Přednáška 11

Lineární diferenciální rovnice n–tého řádu

Osnova přednášky

1. Diferenciální rovnice n–tého řádu; příklad: $mx'' = F(t, x, x')$.

2. Partikulární a obecné řešení, počáteční podmínky a Cauchyova úloha.

3. Lineární diferenciální rovnice n–tého řádu.

4. Obecná metoda řešení lineární rovnice, homogenní a nehomogenní rovnice.

5. Řešení homogenní rovnice.

6. Dimenze prostoru řešení homogenní lineární diferenciální rovnice n–tého řádu.

7. Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty.

8. Charakteristický polynom a řešení homogenní rovnice.

9. Příklady:

$$x'' - x' - 6x = 0\,, \qquad x'' + 4x' + 4x = 0\,, \qquad x'' - 2x' + 5x = 0\,.$$

10. Odhad řešení nehomogenní diferenciální rovnice.

11. Příklad: $x'' + 4x' + 3x = (t+1)\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-3t} + \mathrm{e}^{-t}\cos 2t$.

12. Příklad: odhad partikulárního řešení diferenciální rovnice

$$x^{(5)} + 2x^{(4)} + 2x''' - 4x'' - 11x' + 10x = t\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^{-t}\cos 2t + \mathrm{e}^{-t}\sin 2t + \mathrm{e}^{-2t}\sin 2t\,.$$

Diferenciální rovnice n–tého řádu

V této přednášce se budeme zabývat diferenciální rovnicí n–tého řádu vyřešenou vzhledem k n-té derivaci, tj. diferenciální rovnicí

$$x^{(n)} = f\big(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}\big)\,, \tag{1}$$

kde $x^{(k)}(t)$ je k–tá derivace funkce $x = x(t)$ a funkce f je definována na oblasti $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Definice. *Řešení diferenciální rovnice* (1) na intervalu $\mathcal{I}$ je jakákoliv funkce $x = \varphi(t)$, pro kterou platí

$$\varphi^{(n)}(t) = f\big(t, \varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)\big)$$

pro každé $t \in \mathcal{I}$.

Definice. *Obecné řešení diferenciální rovnice* (1) na intervalu $\mathcal{I}$ nazveme množinu všech řešení diferenciální rovnice (1) na intervalu $\mathcal{I}$.
Partikulární řešení diferenciální rovnice je prvek z množiny obecných řešení, tj. jedno konkrétní řešení.

Obecné řešení diferenciální rovnice (1) obsahuje obvykle n parametrů a partikulární řešení dostaneme z obecného řešení konkrétní volbou těchto parametrů.

Příklad. Jestliže interpretujeme $x = x(t)$ jako vzdálenost bodu s hmotností m na ose x od počátku, na který působí síla $F(t, x, v)$, kde $v = x'(t)$ je jeho rychlost, je jeho pohyb po ose x popsán pohybovou rovnicí

$$mx'' = F(t, x, x') \quad \text{neboli} \quad x'' = f(t, x, x')\,, \qquad f(t, x, x') = \frac{F}{m}\,, \tag{2}$$

tj. diferenciální rovnicí druhého řádu.

Obecné řešení diferenciální rovnice (2) je množina všech možných pohybů bodu v silovém poli $F(t, x, v)$ a partikulární řešení (2) je jeden konkrétní pohyb. Aby byl tento pohyb určen, zadává se poloha a rychlost bodu v nějakém čase t_0, tj. hodnoty $x(t_0) = x_0$ a $v(t_0) = x'(t_0) = v_0$. Tyto hodnoty se nazývají počáteční podmínky a obvykle je jimi jednoznačně určen pohyb bodu $x = x(t)$, tj. partikulární řešení diferenciální rovnice (2).

Obecně jsou *počáteční podmínky* pro diferenciální rovnici n–tého řádu (1) dány bodem $(t_0, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \mathcal{O}$, kde

$$x(t_0) = x_0\,, \quad x'(t_0) = x_1\,, \quad x''(t_0) = x_2\,, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}\,. \tag{3}$$

Definice. *Cauchyova úloha* se nazývá úloha najít řešení diferenciální rovnice (1), které splňuje počáteční podmínky (3).

Lineární diferenciální rovnice n–tého řádu

Najít obecné řešení diferenciální rovnice n–tého řádu nebo řešení Cauchyovy úlohy pro tuto rovnici není snadná úloha. My se budeme zabývat lineárními diferenciálními rovnicemi n–této řádu.

Lineární diferenciální rovnice n–tého řádu, je diferenciální rovnice tvaru

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)x^{(n-2)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t)\,, \tag{4}$$

kde $a_k(t)$ a $f(t)$ jsou funkce proměnné t.

Poznámky o řešení lineárních rovnic

Množina všech řešení lineární rovnice má několik obecných vlastností, které by měly být známy z přednášky o algebře a které nyní stručně shrneme.

Nechť jsou $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ vektorové prostory. Zobrazení $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ se nazývá lineární, jestliže pro každé v_1, $v_2 \in \mathcal{V}$ a každé α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) platí

$$L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2)\,. \tag{5}$$

Nechť je $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lineární zobrazení. Uvažujme rovnici

$$L(x) = w \tag{6}$$

pro neznámou $x \in V$, kde $w \in W$.

Pro lineární rovnice platí tzv. *princip superpozice*:

Věta: Jsou-li x_1 a x_2 řešením lineárních rovnic $L(x_1) = w_1$ a $L(x_2) = w_2$, je $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ řešení lineární rovnice $L(x) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$.

DŮKAZ: Tvrzení je bezprostředním důsledkem vlastnosti linearity (5).

Je-li $w \neq 0$ nazývá se rovnice (6) *nehomogenní* a je-li $w = 0$ nazýváme ji *homogenní*. Je-li dána nehomogenní lineární rovnice (6) nazývá se rovnice

$$L(x) = 0 \tag{7}$$

homogenní rovnicí příslušnou k rovnici (6).

Věta: Obecné řešení nehomogenní rovnice (6) lze vyjádřit ve tvaru

$$x = x_H + x_N\,, \tag{8}$$

kde x_H obecné řešení homogenní rovnice (7) a x_N je jedno řešení nehomogenní rovnice (6).

DŮKAZ: Nechť je x_N jedno řešení nehomogenní rovnice a x její obecné řešení. Označme $y = x - x_N$. Podle vlastnosti (5) pro y platí

$$L(y) = L(x - x_N) = L(x) - L(x_N) = w - w = 0\,.$$

Tedy $y = x - x_N$ je obecné řešení homogenní rovnice, a proto $x = x_N + y$.

Abychom našli obecné řešení nehomogenní lineární rovnice, stačí podle této věty najít jedno řešení nehomogenní rovnice (6) a obecné řešení příslušné homogenní rovnice (7).

Věta: Množina všech řešení homogenní lineární rovnice (7) tvoří vektorový podprostor $\mathcal{V}_H \subset \mathcal{V}$.

DŮKAZ: Musíme ukázat, že pro každá dvě řešení homogenní rovnice x_1 a x_2 a každé konstanty α_1 a α_2 je $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ řešením homogenní rovnice. Ale z vlastnosti (5) plyne

$$L(x) = L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 L(x_1) + \alpha_2 L(x_2) = 0\,,$$

a tedy x je také řešení homogenní rovnice.

Tato věta je užitečná zejména tehdy, když množina všech řešení homogenní rovnice $\mathcal{V}_H$ je konečně–dimenzionální vektorový prostor.

Důsledek: Jestliže je $\dim \mathcal{V}_H = n$, stačí pro nalezení obecného řešení homogenní rovnice najít n jejích lineárně nezávislých řešení x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Obecné řešení homogenní rovnice pak má tvar

$$x_H = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n\,, \tag{9}$$

kde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ jsou libovolné konstanty.

DŮKAZ: Toto tvrzení je vlastně definice dimenze vektorového prostoru.

Tedy jestliže víme, že dimenze vektorového prostoru řešení homogenní rovnice je n, stačí pro nalezení obecného řešení nehomogenní rovnice najít n lineárně nezávislých řešení homogenní rovnice a jedno řešení nehomogenní rovnice.

Z těchto vět plyne, že obecné řešení lineární diferenciální rovnice (4) lze psát jako součet

$$x(t) = x_H(t) + x_N(t)\,,$$

kde $x_H(t)$ je obecné řešení diferenciální rovnice

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)x^{(n-2)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0\,, \tag{10}$$

která se nazývá homogenní diferenciální rovnice příslušná k diferenciální rovnici (4) a $x_N(t)$ je jedno řešení nehomogenní diferenciální rovnice (4).

Pro lineární diferenciální rovnici (4) platí následující věta:

Věta. Jestliže jsou funkce $a_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, a $f(t)$ spojité na intervalu $\mathcal{I}$, existuje pro každé $t_0 \in \mathcal{I}$ a každé $\bigl(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\bigr) \in \mathbb{R}^n$ právě jedno řešení diferenciální rovnice (4), které splňuje počáteční podmínky $x^{(k)}(t_0) = x_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, a je definované na celém intervalu $\mathcal{I}$.

Pomocí této věty lze poměrně jednoduše ukázat, že dimenze vektorového prostoru $\mathcal{V}_H$ je n. Tedy abychom našli obecné řešení homogenní lineární diferenciální rovnice n–tého řádu, stačí najít n lineárně nezávislých řešení $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, této rovnice, tj. bázi v prostoru V_H. Obecné řešení je pak jejich lineární kombinace, tj.

$$x_H(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \ldots + c_nx_n(t)\,,$$

kde c_1, c_2, ..., c_n jsou libovolné konstanty.

Definice. Každá množina n lineárně nezávislých řešení homogenní lineární rovnice n–tého řádu (10) se nazývá *fundamentální systém řešení*.

Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

V obecném případě je i úloha najít fundamentální systém řešení homogenní diferenciální rovnice (10) prakticky neřešitelná.

Situace se podstatně zjednoduší, když jsou funkce $a_k(t)$ v diferenciální rovnici (10) konstanty. Pak má totiž tato diferenciální rovnice,

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \ldots + a_1x' + a_0x = 0\,, \tag{11}$$

alespoň jedno řešení tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, kde λ je obecně komplexní číslo. V takovém případě je $x^{(k)}(t) = \lambda^k\mathrm{e}^{\lambda t}$ a po dosazení do rovnice (11) a vydělení $\mathrm{e}^{\lambda t}$ dostaneme pro λ rovnici

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0\,. \tag{12}$$

Polynom $P(\lambda)$ se nazývá *charakteristický polynom* a rovnici (12) pro λ nazýváme *charakteristickou rovnicí*. Pro každé řešení λ charakteristické rovnice je funkce $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ nenulovým řešením diferenciální rovnice (11).

Protože charakteristický polynom je stupně n, lze jej v komplexním oboru zapsat ve tvaru

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2}\ldots(\lambda - \lambda_r)^{k_r}\,,$$

kde λ_1, ..., λ_r jsou navzájem různé kořeny charakteristického polynomu a k_1, ..., k_r jejich násobnosti. Přitom platí $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$.

Pomocí kořenů charakteristického polynomu lze sestrojit n lineárně nezávislých řešení diferenciální rovnice (11). Je-li λ_s kořen charakteristické rovnice násobnosti k_s, odpovídá mu k_s lineárně nezávislých obecně komplexních řešení (11)

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_s t}\,, \quad x_2(t) = t\mathrm{e}^{\lambda_s t}\,, \quad \dots\,, \quad x_{k_s}(t) = t^{k_s-1}\mathrm{e}^{\lambda_s t}\,.$$

Jsou-li koeficienty a_k reálné a je-li číslo λ_s kořen charakteristického polynomu násobnosti k_s, je také komplexně sdružené číslo $\overline{\lambda}_s$ kořen charakteristického polynomu násobnosti k_s. V takovém případě je výhodnější používat místo komplexních prvků báze prostoru $\mathcal{V}_H$ reálné funkce. Je-li totiž $\lambda_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$, kde $\beta \neq 0$, kořen násobnosti k, je také $\overline{\lambda_1} = \alpha - \mathrm{i}\beta$ kořen násobnosti k. Této dvojici odpovídají komplexní řešení

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t} = \mathrm{e}^{\alpha t}\big(\cos\beta t + \mathrm{i}\sin\beta t\big) \quad \text{a} \quad x_2(t) = \overline{x_1(t)} = \mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)t} = \mathrm{e}^{\alpha t}\big(\cos\beta t - \mathrm{i}\sin\beta t\big)\,.$$

Místo těchto dvou řešení můžeme za prvky báze vybrat jejich lineární kombinaci

$$\begin{aligned} \widehat{x}_1(t) &= \frac{x_1(t)+x_2(t)}{2} = \operatorname{Re} x_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t\,, \\ \widehat{x}_2(t) &= \frac{x_1(t)-x_2(t)}{2\mathrm{i}} = \operatorname{Im} x_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t\,. \end{aligned}$$

Podobnou konstrukci lze použít i pro řešení $x(t) = t^s\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}$ a $\overline{x(t)} = t^s\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)t}$.

Tedy má-li diferenciální rovnice (11) reálné koeficienty, lze ke každému reálnému kořenu λ_0 násobnosti k sestrojit k lineárně nezávislých řešení

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\,, \quad x_2(t) = t\mathrm{e}^{\lambda_0 t}\,, \quad \dots\,, \quad x_k(t) = t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$$

a ke každé dvojici komplexních kořenů $\lambda_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ a $\overline{\lambda_1} = \alpha - \mathrm{i}\beta$ násobnosti k sestrojit $2k$ lineárně nezávislých řešení

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t\,, & x_3(t) &= t\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t\,, & \dots\,, && x_{2k-1}(t) &= t^{k-1}\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t\,, \\ x_2(t) &= \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t\,, & x_4(t) &= t\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t\,, & \dots\,, && x_{2k}(t) &= t^{k-1}\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t\,. \end{aligned}$$

Lze ukázat, že množina všech takto sestrojených n řešení je lineárně nezávislá, a tedy tvoří bázi v prostoru $\mathcal{V}_H$.

Příklad. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $x'' - x' - 6x = 0$.

Řešení: Jedná se o homogenní lineární rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Proto budeme její řešení hledat ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, kde λ je konstanta. Po dosazení dostaneme pro λ charakteristickou rovnici $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, jejíž řešení jsou $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -2$. Proto jsou dvě lineárně nezávislá řešení dané diferenciální rovnice $x_1(t) = \mathrm{e}^{3t}$ a $x_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}$. Obecné řešení této rovnice je jejich lineární kombinace, tedy

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) = c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2\mathrm{e}^{-2t}\,,$$

kde c_1 a c_2 jsou konstanty.

Příklad. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x'' + 4x' + 4x = 0$, $x(0) = 1$ a $x'(0) = 2$.

Řešení: Jedná se o homogenní lineární rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Proto budeme její řešení hledat ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, kde λ je konstanta. Po dosazení dostaneme pro λ charakteristickou rovnici $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, která má dvojnásobný kořen $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Proto jsou dvě lineárně nezávislá řešení dané diferenciální rovnice $x_1(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ a $x_2(t) = t\mathrm{e}^{-2t}$ a obecné řešení této rovnice je

$$x(t) = c_1\mathrm{e}^{-2t} + c_2 t\mathrm{e}^{-2t}\,,$$

kde c_1 a c_2 jsou konstanty. Ty určíme z počátečních podmínek. Z nich dostaneme soustavu rovnic

$$x(0) = 1 = c_1\,, \quad x'(0) = 2 = -2c_1 + c_2\,,$$

která má řešení $c_1 = 1$ a $c_2 = 4$. Řešení dané Cauchyovy úlohy tedy je $x(t) = (1 + 4t)\mathrm{e}^{-2t}$.

Příklad. Najděte řešení diferenciální rovnice $x'' - 2x' + 5x = 0$, které splňuje počáteční podmínky $x(0) = 1$ a $x'(0) = 3$.

Řešení: Jedná se o homogenní lineární rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Proto budeme její řešení hledat ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, kde λ je konstanta. Po dosazení dostaneme pro λ charakteristickou rovnici $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$, která má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_1 = 1 + 2\mathrm{i}$ a $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 1 - 2\mathrm{i}$. K těmto kořenům sestrojíme dvě lineárně nezávislá řešení diferenciální rovnice

$$x_1(t) = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t}\big) = \mathrm{e}^t\cos 2t\,, \qquad x_2(t) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t}\big) = \mathrm{e}^t\sin 2t\,.$$

Obecné řešení dané diferenciální rovnice proto je

$$x(t) = c_1\mathrm{e}^t\cos 2t + c_2\mathrm{e}^t\sin 2t\,,$$

kde c_1 a c_2 jsou konstanty. Ty najdeme z počátečních podmínek, ze kterých plyne

$$x(0) = 1 = c_1 \quad \text{a} \quad x'(0) = 3 = c_1 + 2c_2\,,$$

tj. $c_1 = c_2 = 1$. Proto je řešení naší úlohy $x(t) = \mathrm{e}^t\big(\cos 2t + \sin 2t\big)$.

`Poznámka.` Za dvě lineárně nezávislá řešení dané diferenciální rovnice bychom také mohli zvolit dvě komplexní řešení $x_1(t) = \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t}$ a $x_2(t) = \mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})t}$. Obecné řešení bychom pak mohli zapsat ve tvaru

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t} + C_2\mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})t}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou komplexní čísla. Z počátečních podmínek bychom dostali soustavu

$$x(0) = 1 = C_1 + C_2\,, \qquad x'(0) = 3 = (1 + 2\mathrm{i})C_1 + (1 - 2\mathrm{i})C_2\,,$$

ze které plyne $C_1 = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{i})$, $C_2 = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i})$. Tedy řešení naší úlohy je

$$x(t) = \tfrac{1}{2}(1 - \mathrm{i})\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t} + \tfrac{1}{2}(1 + \mathrm{i})\mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})t} = \mathrm{e}^t\big(\cos 2t + \sin 2t\big)\,.$$

Příklad. Nalezněte reálný fundamentální systém řešení diferenciální rovnice

$$x^{(6)} - 9x^{(5)} + 32x^{(4)} - 50x''' + 13x'' + 55x' - 50x = 0\,. \tag{13}$$

Řešení: Diferenciální rovnice (13) je lineární homogenní diferenciální rovnice šestého řádu. Proto její fundamentální systém řešení tvoří šest jejích lineárně nezávislých řešení. Protože se jedná o rovnici s konstantními koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, kde λ je konstanta. Příslušná charakteristická rovnice

$$\lambda^6 - 9\lambda^5 + 32\lambda^4 - 50\lambda^3 + 13\lambda^2 + 55\lambda - 50 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 5)^2 = 0$$

má kořeny $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, které jsou násobnosti jedna a dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_3 = 2 + \mathrm{i}$ a $\lambda_4 = 2 - \mathrm{i}$, které jsou násobnosti 2. Protože $\mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})t}\big) = \mathrm{e}^{2t}\cos t$ a $\mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})t}\big) = \mathrm{e}^{2t}\sin t$, tvoří reálný fundamentální systém řešení diferenciální rovnice (13) například funkce

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{-t}\,, \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{2t}\,,$$
$$x_3(t) = \mathrm{e}^{2t}\cos t\,, \quad x_4(t) = \mathrm{e}^{2t}\sin t\,, \quad x_5(t) = t\mathrm{e}^{2t}\cos t\,, \quad x_6(t) = t\mathrm{e}^{2t}\sin t\,.$$

Příklad. Nalezněte reálný fundamentální systém řešení diferenciální rovnice

$$x^{(4)} - 2x''' + 6x'' - 32x' + 40x = 0\,, \tag{14}$$

jestliže víte, že jedno řešení rovnice (14) je $x(t) = t\mathrm{e}^{2t}$.

Řešení: Diferenciální rovnice (14) je lineární homogenní diferenciální rovnice čtvrtého řádu. Proto její fundamentální systém řešení tvoří čtyři její lineárně nezávislá řešení. Protože se jedná o rovnici s konstantními koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, kde λ je konstanta. Příslušná charakteristická rovnice je

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32\lambda + 40 = 0\,. \tag{15}$$

Protože funkce $x(t) = t\mathrm{e}^{2t}$ je řešení diferenciální rovnice (14), je $\lambda = 2$ dvojnásobný kořen rovnice (15). Dělením zjistíme, že

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32\lambda + 40 = (\lambda - 2)^2(\lambda^2 + 2\lambda + 10)\,.$$

Tedy charakteristická rovnice (15) má dvojnásobný reálný kořen $\lambda_1 = 2$ a dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_2 = -1 + 3\mathrm{i}$ a $\overline{\lambda_1} = -1 - 3\mathrm{i}$. Proto je reálný fundamentální systém řešení tvořen například funkcemi

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{2t}\,, \quad x_2(t) = t\mathrm{e}^{2t}\,, \quad x_3(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos 3t\,, \quad x_4(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin 3t\,.$$

Řešení nehomogenní rovnice ve speciálních případech – odhad řešení

Jestliže známe fundamentální systém řešení homogenní rovnice (10), existuje metoda, jak vyjádřit řešení nehomogenní rovnice (4) pro libovolnou funkci $f(t)$ pomocí integrálů. Touto metodou, která se nazývá *variace konstant*, se v této přednášce zabývat nebudeme, ale soustředíme se na řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \ldots + a_1x' + a_0x = f(t)\,, \tag{16}$$

kde funkce $f(t)$ má jistý speciální tvar, který upřesníme později.

Při řešení homogenní diferenciální rovnice s konstantními koeficienty (11) hrál významnou roli charakteristický polynom (12), pomocí jehož kořenů jsme sestrojili fundamentální systém řešení homogenní rovnice.

Je-li pravá strana $f(t)$ diferenciální rovnice (16) lineární kombinace funkcí

$$\mathrm{e}^{\rho t} P_N(t) \qquad \text{a} \qquad \mathrm{e}^{\sigma t}\big(P_{N_1}(t)\cos\omega t + P_{N_2}(t)\sin\omega t\big)\,, \tag{17}$$

kde $P_N(t)$ je polynom stupně N a $P_{N_1}(t)$ a $P_{N_2}(t)$ jsou polynomy stupně N_1 a N_2, není třeba k nalezení řešení nehomogenní rovnice použít metody variace konstant, ale přímo odhadnout tvar řešení.

Připomeňme, že pro lineární rovnice platí *princip superpozice*, tj. když jsou x_1, resp. x_2, řešením lineární rovnice $L(x_1) = f_1$, resp. $L(x_2) = f_2$, je $x = x_1 + x_2$ řešením lineární rovnice $L(x) = f_1 + f_2$. Proto je-li pravá strana diferenciální rovnice (16) rovna součtu funkcí typu (17), lze najít řešení nehomogenní rovnice pro každý člen součtu zvlášť a celkové řešení bude jejím součtem.

Pro pravou stranu diferenciální rovnice (16) typu $f(t) = \mathrm{e}^{\rho t} P_N(t)$ existuje řešení nehomogenní rovnice tvaru

$$x(t) = \mathrm{e}^{\rho t} Q_N(t) \cdot t^k\,,$$

kde $Q_N(t)$ je obecný polynom stupně N a k je násobnost kořene ρ v charakteristické rovnici $P(\lambda) = 0$. Toto k odpovídá počtu řešení homogenní rovnice tvaru $t^p \mathrm{e}^{\rho t}$ nebo jej lze určit ze vztahů

$$P(\rho) = P'(\rho) = \ldots = P^{(k-1)}(\rho) = 0 \quad \text{a} \quad P^{(k)}(\rho) \neq 0\,.$$

Má-li diferenciální rovnice (16) reálné koeficienty a její pravá strana je typu $f(t) = \mathrm{e}^{\sigma t}\big(P_{N_1}(t)\cos\omega t + P_{N_2}(t)\sin\omega t\big)$, existuje řešení nehomogenní rovnice tvaru

$$x(t) = \mathrm{e}^{\sigma t}\big(R_N(t)\cos\omega t + S_N(t)\sin\omega t\big) \cdot t^k\,,$$

kde $N = \max(N_1, N_2)$, $R_N(t)$ a $S_N(t)$ jsou obecné polynomy stupně N a k je násobnost kořene $\sigma \pm \mathrm{i}\omega$ v charakteristické rovnici $P(\lambda) = 0$. Toto číslo odpovídá počtu řešení homogenní rovnice tvaru $t^p \mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t$, resp. $t^p \mathrm{e}^{\sigma t}\sin\omega t$.

Příklad. Najděte jedno řešení diferenciální rovnice

$$x'' + 4x' + 3x = (t+1)\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-3t} + \mathrm{e}^{-t}\cos 2t\,. \tag{18}$$

Řešení: Odpovídající homogenní rovnice je $x'' + 4x' + 3x = 0$ a její charakteristická rovnice $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ má kořeny $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = -3$, které jsou oba násobnosti 1. Tedy dvě lineárně nezávislá řešení charakteristické rovnice jsou $x_1 = \mathrm{e}^{-t}$ a $x_2 = \mathrm{e}^{-3t}$.
Pravou stranu napíšeme jako součet tří funkcí $f(t) = f_{(1)}(t) + f_{(2)}(t) + f_{(3)}(t)$, kde

$$f_{(1)}(t) = (t+1)\mathrm{e}^t\,, \qquad f_{(2)}(t) = \mathrm{e}^{-3t}\,, \qquad f_{(3)}(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos 2t\,,$$

a budeme hledat řešení pro každou část zvlášť, tj. hledat řešení rovnic $x''_{(k)} + 4x'_{(k)} + 3x_{(k)} = f_{(k)}(t)$ pro $k = 1, 2, 3$.

Pro $f_{(1)}(t)$ má polynom $P(t) = (t+1)$ stupeň jedna a e^t není řešením homogenní rovnice. Proto bude mít řešení tvar

$$x_{(1)}(t) = \mathrm{e}^t(at+b)\,.$$

Po dosazení do rovnice dostaneme

$$8at + 6a + 8b = t + 1 \implies 8a = 1\,, \quad 6a + 8b = 1 \implies a = \tfrac{1}{8}\,, \quad b = \tfrac{1}{32}\,.$$

Tedy pro $f_{(1)}(t)$ jsme našli řešení $x_{(1)}(t) = \frac{1}{32}\,\mathrm{e}^t(4t+1)$.

Pro $f_{(2)}(t)$ má polynom $P(t) = 1$ stupeň nula a $\lambda = -3$ je kořen charakteristické rovnice násobnosti 1. Proto bude mít řešení tvar

$$x_{(2)}(t) = \mathrm{e}^{-3t} a \cdot t\,.$$

Po dosazení do rovnice dostaneme

$$-2a = 1\,, \quad \text{tj. } a = -\tfrac{1}{2}\,.$$

Tedy pro $f_{(2)}(t)$ jsme našli řešení $x_{(2)}(t) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-3t}t$.

Pro $f_{(3)}(t)$ má polynom $P(t) = 1$ stupeň nula a $\mathrm{e}^{-t}\cos 2t$ není řešením homogenní rovnice. Proto budeme hledat řešení ve tvaru

$$x_{(3)}(t) = \mathrm{e}^{-t}\big(a\cos 2t + b\sin 2t\big)\,.$$

Po dosazení do rovnice dostaneme po úpravách

$$(-4a+4b)\cos 2t + (-4a-4b)\sin 2t = \cos 2t \implies -4a + 4b = 1\,, \quad a + b = 0 \implies$$
$$\implies a = -\tfrac{1}{8}\,, \quad b = \tfrac{1}{8}\,.$$

Tedy pro $f_{(3)}(t)$ je řešení $x_{(3)}(t) = \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-t}\big(\sin 2t - \cos 2t\big)$.

Jedno řešení nehomogenní rovnice (18) je

$$x(t) = x_{(1)}(t) + x_{(2)}(t) + x_{(3)}(t) = \tfrac{1}{32}\,\mathrm{e}^t(4t+1) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-3t}t + \tfrac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-t}\big(\sin 2t - \cos 2t\big)\,.$$

Příklad: Uveďte, v jakém tvaru budete hledat řešení diferenciální rovnice

$$x^{(5)} + 2x^{(4)} + 2x''' - 4x'' - 11x' + 10x = t\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^{-t}\cos 2t + \mathrm{e}^{-t}\sin 2t + \mathrm{e}^{-2t}\sin 2t\,.$$

Řešení: Pravá strana této rovnice je součet čtyř částí, které odpovídají různým možným řešení homogenní rovnice. Jsou to

$$f_1(t) = t\mathrm{e}^{-t}\,, \quad f_2(t) = \mathrm{e}^t\,, \quad f_3(t) = t\mathrm{e}^{-t}\cos 2t + \mathrm{e}^{-t}\sin 2t\,, \quad f_4(t) = \mathrm{e}^{-2t}\sin 2t\,.$$

Celkové řešení nehomogenní rovnice budeme proto hledat jako součet řešení čtyř rovnic. Charakteristický polynom odpovídající homogenní rovnici je

$$P(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 - 11\lambda + 10\,.$$

Protože $P(-1) = 16$, není $\lambda = -1$ řešením charakteristické rovnice. Proto bude mít odpovídající řešení tvar

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{-t}(a_1 t + b_1)\,.$$

Protože $P(1) = 0$ je $\lambda = 1$ kořen charakteristické rovnice. Derivace charakteristického polynomu je
$$P'(\lambda) = 5\lambda^4 + 8\lambda^3 + 6\lambda^2 - 8\lambda - 11\,.$$
Protože $P'(1) = 0$, je $\lambda = 1$ kořen charakteristické rovnice násobnosti nejméně 2. Druhá derivace charakteristického polynomu je
$$P''(\lambda) = 20\lambda^3 + 24\lambda^2 + 12\lambda - 8\,.$$
Protože $P''(1) = 48 \neq 0$ je $\lambda = 1$ kořen charakteristického polynomu násobnosti 2. Řešení odpovídající nehomogenní rovnice budete tedy hledat ve tvaru
$$x_2(t) = \mathrm{e}^t a \cdot t^2\,.$$
Protože už víme, že $\lambda = 1$ je kořen charakteristického polynomu násobnosti 2, dostaneme dělením
$$P(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda^3 + 4\lambda^2 + 9\lambda + 10)\,.$$
Pro funkci $f_3(t)$ je podstatné, zda je $\lambda = -1 \pm 2\mathrm{i}$ kořen charakteristické rovnice. To může nastat pouze v případě, že polynom $(\lambda + 1 - 2\mathrm{i})(\lambda + 1 + 2\mathrm{i}) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$ dělí polynom $P_1(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 9\lambda + 10$. To skutečně dělitelné je a dostaneme
$$P(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 5)\,.$$
Navíc je vidět, že $\lambda = -1 \pm 2\mathrm{i}$ jsou kořeny charakteristické rovnice násobnosti 1. Protože v $f_3(t)$ je u $\cos 2t$ polynom stupně 1 a u $\sin 2t$ polynom stupně 0, budeme hledat řešení příslušné nehomogenní rovnice ve tvaru
$$x_3 = \mathrm{e}^{-t}\big((a_3 t + b_3)\cos 2t + (c_3 t + d_3)\sin 2t\big) \cdot t\,.$$
Protože $\lambda = -2 \pm 2\mathrm{i}$ není kořen charakteristické rovnice, budeme hledat řešení odpovídající $f_4(t)$ ve tvaru
$$x_4(t) = \mathrm{e}^{-2t}\big(a_4 \cos 2t + b_4 \sin 2t\big)\,.$$
Celkově budeme hledat řešení nehomogenní rovnice ve tvaru
$$x_N(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t)\,.$$