = (0, 2)$ a $\mathcal{I}_3 = (2, +\infty)$. Proto bude mít řešení definiční obor, který je podmnožinou jednoho z těchto intervalů.

Funkce $g(x) = \sin x$ je spojitá v $\mathbb{R}$ a je rovna nule v bodech $x_k = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Proto má rovnice (4) konstantní řešení $x_k(t) = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Protože $g'(x) = \cos x$ je omezená, jsou tato řešení jediná řešení, pro která je $x(t_0) = k\pi$.

Další řešení dostaneme standardním způsobem:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2\sin x}{t(t-2)} \;\Rightarrow\; \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t(t-2)} \;\Rightarrow\; \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| = \int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \ln\left|\frac{t-2}{t}\right| + \widehat{c}\,,$$

kde c je libovolná konstanta. Z této rovnice plyne

$$\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| = c\left|\frac{t-2}{t}\right|.$$

Protože $x(t) \in \big(k\pi, (k+1)\pi\big)$ nemění funkce $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ znaménko a můžeme vynechat absolutní hodnotu. Protože je definiční obor řešení podmnožina jednoho z intervalů $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ nebo $\mathcal{I}_3$, nemění znaménko ani funkce $\dfrac{t-2}{t}$ a můžeme absolutní hodnotu vynechat i na pravé straně. Pro řešení tedy platí

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{c(t-2)}{t} \implies \tfrac{1}{2}\,x = \operatorname{arctg}\Bigl(\frac{c(t-2)}{t}\Bigr) + k\pi \implies x(t) = 2\operatorname{arctg}\Bigl(\frac{c(t-2)}{t}\Bigr) + 2k\pi\,,$$

kde $k \in \mathbb{Z}$ a $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

Příklad: Najděte všechna maximální řešení[1] Cauchyovy úlohy

$$x' = 3x^{2/3}\,, \quad x(0) = 0\,. \tag{5}$$

Řešení: Jedná se o diferenciální rovnici se separovanými proměnnými, kde $f(t) = 1$ a $g(x) = 3x^{2/3}$. Tyto funkce jsou spojité na celém $\mathbb{R}$ a z rovnice $g(x) = 0$ plyne $x = 0$. Jedno řešení dané rovnice tedy je $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, a protože toto řešení vyhovuje počáteční podmínce, je řešení Cauchyovy úlohy (5).

Ale protože funkce $g'(x) = 2x^{-1/3}$ není omezená v okolí bodu $x = 0$, může existovat v okolí bodu $(0,0)$ víc řešení. Ta dostaneme standardním způsobem:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3x^{2/3} \implies \tfrac{1}{3}\int x^{-2/3}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}t + c \implies x^{1/3} = t + c \implies x = (t+c)^3\,,$$

kde c je libovolná konstanta. Z počáteční podmínky plyne $c = 0$, a tedy v okolí bodu $(0,0)$ je řešení také funkce $x(t) = t^3$, $t \in \mathbb{R}$.

Situace ale není tak jednoduchá. Jestliže uvažujeme řešení $x(t) = 0$ pro $t \in \langle t_-, t_+\rangle$, kde $t_- \le 0 \le t_+$, dostaneme se do bodů $(t_-, 0)$ a $(t_+, 0)$. Jestliže chceme tato řešení prodloužit, tj. zvětšit jeho definiční obor, musíme například v okolí bodu $(t_+, 0)$ řešit Cauchyovu úlohu

$$x' = 3x^{2/3}\,, \quad x(t_+) = 0\,. \tag{6}$$

Stejně jako dříve dostaneme dvě řešení $x(t) = 0$ pro $t > t_+$ a $x(t) = (t - t_+)^3$. Proto je pro každé $t_+ \ge 0$ řešením také funkce $x(t) = 0$ pro $t \in \langle t_-, t_+\rangle$ a $x(t) = (t - t_+)^3$ pro $t \ge t_+$. Podobně můžeme prodlužovat nulové řešení pro $t \le t_0 \le 0$. Když tyto úvahy shrneme, zjistíme, že všechna maximální řešení Cauchyovy úlohy (5) jsou

$$x_{(t_-,t_+)}(t) = \begin{cases} (t-t_-)^3 & \text{pro } \ t \le t_- \le 0\,, \\ \quad 0 & \text{pro } \ t_- \le t \le t_+\,, \\ (t-t_+)^3 & \text{pro } \ t \ge t_+ \ge 0\,. \end{cases}$$

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu je diferenciální rovnice tvaru

$$x' = f(t)x + g(t)\,, \tag{7}$$

kde funkce $f(t)$ a $g(t)$ jsou definovány na intervalu $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$.

Pro lineární diferenciální rovnice prvního řádu platí následující věta:

[1] Maximální řešení diferenciální rovnice jsou zhruba řečeno taková její řešení $x(t)$, pro která nelze zvětšit jejich definiční obor.

Věta: Jsou-li funkce $f(t)$ a $g(t)$ spojité na intervalu $\mathcal{I}$, pak pro každou počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$, kde $t_0 \in \mathcal{I}$ a $x_0 \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno maximální řešení diferenciální rovnice (7) a toto řešení je definováno na celém intervalu $\mathcal{I}$.

Při řešení lineárních diferenciálních rovnic se používají věty, které zjednodušují hledání jejich řešení.

Diferenciální rovnice (7), ve které je funkce $g(t) \neq 0$ se nazývá *nehomogenní diferenciální rovnice*a diferenciální rovnice

$$x' = f(t)x\,, \tag{8}$$

se nazývá *homogenní diferenciální rovnice* příslušná k diferenciální rovnici (7).

Věta. Obecné řešení $x(t)$ nehomogenní rovnice (7) lze vyjádřit ve tvaru

$$x(t) = x_H(t) + x_N(t)\,,$$

kde $x_N(t)$ je jedno řešení nehomogenní diferenciální rovnice (7) a $x_H(t)$ je obecné řešení příslušné homogenní diferenciální rovnice (8).

Věta. Množina všech řešení homogenní diferenciální rovnice prvního řádu (8) tvoří vektorový prostor $\mathcal{V}_H$ dimenze 1.

Z této věty plyne, že pro nalezení obecného řešení homogenní diferenciální rovnice (8) stačí najít její jedno nenulové řešení $x_1(t)$. Obecné řešení $x(t)$ homogenní diferenciální rovnice prvního řádu (8) je pak

$$x(t) = cx_1(t)\,,$$

kde c je libovolná konstanta.

Pro lineární rovnice platí tzv. *princip superpozice*:

Věta: Jsou-li x_1 a x_2 řešením lineárních rovnic $x_1' = f(t)\,x_1 + g_1(t)$ a $x_x' = f(t)x_2 + g_2(t)$, je $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ řešení lineární rovnice $x' = f(t)\,x + \alpha_1 g_1(t) + \alpha_2 g_2(t)$.

Řešení homogenní rovnice

Protože je homogenní diferenciální rovnice prvního řádu

$$x' = f(t)\,x$$

diferenciální rovnice se separovanými proměnnými, můžeme ji řešit standardní metodou, tj.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t)\,x \implies \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int f(t)\,\mathrm{d}t + c \implies \ln|x| = \int f(t)\,\mathrm{d}t + c\,.$$

Protože nás zajímá pouze jedno řešení, můžeme vzít například řešení

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\int f(t)\,\mathrm{d}t}\,.$$

Obecné řešení homogenní rovnice pak je

$$x(t) = cx_1(t) = c\,\mathrm{e}^{\int f(t)\,\mathrm{d}t},$$

kde c je libovolná konstanta.

Příklad. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $x' + 2tx = 0$.

Řešení: Protože se jedná o homogenní diferenciální rovnici prvního řádu, stačí najít její jedno nenulové řešení. Standardním způsobem dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2tx \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = -2\int t\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \ln|x| = -t^2\,.$$

Tedy jedno nenulové řešení dané diferenciální rovnice je $x_1(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$, a proto je obecné řešení této rovnice

$$x(t) = c\,\mathrm{e}^{-t^2}\,,$$

kde c je libovolná konstanta.

Příklad. Najděte řešení diferenciální rovnice

$$x' + \frac{2x}{1-t^2} = 0\,, \tag{9}$$

které splňuje počáteční podmínku: a) $x(0) = 1$; b) $x(2) = 3$.

Řešení: Nejprve najdeme obecné řešení diferenciální rovnice (9). Protože se jedná o homogenní diferenciální rovnici prvního řádu, stačí najít její jedno nenulové řešení. Standardním způsobem dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t^2-1} \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1} = \int \Big(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\Big)\,\mathrm{d}t = \ln\frac{t-1}{t+1}\,.$$

Tedy jedno nenulové řešení diferenciální rovnice (9) je

$$x_1(t) = \frac{t-1}{t+1}\,,$$

a proto je její obecné řešení

$$x(t) = cx_1(t) = c\,\frac{t-1}{t+1}\,,$$

kde c je libovolná konstantu. Tu musíme najít tak, aby byly splněny počáteční podmínky. V případě a) máme počáteční podmínku $x(0) = 1$. Proto musí být $x(0) = 1 = -c$. Jak je vidět z daná diferenciální rovnice (9), musíme vyloučit body $t = \pm 1$. Řešení proto hledáme na jednom z intervalu $\mathcal{I}_- = (-\infty, -1)$, $\mathcal{I}_0 = (-1, 1)$ nebo $\mathcal{I}_+ = (1, +\infty)$. A protože je počáteční podmínka zadána v bodě $t_0 = 0 \in \mathcal{I}_0$, je řešení funkce

$$x(t) = \frac{1-t}{1+t}\,, \qquad t \in (-1, 1)\,.$$

V případě b) je počáteční podmínka $x(2) = 3$. Po dosazení do obecného řešení dostaneme $3 = \frac{1}{3}\,c$, tj. $c = 9$ a řešení dané Cauchyovy úlohy je

$$x(t) = \frac{9(t-1)}{t+1}\,, \qquad t \in (1, +\infty)\,,$$

protože počáteční podmínka je zadána v bodě $t_0 = 2 \in \mathcal{I}_+$.

Řešení nehomogenní rovnice

Jestliže známe jedno nenulové řešení homogenní diferenciální rovnice prvního řádu (8), která přísluší nehomogenní diferenciální rovnice (7), stačí pro nalezení obecného řešení nehomogenní diferenciální rovnice najít jedno její řešení.

Dále uvedený postup, kterým vždy můžeme takové řešení vyjádřit pomocí integrálu, se nazývá *variace konstanty.*

Již víme, že když je $x_1(t)$ nenulové řešení homogenní diferenciální rovnice (8), tj. platí $x_1'(t) = f(t)\, x_1(t)$, je její obecné řešení $x_H(t)$ rovno

$$x_H(t) = c\, x_1(t)\,,$$

kde c je libovolná konstanta. Metoda variace konstanty je založena na tom, že jedno řešení $x_N(t)$ nehomogenní rovnice (7) budeme hledat ve tvaru

$$x_N(t) = C(t)\, x_1(t)\,, \tag{10}$$

kde $C(t)$ je neznámá funkce proměnné t. Protože $x_N' = C'x_1 + Cx_1'$, dostaneme po dosazení pro neznámou funkci $C(t)$ vztah

$$C'x_1 + Cx_1' = f(t)\, Cx_1 + g(t)\,.$$

Ale protože jsme zvolili funkci $x_1(t)$ tak, aby $x_1'(t) = f(t)\, x_1(t)$, musí pro funkci $C(t)$ platit vztah

$$C'x_1 = g(t) \implies C'(t) = \frac{g(t)}{x_1(t)} \implies C(t) = \int \frac{g(t)}{x_1(t)}\, \mathrm{d}t\,.$$

Protože nás zajímá pouze jedno řešení nehomogenní diferenciální rovnice, lze v posledním integrálu volit integrační konstantu rovnou nule (ale můžete za ní zvolit jakékoliv číslo). Když dosadíme tuto funkci $C(t)$ do (10), získáme řešení nehomogenní rovnice.

Příklad. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x' + \frac{2x}{t} = t + \frac{1}{t^3}\,, \qquad x(1) = 4\,. \tag{11}$$

Řešení: Nejprve nalezneme obecné řešení diferenciální rovnice (11). Protože se jedná o lineární nehomogenní rovnici, najdeme nejprve obecné řešení $x_H(t)$ příslušné homogenní rovnice

$$x' + \frac{2x}{t} = 0\,.$$

Standardním postupem dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{2x}{t} \implies \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = -2\int \frac{\mathrm{d}t}{t} \implies \ln x = -2\ln t \implies x_1 = \frac{1}{t^2} \implies x_H(t) = \frac{c}{t^2}\,,$$

kde c je libovolná konstanta.

Řešení $x_N(t)$ nehomogenní rovnice budeme hledat metodu variace konstanty, tj. ve tvaru

$$x_N(t) = \frac{C(t)}{t^2}\,,$$

kde $C(t)$ je neznámá funkce proměnné t. Protože

$$x'_N = \frac{C't^2 - 2C\,t}{t^4} = \frac{C'}{t^2} - \frac{2C}{t^3}\,,$$

dostaneme po dosazení do diferenciální rovnice (11)

$$\frac{C'}{t^2} - \frac{2C}{t^3} + \frac{2C}{t^3} = t + \frac{1}{t^3}\,,\quad \text{tj.}\quad C' = t^3 + \frac{1}{t} \implies C(t) = \frac{t^4}{4} + \ln t\,.$$

Proto je jedno řešení nehomogenní rovnice

$$x_N(t) = \frac{C(t)}{t^2} = \frac{t^2}{4} + \frac{\ln t}{t^2}$$

a obecné řešení diferenciální rovnice (11)

$$x(t) = x_H(t) + x_N(t) = \frac{c}{t^2} + \frac{t^2}{4} + \frac{\ln t}{t^2}\,,$$

kde c je libovolná konstanta. Tu ještě musíme zvolit tak, aby byla splněna počáteční podmínka $x(1) = 4$. Ta dává

$$4 = c + \tfrac{1}{4} \implies c = \tfrac{15}{4}\,.$$

Tedy řešení Cauchyovy úlohy (11) je

$$x(t) = \frac{15}{4t^2} + \frac{t^2}{4} + \frac{\ln t}{t^2}\,,\qquad t \in (0, +\infty)\,.$$

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty

Abychom našli řešení nehomogenní diferenciální rovnice prvního řádu (7), stačí najít dva integrály

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \ln x_1(t) \quad \text{a} \quad \int \frac{g(t)}{x_1(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

V praxi se často setkáváme se speciálním případem této rovnice, ve kterém je funkce $f(t)$ konstantní, tj. diferenciální rovnice

$$x' + ax = g(t)\,, \tag{12}$$

kde a je reálné číslo. Touto rovnicí se například řídí proud v elektrickém obvodu, který se skládá z odporu, kondenzátoru a zdroje napětí, kde $a = \dfrac{1}{RC}$, nebo počet částic v radioaktivním rozpadu, kde je a tzv. rozpadová konstanta.

Protože analogickou metodu řešení budeme používat později pro řešení lineárních diferenciálních rovnic vyššího řádu s konstantními koeficienty, popíšeme ji zde podrobně pro rovnici prvního řádu.

Řešení homogenní rovnice příslušné k rovnici (12), tj. rovnice

$$x' + ax = 0\,, \tag{13}$$

lze hledat ve tvaru $x_H(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, kde λ je zatím neznámá, obecně komplexní, konstanta. Protože $x'_H(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}$, dostaneme po dosazení do (13) pro neznámou λ tzv. charakteristickou rovnici

$$(\lambda + a)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \implies \lambda + a = 0\,.$$

Její řešení je $\lambda = -a$, a tedy jedno nenulové řešení homogenní rovnice (13) je $x_1(t) = \mathrm{e}^{-at}$. Pomocí tohoto řešení sestrojíme obecné řešení homogenní rovnice (13)

$$x_H(t) = c\mathrm{e}^{-at}\,,$$

kde c je libovolná konstanta.

`Poznámka.` Uvedenou metodu lze použít také v případě, že a je komplexní číslo, tj. $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$. Obecné řešení diferenciální rovnice (13) lze v tomto případě psát jako

$$x(t) = c\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{i}\beta)t} = c\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta t}\,.$$

Speciálně řešení, pro které je $x(0) = 1$ je

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta t}\,.$$

Snadno se lze přesvědčit, že také funkce

$$\widehat{x}(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\beta t - \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t$$

je řešením této diferenciální rovnice se stejnou počáteční podmínkou. Tedy pro reálná α a β musí platit

$$\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t} = \mathrm{e}^{\alpha t}\big(\cos\beta t + \mathrm{i}\sin\beta t\big)\,.$$

Speciálně musí pro každé $t \in \mathbb{R}$ platit *Eulerův vztah*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t\,.$$

Tento vztah a vztahy

$$\cos t = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\big) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}\,, \qquad \sin t = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\big) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\,,$$

které z něho plynou, budeme při řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty často používat.

Řešení nehomogenní rovnice (12) můžeme hledat, jako vždy, metodou variace konstanty, tj. ve tvaru

$$x(t) = C(t)\mathrm{e}^{-at}\,.$$

Po dosazení do rovnice (12) dostaneme pro funkci $C(t)$ rovnice

$$C' = \mathrm{e}^{at}g(t) \implies C(t) = \int \mathrm{e}^{at}g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Z přednášky o integrálním počtu umíme tento integrál počítat v případě, když je funkce $\mathrm{e}^{at}g(t) = \mathrm{e}^{\mu t}P_n(t)$, kde $P_n(t)$ je polynom stupně n a μ je komplexní konstanta. Výpočet tohoto integrálu se liší v případě $\mu = 0$ a $\mu \neq 0$.

1. Je-li $\mu = 0$, jedná se o integrál

$$\int \sum_{k=0}^{n} c_k t^k \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1}\, t^{k+1} = t\, Q_n(t)\,,$$

   kde $Q_n(t)$ je polynom stupně n. V tomto případě je na pravé straně diferenciální rovnice (12) funkce $g(t) = \mathrm{e}^{-at} P_n(t)$ a řešení nehomogenní rovnice můžeme hledat ve tvaru $x_N(t) = \mathrm{e}^{-at} Q_n(t) \cdot t$.

2. Je-li $\mu \neq 0$ lze uvedený integrál najít integrací per partes, ze které plyne

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{\mu t} P_n(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{e}^{\mu t}}{\mu}\, P_n(t) - \frac{1}{\mu}\int \mathrm{e}^{\mu t} P_n'(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mu t}}{\mu}\, P_n(t) - \frac{\mathrm{e}^{\mu t}}{\mu^2}\, P_n'(t) + \frac{1}{\mu^2}\int \mathrm{e}^{\mu t} P_n''(t)\,\mathrm{d}t = \ldots = \\ &= \mathrm{e}^{\mu t} Q_n(t)\,,\end{aligned}$$

   kde $Q_n(t)$ je polynom stupně n. V tomto případě je na pravé straně rovnice (12) funkce $g(t) = \mathrm{e}^{(\mu - a)t} P_n(t)$ a tvar řešení nehomogenní rovnice je $x_N(t) = \mathrm{e}^{(\mu - a)t} Q_n(t)$.

Z předchozích úvah plyne následující tvrzení:

1. Řešení nehomogenní rovnice $x' + ax = \mathrm{e}^{-at} P_n(t)$, kde $P_n(t)$ je polynom stupně n, lze najít ve tvaru $x_n(t) = \mathrm{e}^{-at} Q_n(t) \cdot t$, kde $Q_n(t)$ je polynom stupně n;
2. Řešení nehomogenní rovnice $x' + ax = \mathrm{e}^{bt} P_n(t)$, kde $b \neq -a$ a $P_n(t)$ je polynom stupně n, lze najít ve tvaru $x_n(t) = \mathrm{e}^{bt} Q_n(t)$, kde $Q_n(t)$ je polynom stupně n.

Nás bude hlavně zajímat případ, kdy je a reálné číslo a funkce $g(t)$ v rovnici (12) je reálná. Kromě předchozích případů patří do skupiny rovnic, u kterých lze odhadnout řešení, také rovnice s pravou stranou $g(t) = \mathrm{e}^{\rho t} P_n(t) \cos \omega t$ a $g(t) = \mathrm{e}^{\rho t} P_n(t) \sin \omega t$. V takovém případě stačí uvažovat v komplexním oboru diferenciální rovnici

$$z' + az = \mathrm{e}^{(\rho + \mathrm{i}\omega)t} P_n(t)\,.$$

Protože $\omega \neq 0$, je $\rho + \mathrm{i}\omega \neq -a$, má podle 2. tato rovnice řešení $z_N(t) = \mathrm{e}^{(\rho+\mathrm{i}\omega)t} Q_n(t)$, kde $Q_n(t)$ je komplexní polynom stupně n. Protože platí

$$\mathrm{e}^{\rho t} P_n(t) \cos \omega t = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{(\rho+\mathrm{i}\omega)t} P_n(t)\big) \quad \text{a} \quad \mathrm{e}^{\rho t} P_n(t) \sin \omega t = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{(\rho+\mathrm{i}\omega)t} P_n(t)\big)\,,$$

existuje řešení nehomogenní rovnice s pravou stranou

$$g(t) = \mathrm{e}^{\rho t} P_n(t) \cos \omega t\,, \quad \text{resp.} \quad g(t) = \mathrm{e}^{\rho t} P_n(t) \sin \omega t\,,$$

které je rovno

$$x_N(t) = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{(\rho+\mathrm{i}\omega)t} Q_n(t)\big)\,, \quad \text{resp.} \quad x_N(t) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{(\rho+\mathrm{i}\omega)t} Q_n(t)\big)\,.$$

Obě tato řešení lze zapsat souhrnně ve tvaru

$$x_N(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\big(R_n(t) \cos \omega t + S_n(t) \sin \omega t\big)\,,$$

kde $R_n(t)$ a $S_n(t)$ jsou reálné polynomy stupně n.

Příklad. Najděte partikulární řešení rovnice

$$x' + 2x = \mathrm{e}^{3t}(t+2) + 3\mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{t}\cos 2t + t\mathrm{e}^{t}\sin 2t\,. \tag{14}$$

Řešení: Řešení příslušné homogenní rovnice $x' + 2x = 0$ budeme hledat ve tvaru $x = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Po dosazení dostaneme charakteristickou rovnici $\lambda + 2 = 0$. Tedy jedno nenulové řešení homogenní rovnice je e^{-2t} a pro její obecné řešení dostaneme $x_H(t) = c\mathrm{e}^{-2t}$, kde c je libovolná konstanta.

Pravá strana nehomogenní rovnice (14) se skládá ze čtyř členů:

$$f_1(t) = \mathrm{e}^{3t}(t+2)\,, \qquad f_2(t) = 3\mathrm{e}^{-2t}\,, \qquad f_3(t) = 2\mathrm{e}^{t}\cos 2t \quad \text{a} \quad f_4(t) = t\mathrm{e}^{t}\sin 2t\,.$$

Jestliže použijeme princip superpozice, můžeme řešení zapsat x_N jako součet čtyř řešení x_1, x_2, x_3 a x_4 nehomogenních rovnic

$$x_k' + 2x_k = f_k(t)\,, \quad k = 1,\,2,\,3,\,4\,. \tag{15}$$

Protože e^{3t} není řešení homogenní rovnice a $t+2$ je polynom stupně jedna, budeme v prvním případě řešení hledat ve tvaru $x_1 = \mathrm{e}^{3t}(at+b)$, kde a a b jsou konstanty. Po dosazení do (15) a vydělení společným faktorem e^{3t} pro ně dostaneme rovnici

$$3(at+b) + a + 2(at+b) = t+2 \iff 5at + 5b + a = t + 2 \iff 5a = 1\,, \quad 5b + a = 2\,,$$

tj. $a = \frac{1}{5}$ a $b = \frac{9}{25}$. Tedy řešení první části je

$$x_1(t) = \frac{5t+9}{25}\,\mathrm{e}^{3t}\,.$$

Ve druhé části je exponenta e^{-2t}, která je řešením homogenní rovnice. Protože 3 je polynom stupně nula, budeme řešení pro tuto část hledat jako $x_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}a\cdot t$, kde a je konstanta. Po dosazení do (15) a vydělení společným faktorem e^{-2t} pro ni dostaneme rovnici

$$-2at + a + 2at = 3 \iff a = 3\,.$$

Tedy řešení druhé části je

$$x_2(t) = 3t\mathrm{e}^{-2t}\,.$$

Třetí část obsahuje funkci $\mathrm{e}^{t}\cos 2t$. Proto může řešení obsahovat jak funkci $\mathrm{e}^{t}\cos 2t$, tak funkci $\mathrm{e}^{t}\sin 2t$. Protože 2 je polynom stupně nula, bude

$$x_3 = \mathrm{e}^{t}\big(A\cos 2t + B\sin 2t\big)\,,$$

kde A a B jsou konstanty. Podobně pro čtvrtou část dostaneme odhad

$$x_4 = \mathrm{e}^{t}\big((at+b)\cos 2t + (ct+d)\sin 2t\big)\,.$$

je vidět, že třetí a čtvrtý člen lze spojit dohromady. Jestliže označíme

$$\widehat{f}(t) = f_3(t) + f_4(t) = \mathrm{e}^{t}\big(2\cos 2t + t\sin 2t\big)\,,$$

lze řešení rovnice $x' + 2x = \widehat{f}(t)$ hledat ve tvaru

$$\widehat{x} = \mathrm{e}^t\big((at+b)\cos 2t + (ct+d)\sin 2t\big)\,.$$

Po dosazení do rovnice a vydělení e^t, dostaneme

$$\begin{aligned}(at+b)\cos 2t + a\cos 2t - 2(at+b)\sin 2t + \\ +(ct+d)\sin 2t + c\sin 2t + 2(ct+d)\cos 2t + \\ +2(at+b)\cos 2t + 2(ct+d)\sin 2t = \\ = \big((3a+2c)t + a + 3b + 2d\big)\cos 2t + \big((-2a+3c)t + c - 2b + 3d\big)\sin 2t = \\ = 2\cos 2t + t\sin 2t\,.\end{aligned}$$

Abychom splnili tento vztah pro každé $t \in \mathbb{R}$, musíme položit

$$\begin{aligned} 3a + 2c &= 0\,, & a + 3b + 2d &= 2\,,\\ -2a + 3c &= 1\,, & c - 2b + 3d &= 0\,.\end{aligned}$$

Protože její řešení je $a = -\frac{2}{13}$, $c = \frac{3}{13}$, $b = \frac{90}{169}$, $d = \frac{47}{169}$, je

$$\widehat{x} = \frac{\mathrm{e}^t}{169}\big((90-26t)\cos 2t + (47+39t)\sin 2t\big)\,.$$

Tedy partikulární řešení rovnice (14) je

$$x(t) = \frac{5t+9}{25}\,\mathrm{e}^{3t} + 3t\mathrm{e}^{-2t} + \frac{\mathrm{e}^t}{169}\big((90-26t)\cos 2t + (47+39t)\sin 2t\big)\,.$$

`Poznámka.` Pro řešení diferenciální rovnice $x' + 2x = \widehat{f}(t)$ jsme také mohli použit komplexních čísel. Protože $\cos 2t = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}\big)$ a $\sin 2t = \mathrm{Re}\big(-\mathrm{i}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}\big)$, můžeme funkci $\widehat{f}(t)$ zapsat jako

$$\widehat{f}(t) = \mathrm{e}^t\big(2\cos 2t + t\sin 2t\big) = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t}(2 - \mathrm{i}t)\big)\,.$$

Když vyřešíme diferenciální rovnici

$$z' + 2z = \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t}(2 - \mathrm{i}t)$$

v komplexním oboru, je $\widehat{x}_N(t) = \mathrm{Re}\big(z(t)\big)$.

Řešení nehomogenní rovnice pro z lze najít ve tvaru

$$z = \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t}(at+b)\,,$$

kde a a b jsou komplexní čísla. Po dosazení a vydělení faktorem $\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t}$ dostaneme

$$(1+2\mathrm{i})(at+b) + a + 2(at+b) = (3+2\mathrm{i})at + a + (3+2\mathrm{i})b = 2 - \mathrm{i}t\,.$$

Aby platil tento vztah pro každé $t \in \mathbb{R}$, musí být

$$(3+2\mathrm{i})a = -\mathrm{i}\,, \qquad a + (3+2\mathrm{i})b = 2\,.$$

Tato soustava má řešení

$$a = \frac{-\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}} = \frac{-2-3\mathrm{i}}{13}\,, \qquad b = \frac{28+3\mathrm{i}}{13(3+2\mathrm{i})} = \frac{90-47\mathrm{i}}{169}\,.$$

Komplexní řešení tedy je

$$z(t) = \frac{1}{169}\,\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t}\big(90-47\mathrm{i}-13(2+3\mathrm{i})t\big) = \frac{\mathrm{e}^t}{169}\,\big(\cos 2t + \mathrm{i}\sin 2t\big)\big(90-47\mathrm{i}-(26+39\mathrm{i})t\big)$$

a pro řešení původní rovnice dostaneme

$$\widehat{x}(t) = \mathrm{Re}\big(z(t)\big) = \frac{\mathrm{e}^t}{169}\,\big((90-26t)\cos 2t + (47+39t)\sin 2t\big)$$

jako dříve.