Přednáška 12

Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Osnova přednášky

1. Soustava diferenciálních rovnic.

2. Převod obecné soustavy na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu.

3. Partikulární a obecné řešení, počáteční podmínka a Cauchyova úloha.

4. Soustava lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu, maticový zápis.

5. Obecný tvar řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu.

6. Dimenze prostoru řešení homogenní soustavy lineárních diferenciálních rovnic.

7. Soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.

8. Charakteristický polynom a řešení homogenní rovnice.

9. Příklady: řešení homogenních soustav $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2, & 2 \\ -6, & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & -5 \\ 1, & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & 1 \\ -1, & 4 \end{pmatrix}.$$

10. Odhad řešení nehomogenní soustavy diferenciálních rovnic.

11. Příklad:

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + x_2 + 1 + 5\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{3t}, \\ x_2' &= 4x_1 - x_2 + 3t + 1 + \mathrm{e}^{t} + 4\mathrm{e}^{3t}. \end{aligned}$$

12. Příklad: partikulární řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$x_1' = 3x_1 - x_2 + 3\mathrm{e}^{2t}\cos t, \qquad x_2' = -x_1 + 3x_2 + \mathrm{e}^{2t}\sin t.$$

13. Metoda eliminace; příklad

$$x_1' = 4x_1 - 6x_2 + 2\mathrm{e}^{t}\sin 3t, \qquad x_2' = 3x_1 - 2x_2 + 4\mathrm{e}^{t}\cos 3t.$$

Soustava n diferenciálních rovnic prvního řádu je soustava rovnic

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1\big(t, x_1, x_2, \dots, x_n\big), \\ x_2' &= f_2\big(t, x_1, x_2, \dots, x_n\big), \\ &\dots \\ x_n' &= f_n\big(t, x_1, x_2, \dots, x_n\big). \end{aligned} \tag{1}$$

pro neznámé funkce $x_1 = x_1(t)$, …, $x_n = x_n(t)$, kde f_1, f_2, …, f_n jsou funkce definované na nějaké oblasti $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Soustavu diferenciálních rovnic (1) budeme často zapisovat ve vektorovém tvaru jako

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}).$$

`Poznámka.` Mnohdy se setkáte se soustavou diferenciálních rovnic vyššího řádu. Ale z teoretického hlediska nemá cenu se takovými soustavami zabývat, protože je lze snadno převést na soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu. Postup ukážeme v následujícím příkladě.

Příklad. Newtonovy pohybové rovnice hmotného bodu s hmotností m, na který působí síla $\mathbf{F}\big(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}'\big)$, jsou

$$m\mathbf{x}'' = \mathbf{F}\big(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}'\big)$$

nebo ve složkách

$$\begin{aligned} mx_1'' &= F_1\big(t, x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3'\big)\,, \\ mx_2'' &= F_2\big(t, x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3'\big)\,, \\ mx_3'' &= F_3\big(t, x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3'\big)\,. \end{aligned}$$

To je soustava tří diferenciálních rovnic druhého řádu. Jestliže zavedeme rychlost

$$\mathbf{v} = \mathbf{x}'\,, \quad \text{tj.} \quad v_1 = x_1'\,, \quad v_2 = x_2'\,, \quad v_3 = x_3'\,,$$

dostaneme z této soustavy soustavu šesti diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\mathbf{x}' = \mathbf{v}\,, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{f}\big(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}\big)\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{f} = \frac{1}{m}\mathbf{F}\,.$$

Definice. *Řešení soustavy diferenciálních rovnic* (1) na intervalu $\mathcal{I}$ budeme nazývat každou n–tici funkcí $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, ..., $x_n = \varphi_n(t)$ takovou, že pro každé $t \in \mathcal{I}$ a pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$\varphi_k'(t) = f_k\big(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\big)\,.$$

Definice. *Obecné řešení soustavy* (1) na intervalu $\mathcal{I}$ budeme nazývat množinu všech jejích řešení na intevralu $\mathcal{I}$ a partikulární řešení jedno řešení, tj. prvek z množiny obecných řešení.

Definice. *Počáteční podmínky* pro soustavu diferenciálních rovnic (1) jsou bod

$$(t_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathcal{O}$$

a *Cauchyova úloha* pro soustavu soustavu n diferenciálních rovnic (1) je úloha najít řešení soustavy (1), pro které platí $x_k(t_0) = \xi_k$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$.

Geometrická interpretace soustavy n diferenciálních rovnic prvního řádu

Jestliže interpretujeme rovnice $x_0 = t$, $x_1 = \varphi_1(t)$, ..., $x_n = \varphi_n(t)$, $t \in \mathcal{I}$, jako křivku $\mathcal{C}$ v $\mathbb{R}^{n+1}$ je její tečný vektor $\mathbf{t} = \big(1, \varphi_1'(t), \ldots, \varphi_n'(t)\big)$. Jsou-li tyto funkce řešením soustavy diferenciálních rovnic (1), je tečný vektor k této křivce $\mathbf{t} = \big(1, \mathbf{f}(t, \mathbf{x})\big)$. Tedy soustava diferenciálních rovnic (1) zadává v každém bodě oblasti $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ vektorové pole a řešení je křivka, tzv. *integrální křivka*, která má v každém bodě tento zadaný tečný vektor. Obecné řešení je systém všech takových křivek, počáteční podmínka je bod v oblasti $\mathcal{O}$ a Cauchyova úloha je úloha najít integrální křivku, která prochází daným bodem oblasti $\mathcal{O}$.

Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Najít řešení obecné soustavy n diferenciálních rovnic (1) je prakticky nemožné. V přednášce se budeme zabývat soustavou n lineárních rovnic prvního řádu, která má tvar

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t)\,, \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t)\,, \\ &\ldots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)\,, \end{aligned} \tag{2}$$

kde $a_{ik}(t)$ a $f_k(t)$ jsou funkce proměnné t definované na intervalu $\mathcal{I}$. Abychom zkrátili zápis, zavedeme označení

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t), & a_{12}(t), & \ldots, & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t), & a_{22}(t), & \ldots, & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t), & a_{n2}(t), & \ldots, & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Soustavu lineárních diferenciálních rovnic (2) můžeme pak zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)\,. \tag{3}$$

Je-li $\mathbf{f}(t) \neq 0$ se rovnice (3) nazývá *nehomogenní* a pro $\mathbf{f}(t) = 0$ ji nazýváme *homogenní*. Homogenní soustavu diferenciálních rovnic

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \tag{4}$$

budeme nazývat homogenní soustavou příslušnou k nehomogenní soustavě (3).

Protože se jedná o lineární soustavu, platí pro řešení soustavy (3) následující tvrzení:

1. Obecné řešení $\mathbf{x}(t)$ nehomogenní soustavy diferenciálních rovnic (3) lze zapsat ve tvaru
$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_H(t) + \mathbf{x}_N(t)\,,$$
kde $\mathbf{x}_H$ je obecné řešení příslušné homogenní soustavy (4) a $\mathbf{x}_N(t)$ je jedno řešení nehomogenní soustavy (3).
2. Množina všech řešení homogenní soustavy (4) tvoří vektorový prostor $\mathcal{V}_H$.

Z následující věty plyne, že dimenze vektorového prostoru řešení homogenní soustavy $\mathcal{V}_H$ je rovna n.

Věta. Jsou-li funkce $a_{ik}(t)$ a $f_k(t)$ spojité na intervalu $\mathcal{I}$, pak pro každé počáteční podmínky $(t_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, kde $t_0 \in \mathcal{I}$ a $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ existuje právě jedno řešení Cauchyovy úlohy (3) s počátečními podmínkami $(t_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ a toto řešení je definováno na celém intervalu $\mathcal{I}$.

Protože množina všech řešení homogenní soustavy n lineárních rovnic prvního řádu je vektorový prostor dimenze n, stačí najít bázi tohoto prostoru, tj. n lineárně nezávislých řešení $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, …, $\mathbf{x}_n(t)$ soustavy (4). Obecné řešení je pak jejich lineární kombinace, tj.

$$\mathbf{x}_H(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n\,,$$

kde c_1, c_2, …, c_n jsou (obecně komplexní) konstanty.

Definice. Každou n–tici lineárně nezávislých řešení homogenní soustavy (4) nazýváme *fundamentální systém řešení.*

Soustavy homogenních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

V obecném případě je úloha najít řešení homogenní soustavy diferenciálních rovnic (4) obtížný úkol. Situace se značně zjednoduší, pokud je matice $\mathbf{A}$ konstantní. V tomto případě je v principu možné najít fundamentální systém řešení algebraickými prostředky.

Uvažujme homogenní lineární soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\ldots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{aligned} \qquad \text{tj.} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}\,, \tag{5}$$

kde a_{ik} jsou (obecně komplexní) konstanty. Existuje alespoň jedno nenulové řešení této soustavy, které má tvar

$$x_k = \mathrm{e}^{\lambda t} v_k\,, \quad \text{tj.} \quad \mathbf{x} = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}\,,$$

kde λ a v_k jsou konstanty. Jestliže dosadíme tento předpoklad do soustavy (5) a každou rovnici vydělíme $\mathrm{e}^{\lambda t}$, dostaneme pro konstanty λ a v_k soustavu n lineárních homogenních rovnic

$$\begin{aligned} \lambda v_1 &= a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1n}v_n \\ \lambda v_2 &= a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{2n}v_n \\ &\ldots \\ \lambda v_n &= a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \ldots + a_{nn}v_n \end{aligned} \qquad \text{tj.} \quad \lambda\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v}\,. \tag{6}$$

Tedy λ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{v}$ je k němu příslušný vlastní vektor.

Soustavu (6) napíšeme ve tvaru

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12} & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-\lambda, & \ldots, & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{tj.} \quad \big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\big)\mathbf{v} = 0\,, \tag{7}$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice. Protože hledáme nenulové řešení soustavy (7), musí být matice $\big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\big)$ singulární, tj. musí platit

$$P(\lambda) = \det\big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\big) = 0\,. \tag{8}$$

Polynom $P(\lambda) = \det\big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\big)$ se nazývá *charakteristický polynom* a rovnici (8) nazýváme *charakteristická rovnice*. Vlastní čísla λ jsou tedy kořeny charakteristického polynomu, tj.

řešení rovnice (8), odpovídající vlastní vektory $\mathbf{v}$ jsou pro tato λ řešení soustavy (7) a nenulové řešení soustavy diferenciálních rovnic je $\mathbf{x} = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}$.

Příklad. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x_1' = -2x_1 + 2x_2\,, \quad x_2' = -6x_1 + 5x_2\,, \qquad x_1(0) = 0\,, \quad x_2(0) = 1\,. \tag{9}$$

Řešení: V tomto příkladě je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2, & 2 \\ -6, & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}\,.$$

Když budeme hledat řešení soustavy (9) ve tvaru

$$x_1 = \mathrm{e}^{\lambda t} v_1 \quad \text{a} \quad x_2 = \mathrm{e}^{\lambda t} v_2\,, \qquad \text{tj.} \quad \mathbf{x} = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}\,,$$

kde λ, v_1 a v_2 jsou konstanty a $v_1^2 + v_2^2 \neq 0$, dostaneme po dosazení do soustavy

$$\begin{aligned} \lambda v_1 &= -2v_1 + 2v_2\,, \\ \lambda v_2 &= -6v_1 + 5v_1\,, \end{aligned} \qquad \text{tj.} \qquad \begin{aligned} (-2-\lambda)v_1 + \quad 2v_2 \quad &= 0\,, \\ -6v_1 \quad + (5-\lambda)v_2 &= 0\,, \end{aligned} \qquad \text{tj.} \quad \big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\big)\mathbf{v} = 0\,.$$

Dostali jsme v podstatě soustavu dvou lineárních rovnic s parametrem λ a naším úkolem je najít hodnotu parametru λ tak, aby tato soustava měla nenulové řešení. Podmínku na parametr λ lze zapsat jako charakteristickou rovnici, tj.

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda, & 2 \\ -6, & 5-\lambda \end{pmatrix} = \det\big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\big) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0\,.$$

Tato charakteristická rovnice má dvě řešení $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 2$. To jsou právě vlastní hodnoty matice $\mathbf{A}$.

K těmto vlastním číslům budeme hledat příslušné vlastní vektory, tj. budeme hledat řešení soustavy (7).

Pro $\lambda = \lambda_1 = 1$ dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} (-2-\lambda_1)v_1 + \quad 2v_2 \quad &= 0\,, \\ -6v_1 \quad + (5-\lambda_1)v_2 &= 0\,, \end{aligned} \qquad \text{tj.} \qquad \begin{aligned} -3v_1 + 2v_2 &= 0\,, \\ -6v_1 + 4v_2 &= 0\,, \end{aligned}\,.$$

Je vidět, že tyto rovnice jsou lineárně závislé. Všechna řešení této soustavy jsou násobkem jednoho nenulového řešení $\mathbf{v}_1$, za které lze vzít například

$$v_1 = 2\,, \quad v_2 = 3\,, \qquad \text{tj.} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Takto jsme našli jedno nenulové řešení dané soustavy

$$\mathbf{x}_1 = \mathrm{e}^t\mathbf{v}_1\,, \qquad \text{tj.} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Podobně budeme postupovat pro druhé vlastní číslo $\lambda_2 = 2$. Když dosadíme $\lambda = 2$ do soustavy (7), dostaneme soustavu dvou lineárně závislých rovnic

$$\begin{aligned} -4v_1 + 2v_2 &= 0\,, \\ -6v_1 + 3v_2 &= 0\,, \end{aligned},$$

která má jedno lineárně nezávislé řešení

$$v_1 = 1\,, \quad v_2 = 2\,, \qquad \text{tj.} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Druhé lineárně nezávislé řešení dané soustavy diferenciálních rovnic je tedy

$$\mathbf{x}_2 = \mathrm{e}^{2t}\mathbf{v}_2\,, \qquad \text{tj.} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pomocí těchto dvou řešení lze napsat obecné řešení dané soustavy jako

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 \qquad \text{tj.} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{2t} \\ 3c_1\mathrm{e}^t + 2c_2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{neboli} \quad \begin{aligned} x_1 &= 2c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{2t}\,, \\ x_2 &= 3c_1\mathrm{e}^t + 2c_2\mathrm{e}^{2t}\,, \end{aligned}$$

kde c_1 a c_2 jsou konstanty. Ty lze určit z počátečních podmínek. Ty dávají soustavu

$$x_1(0) = 0 = 2c_1 + c_2\,, \quad x_2(0) = 1 = 3c_1 + 2c_2 \implies c_1 = -1\,, \quad c_2 = 2\,.$$

To znamená, že řešení dané Cauchyovy úlohy je

$$x_1(t) = -2\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{2t}\,, \quad x_2(t) = -3\mathrm{e}^t + 4\mathrm{e}^{2t}\,.$$

Má-li soustava (5) reálné koeficienty a je-li λ_1 kořen charakteristické rovnice, je také $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$ kořen charakteristické rovnice. Přitom vlastní vektory, které odpovídají vlastním hodnotám λ_1 a $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$ lze zvolit tak, aby byly komplexně sdružené, tj. aby platilo $\mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{v}}_1$, tj. složky vektoru $\mathbf{v}_2$ jsou komplexně sdružené ke složkám vektoru $\mathbf{v}_1$. Je-li $\lambda_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$, kde $\beta \neq 0$, vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{v}_1$ odpovídající vlastní vektor, lze předchozím postupem sestrojit dvě komplexní řešení

$$\mathbf{z}_1 = \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}\mathbf{v}_1\,, \qquad \mathbf{z}_2 = \overline{\mathbf{z}}_1 = \mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)t}\overline{\mathbf{v}}_1\,.$$

Místo komplexně sdružených řešení homogenní soustavy lze zvolit za prvky báze vektorového prostoru řešení homogenní rovnice reálná řešení, které jsou jejich lineární kombinací

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\mathbf{z}_1 + \overline{\mathbf{z}}_1}{2} = \operatorname{Re}\mathbf{z}_1\,, \qquad \mathbf{x}_2 = \frac{\mathbf{z}_1 - \overline{\mathbf{z}}_1}{2\mathrm{i}} = \operatorname{Im}\mathbf{z}_1\,.$$

Příklad. Najděte obecné řešení soustavy

$$x_1' = 2x_1 - 5x_2\,, \qquad x_2' = x_1 + 4x_2\,. \tag{10}$$

Řešení: Matice $\mathbf{A}$, která odpovídá soustavě (10) je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & -5 \\ 1, & 4 \end{pmatrix}.$$

Z ní dostaneme charakteristickou rovnici

$$P(\lambda) = \det\bigl(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\bigr) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda, & -5 \\ 1, & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0\,.$$

Ta má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda = 3 \pm 2\mathrm{i}$.
Vlastní vektor, který odpovídá vlastnímu číslu $\lambda = 3 + 2\mathrm{i}$, je řešením soustavy

$$\begin{pmatrix} -1-2\mathrm{i}, & -5 \\ 1, & 1-2\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{tj.} \quad \begin{aligned} -(1+2\mathrm{i})v_1 - \qquad 5v_2 &= 0\,, \\ v_1 + (1-2\mathrm{i})v_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Tyto rovnice jsou lineárně závislé a každé jejích řešení je násobkem nenulového vektoru

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pro vlastní hodnotu $\overline{\lambda} = 3 - 2\mathrm{i}$ bychom za vlastní vektor mohli zvolit

$$\overline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Místo dvou lineárně nezávislých komplexních řešení

$$\mathbf{z}_1(t) = \mathrm{e}^{(3+2\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{z}_2(t) = \overline{\mathbf{x}}_1 = \mathrm{e}^{(3-2\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix},$$

zvolíme dvě reálná řešení soustavy

$$\mathbf{x}_1(t) = \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{(3+2\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}\right), \qquad \mathbf{x}_2(t) = \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{(3+2\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Protože je

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{(3+2\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} &= \mathrm{e}^{3t}\big(\cos 2t + \mathrm{i}\sin 2t\big) \begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} = \\ &= \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} \cos 2t + 2\sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} \sin 2t - 2\cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

jsou dvě reálná řešení dané soustavy

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{(3+2\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} \cos 2t + 2\sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_2(t) &= \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{(3+2\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} \sin 2t - 2\cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obecné řešení soustavy (10) pak je $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t)$, tj.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1\mathrm{e}^{3t}\big(\cos 2t + 2\sin 2t\big) + c_2\mathrm{e}^{3t}\big(\sin 2t - 2\cos 2t\big)\,, \\ x_2(t) &= -c_1\mathrm{e}^{3t}\cos 2t - c_2\mathrm{e}^{3t}\sin 2t\,, \end{aligned}$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné (reálné) konstanty.

Protože charakteristický polynom má stupeň n, existuje n kořenů charakteristické rovnice, když budeme počítat jejich násobnosti. Různým charakteristickým číslům odpovídají lineárně nezávislé vlastní vektory, ale pro násobné kořeny charakteristické rovnice se může stát, že vlastních vektorů bude málo. Ve skutečnosti je pro vlastní číslo λ_1, které je kořenem charakteristické rovnice násobnosti k, počet lineárně nezávislých řešení soustavy

$$\big(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}\big)\mathbf{v} = 0$$

roven $r = n - h$, kde h je hodnost matice $\big(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}\big)$. V případě, že $r < k$ nenajdeme výše uvedeným způsobem n lineárně nezávislých řešení soustavy diferenciálních rovnic (5). Ukážeme, jak najít fundamentální systém řešení soustavy (5) v tomto případě.

V podstatě jde o to, že matici soustavy $\mathbf{A}$ převedeme na Jordanův kanonický tvar. Z algebry by mělo být známo, že pro vlastní číslo λ_r matice $\mathbf{A}$, kterému přísluší řetězec přidružených vektorů délky n_r, tj. $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_{n_r}$, pro které platí

$$\begin{array}{rcll}
\big(\mathbf{A} - \lambda_r \mathbf{I}\big)\mathbf{v}_1 = 0 & & \text{tj.} & \mathbf{v}_1 \text{ je vlastní vektor} \\
\big(\mathbf{A} - \lambda_r \mathbf{I}\big)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 & & \text{tj.} & \mathbf{v}_2 \text{ je přidružený vektor k vektoru } \mathbf{v}_r \\
\big(\mathbf{A} - \lambda_r \mathbf{I}\big)\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 & & \text{tj.} & \mathbf{v}_3 \text{ je přidružený vektor k vektoru } \mathbf{v}_2 \\
\dots & & \text{atd.} & \\
\big(\mathbf{A} - \lambda_r \mathbf{I}\big)\mathbf{v}_{n_r} = \mathbf{v}_{n_r-1} & & \text{tj.} & \mathbf{v}_{n_r} \text{ je přidružený vektor k vektoru } \mathbf{v}_{n_r-1}
\end{array}$$

lze sestrojit n_r lineárně nezávislých řešení

$$\mathbf{x}_k = \mathrm{e}^{\lambda_r t}\Big(\sum_{i=1}^{k} \frac{t^{k-i}}{(k-i)!}\,\mathbf{v}_i\Big), \tag{11}$$

kde $k = 1, 2, \dots, n_r$.

Příklad. Najděte fundamentální systém řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$x_1' = 2x_1 + x_2\,, \qquad x_2' = -x_1 + 4x_2\,. \tag{12}$$

Řešení: Charakteristická rovnice pro soustavu (12)

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda, & 1 \\ -1, & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

má jeden dvojnásobný kořen $\lambda_1 = 3$. Pro tuto vlastní hodnotu se soustava pro vlastní vektory redukuje na rovnici

$$-v_1 + v_2 = 0\,, \quad \text{tj. např. } v_1 = v_2 = 1\,, \Longrightarrow\ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dostali jsme tedy pouze jeden vlastní vektor a tedy pouze jedno řešení

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathrm{e}^{3t}\mathbf{v}_1 = \mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Protože $\lambda_1 = 3$ je dvojnásobný kořen charakteristické rovnice a odpovídá mu pouze jeden vlastní vektor, budeme k němu hledat přidružený vektor, tj. řešit soustavu

$$\big(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}\big)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1\,, \quad \text{tj. soustavu} \quad \begin{pmatrix} -1, & 1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

která má například řešení $v_1 = 0$ a $v_2 = 1$. Tedy za přidružený vektor lze zvolit

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podle (11) pak je druhé lineárně nezávislé řešení soustavy (12)

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathrm{e}^{3t}\big(\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_1\big) = \mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix} t \\ 1+t \end{pmatrix}.$$

Řešení nehomogenní soustavy – odhad řešení

Jestliže známe fundamentální systém řešení homogenní soustavy (4), tj. n lineárně nezávislých řešení $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, lze vždy vyjádřit řešení nehomogenní rovnice pomocí integrálů. Používá se k tomu *metoda variace konstant*, kterou se ale zabývat nebudeme.

Stejně jako pro diferenciální rovnice n–tého řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou lze i v případě soustav diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou odhadnout tvar řešení nehomogenní soustavy.

Uvažujme soustavu n lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty, tj. soustavu

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)\,, \tag{13}$$

kde $\mathbf{A}$ je konstantní matice typu $n \times n$.

Vektorovou funkci

$$\mathbf{P}_N(t) = \begin{pmatrix} P_{N_1}(t) \\ P_{N_2}(t) \\ \vdots \\ P_{N_n}(t) \end{pmatrix},$$

kde $P_{N_k}(t)$ jsou polynomy stupně N_k a $N = \max\big(N_1, N_2, \ldots, N_n\big)$, budeme nazývat *vektorovým polynomem* stupně N.

Jestliže má funkce $\mathbf{f}(t)$ v soustavě (13) tvar

$$\mathbf{f}(t) = \mathrm{e}^{\mu t}\mathbf{P}_N(t)\,,$$

kde $\mathbf{P}_N(t)$ je vektorový polynom stupně N, má nehomogenní soustava (13) řešení tvaru

$$\mathbf{x} = \mathrm{e}^{\mu t}\mathbf{Q}_{N+k}(t)\,,$$

kde $\mathbf{Q}_{N+k}(t)$ je polynom stupně $N+k$, kde k je násobnost kořene μ charakteristického polynomu (8), tj. platí

$$P(\mu) = P'(\mu) = \ldots = P^{(k-1)}(\mu) = 0 \quad \text{a} \quad P^{(k)}(\mu) \neq 0\,.$$

Příklad. Najděte obecné řešení soustavy

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + x_2 + 1 + 5\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{3t}\,, \\ x_2' &= 4x_1 - x_2 + 3t + 1 + \mathrm{e}^{t} + 4\mathrm{e}^{3t}\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Řešení: Charakteristický polynom je v tomto případě

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda, & 1 \\ 4, & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6$$

a charakteristická rovnice $P(\lambda) = 0$ má dva kořeny $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -2$.
Pro $\lambda_1 = 3$ dostaneme vlastní vektor

$$\big(\mathbf{A} - 3\lambda\big)\mathbf{v}_1 = 0\,, \quad \text{tj.} \quad -v_1 + v_2 = 0 \Longrightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_1(t) = \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pro $\lambda_2 = -2$ dostaneme vlastní vektor

$$\big(\mathbf{A} + 2\lambda\big)\mathbf{v}_2 = 0\,, \quad \text{tj.} \quad 4v_1 + v_2 = 0 \Longrightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_2(t) = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Obecné řešení homogenní rovnice tedy je

$$\mathbf{x}_H(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) \Longleftrightarrow \begin{aligned} x_1(t) &= c_1\mathrm{e}^{3t} - c_2\mathrm{e}^{-2t}\,, \\ x_2(t) &= c_1\mathrm{e}^{3t} + 4c_2\mathrm{e}^{-2t}\,. \end{aligned}$$

Protože se jedná o lineární soustavu, lze podle principu superpozice hledat řešení nehomogenní soustavy jako součet řešení čtyř soustav, která odpovídají různým exponenciálám, tj.

$$\mathbf{f}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3t+1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2(t) = \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3(t) = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_4(t) = \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Protože $\mathbf{f}_1(t) = \mathrm{e}^{0t}\mathbf{P}_1(t)$ a $P(0) = -6 \neq 0$, budeme hledat odpovídající řešení ve tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{0t}\mathbf{Q}_1(t)\,, \quad \text{tj.} \quad \begin{aligned} x_1 &= a_1t + b_1\,, \\ x_2 &= a_2t + b_2\,. \end{aligned}$$

po dosazení do soustavy (14) s pravou stranou $\mathbf{f}_1(t)$, dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} a_1 &= 2(a_1t + b_1) + (a_2t + b_2) + 1\,, \\ a_2 &= 4(a_1t + b_1) - (a_2t + b_2) + 3t + 1 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} 2a_1 + a_2 &= 0\,, \\ 4a_1 - a_2 &= -3\,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2b_1 + b_2 &= a_1 - 1\,, \\ 4b_1 - b_2 &= a_2 - 1\,, \end{aligned}$$

která má řešení $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{4}$ a $b_2 = -1$. Odpovídající řešení tedy je

$$x_1(t) = -\tfrac{1}{4}(2t + 1)\,, \qquad x_2(t) = t - 1\,.$$

Pro pravou stranu $\mathbf{f}_2(t) = \mathrm{e}^{t}\mathbf{P}_0$ je $P(1) = -6 \neq 0$, a proto budeme hledat řešení ve tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{t}\mathbf{Q}_0(t)\,, \quad \text{tj.} \quad x_1(t) = a_1\mathrm{e}^{t}\,, \quad x_2 = a_2\mathrm{e}^{t}\,.$$

Po dosazení do příslušné soustavy dostaneme soustavu

$$a_1 = 2a_1 + a_2\,, \qquad a_2 = 4a_1 - a_2 + 1\,,$$

která má řešení $a_1 = -\frac{1}{6}$, $a_2 = \frac{1}{6}$. Odpovídající řešení tedy je

$$x_1(t) = -\tfrac{1}{6}\,\mathrm{e}^t\,, \qquad x_2(t) = \tfrac{1}{6}\,\mathrm{e}^t\,.$$

Protože $\mathbf{f}_3(t) = \mathrm{e}^{-2t}\mathbf{P}_0(t)$ a $P(-2) = 0$ a $P'(-2) = -5 \neq 0$, je v tomto případě $k = 1$ a řešení budeme hledat ve tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{-2t}\mathbf{Q}_1(t) \quad \text{tj.} \quad x_1(t) = \mathrm{e}^{-2t}(a_1 t + b_1)\,, \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}(a_2 t + b_2)\,.$$

Po dosazení do příslušné nehomogenní soustavy dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -2(a_1 t + b_1) + a_1 &= 2(a_1 t + b_1) + (a_2 t + b_2) + 5, \\ -2(a_2 t + b_2) + a_2 &= 4(a_1 t + b_1) - (a_2 t + b_2), \end{aligned} \;\Leftrightarrow\; \begin{aligned} 4a_1 + a_2 &= 0\,, \quad 4b_1 + b_2 = a_1 - 5, \\ 4a_1 + a_2 &= 0\,, \quad 4b_1 + b_2 = a_2. \end{aligned}$$

To je soustava čtyř rovnic pro čtyři neznámé, ale rovnice jsou závislé. Z rovnic pro b_1 a b_2 plyne, že $a_1 - a_2 = 5$ a to spolu s rovnicí $4a_1 + a_2 = 0$ dává $a_1 = 1$, $a_2 = -4$. Pro b_1 a b_2 pak dostaneme pouze jednu rovnici $4b_1 + b_2 = -4$, která má řešení například $b_1 = -1$, $b_2 = 0$. Řešení nehomogenní soustavy pro pravou stranu $\mathbf{f}_3(t)$ tedy je

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{-2t}(t - 1)\,, \qquad x_2(t) = -4t\mathrm{e}^{-2t}\,.$$

Protože $\mathbf{f}_4(t) = \mathrm{e}^{3t}\mathbf{P}_0(t)$ a $P(3) = 0$ a $P'(3) = 5 \neq 0$, je $\mu = 3$ kořen charakteristické rovnice násobnosti 1. Tedy $k = 1$ a řešení budeme hledat ve tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{3t}\mathbf{Q}_1(t) \quad \text{tj.} \quad x_1(t) = \mathrm{e}^{3t}(a_1 t + b_1)\,, \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{3t}(a_2 t + b_2)\,.$$

Po dosazení do příslušné nehomogenní soustavy dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3(a_1 t + b_1) + a_1 &= 2(a_1 t + b_1) + (a_2 t + b_2) - 1\,, \\ 3(a_2 t + b_2) + b_2 &= 4(a_1 t + b_1) - (a_2 t + b_2) + 4\,, \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &= 0\,, & b_1 - b_2 &= -a_1 - 1\,, \\ 4a_1 - 4a_2 &= 0\,, & 4b_1 - 4b_2 &= a_2 - 4\,. \end{aligned}$$

To je soustava 4 rovnic, z nichž jsou ale pouze 3 lineárně nezávislé, Její řešení je například $a_1 = a_2 = b_1 = 0$ a $b_2 = 1$. Z toho dostaneme pro pravou stranu $\mathbf{f}_4(t)$ řešení nehomogenní soustavy

$$x_1(t) = 0\,, \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^{3t}\,.$$

Obecné řešení soustavy (14) pak je $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_H(t) + \mathbf{x}_N(t)$, neboli

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1\mathrm{e}^{3t} - c_2\mathrm{e}^{-2t} - \tfrac{1}{4}\,(2t + 1) - \tfrac{1}{6}\,\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-2t}(t - 1) \\ x_2(t) &= c_1\mathrm{e}^{3t} + 4c_2\mathrm{e}^{-2t} + t - 1 + \tfrac{1}{6}\,\mathrm{e}^t - 4t\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{3t}\,, \end{aligned}$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná čísla.

`Poznámka.` Z uvedeného příkladu je vidět, že pokud je μ kořen charakteristické rovnice, je v odhadovaném řešení zbytečně mnoho konstant. Proto je v takovém případě většinou výhodnější použít tzv. metodu eliminace, o které se zmíníme později.

Tvar řešení nehomogenní soustavy s konstantními koeficienty (13) lze odhadnout také v případě, že pravá strana má tvar

$$\mathbf{f}(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\big(\mathbf{P}_{N_1}(t)\cos\omega t + \mathbf{P}_{N_2}(t)\sin\omega t\big)\,,$$

kde $\mathbf{P}_{N_1}(t)$ a $\mathbf{P}_{N_2}(t)$ jsou vektorové polynomy stupně N_1 a N_2. Budeme předpokládat, že matice $\mathbf{A}$ je reálná. Pak je také charakteristický polynom $P(\lambda)$ reálný a jeho komplexní kořeny jsou sdružené.

V tomto případě existuje řešení nehomogenní soustavy, které má tvar

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\big(\mathbf{R}_{N+k}(t)\cos\omega t + \mathbf{S}_{N+k}(t)\sin\omega t\big)\,,$$

kde $\mathbf{R}_{N+k}(t)$ a $\mathbf{S}_{N+k}(t)$ jsou obecné polynomy stupně $N+k$, kde $N = \max(N_1, N_2)$ a k je násobnost kořene $\mu = \rho + \mathrm{i}\omega$ v charakteristickém polynomu $P(\lambda)$.

Příklad. Najděte jedno řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$x_1' = 3x_1 - x_2 + 3\mathrm{e}^{2t}\cos t\,, \qquad x_2' = -x_1 + 3x_2 + \mathrm{e}^{2t}\sin t\,. \tag{15}$$

Řešení: Charakteristický polynom je

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda, & -1 \\ -1, & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8\,.$$

Protože v (15) je $\mathbf{f}(t) = \mathrm{e}^{2t}\big(\mathbf{P}_0(t)\cos t + \mathbf{Q}_0(t)\sin t\big)$ a $P(2+\mathrm{i}) = -1 - 2\mathrm{i} \neq 0$, budeme hledat řešení ve tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{2t}\big(\mathbf{R}_0\cos t + \mathbf{S}_0\sin t\big) \iff \begin{array}{l} x_1(t) = \mathrm{e}^{2t}\big(a_1\cos t + b_1\sin t\big)\,, \\ x_2(t) = \mathrm{e}^{2t}\big(a_2\cos t + b_2\sin t\big)\,. \end{array}$$

Po dosazení pak dostaneme soustavu čtyř rovnic pro čtyři proměnné

$$a_1 - a_2 - b_1 = -3\,, \quad b_1 - b_2 + a_1 = 0\,, \quad -a_1 + a_2 - b_2 = 0\,, \quad -b_1 + b_2 + a_2 = -1\,,$$

která má řešení $a_1 = -1$, $b_1 = 2$, $a_2 = 0$, $b_2 = 1$. Jedno řešení soustavy (15) tedy je

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{2t}(2\sin t - \cos t)\,, \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^{2t}\sin t\,.$$

Příklad. Najděte jedno řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$x_1' = 4x_1 - 6x_2 + 2\mathrm{e}^{t}\sin 3t\,, \qquad x_2' = 3x_1 - 2x_2 + 4\mathrm{e}^{t}\cos 3t\,. \tag{16}$$

Řešení: Charakteristický polynom je

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda, & -6 \\ 3, & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 10\,.$$

Protože v (16) je $\mathbf{f}(t) = \mathrm{e}^{t}\big(\mathbf{P}_0(t)\cos 3t + \mathbf{Q}_0(t)\sin 3t\big)$ a $P(1+3\mathrm{i}) = 0$, je $k = 1$ a řešení budeme hledat ve tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{t}\big(\mathbf{R}_1(t)\cos 3t + \mathbf{S}_1(t)\sin 3t\big) \iff \begin{array}{l} x_1(t) = \mathrm{e}^{t}\big((a_1t + b_1)\cos 3t + (c_1t + d_1)\sin 3t\big)\,, \\ x_2(t) = \mathrm{e}^{t}\big((a_2t + b_2)\cos 3t + (c_2t + d_2)\sin 3t\big)\,. \end{array}$$

Po dosazení do (16) bychom získali soustavu osmi závislých rovnice pro osm neznámých. Proto je v takových případech výhodnější použít metodu eliminace.

Metoda eliminace

Jak jsme ukázali dříve, lze každou diferenciální rovnici n–tého řádu přepsat jako soustavu n diferenciálních rovnic prvního řádu. V některých případech lze naopak soustavu n diferenciálních rovnic prvního řádu převést na jednu diferenciální rovnici n–tého řádu. Tento postup, který se často nazývá *metoda eliminace*, popíšeme na příkladu soustavy tří rovnic prvního řádu

$$x_1' = f_1\big(t, x_1, x_2, x_3\big)\,, \qquad x_2' = f_2\big(t, x_1, x_2, x_3\big)\,, \qquad x_3' = f_3\big(t, x_1, x_2, x_3\big)\,. \tag{17}$$

Když derivujeme první rovnici v (17) podle t, dostaneme

$$x_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\, x_1' + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\, x_2' + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\, x_3'\,.$$

Po dosazení za první derivace z (17), získáme

$$x_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\, f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\, f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\, f_3 = F_2\big(t, x_1, x_2, x_3\big)\,.$$

Když aplikujeme na tuto rovnici stejný postup, dostaneme

$$x_1''' = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\, f_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\, f_2 + \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\, f_3 = F_3\big(t, x_1, x_2, x_3\big)\,.$$

Pokud se nám ze soustavy

$$x_1' = f_1\big(t, x_1, x_2, x_3\big)\,, \qquad x_1'' = F_2\big(t, x_1, x_2, x_3\big)$$

podaří najít

$$x_2 = g_2\big(t, x_1, x_1', x_1''\big)\,, \qquad x_3 = g_3\big(t, x_1, x_1', x_1''\big)\,,$$

dostaneme po dosazení do F_3 diferenciální rovnici třetího řádu pro x_1

$$x_1''' = F_3\big(t, x_1, g_2(t, x_1, x_1', x_1''), g_3(t, x_1, x_1', x_1'')\big)\,.$$

Příklad. Jako příklad najdeme metodou eliminacejedno řešení soustavy (16). Když derivujeme první rovnici v soustavě (16), dostaneme

$$x_1'' = 4x_1' - 6x_2' + 2\mathrm{e}^t \sin 3t + 6\mathrm{e}^t \cos 3t\,.$$

Nyní dosadíme za x_2' z druhé rovnice v (16) a dostaneme

$$\begin{aligned} x_1'' &= 4x_1' - 6\big(3x_1 - 2x_2 + 4\mathrm{e}^t \cos 3t\big) + 2\mathrm{e}^t \sin 3t + 6\mathrm{e}^t \cos 3t = \\ &= 4x_1' - 18x_1 + 12x_2 + 2\mathrm{e}^t \sin 3t - 18\mathrm{e}^t \cos 3t\,. \end{aligned}$$

Z první rovnice v (16) plyne, že

$$x_2 = \tfrac{1}{6}\big(4x_1 - x_1' + 2\mathrm{e}^t \sin 3t\big)\,. \tag{18}$$

Jestliže dosadíme toto vyjádření, získáme pro x_1 diferenciální rovnici druhého řádu

$$\begin{aligned} x_1'' &= 4x_1' - 18x_1 + 2\big(4x_1 - x_1' + 2\mathrm{e}^t \sin 3t\big) + 2\mathrm{e}^t \sin 3t - 18\mathrm{e}^t \cos 3t = \\ &= 2x_1' - 10x_1 + 6\mathrm{e}^t \sin 3t - 18\mathrm{e}^t \cos 3t\,, \end{aligned}$$

tj.

$$x_1'' - 2x_1' + 10x_1 = 6\mathrm{e}^t \sin 3t - 18\mathrm{e}^t \cos 3t\,. \tag{19}$$

Charakteristický polynom této rovnice $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 10$ je stejný jako charakteristický polynom soustavy (16). Protože $\mu = 1 + 3\mathrm{i}$ je kořen charakteristického polynomu, budeme hledat řešení nehomogenní rovnice (19) ve tvaru

$$x_1(t) = \mathrm{e}^t \big(a \cos 3t + b \sin 3t\big) \cdot t\,.$$

Protože

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \mathrm{e}^t \big((a+3b)\cos 3t + (b-3a)\sin 3t\big) \cdot t + \mathrm{e}^t \big(a \cos 3t + b \sin 3t\big)\,, \\ x_1''(t) &= \mathrm{e}^t \big((-8a+6b)\cos 3t - (6a+8b)\sin 3t\big) \cdot t + 2\mathrm{e}^t \big((a+3b)\cos 3t + (b-3a)\sin 3t\big), \end{aligned}$$

dostaneme po dosazení do (19)

$$6b = -18\,, \quad -6a = 6\,, \quad \text{tj.} \quad b = -3\,, \quad a = -1\,.$$

Tedy

$$x_1(t) = -t\mathrm{e}^t \big(\cos 3t + 3 \sin 3t\big)$$

a z (18) získáme

$$x_2(t) = t\mathrm{e}^t (\cos 3t - 2\sin 3t) + \tfrac{1}{6}\,\mathrm{e}^t (\cos 3t + 5 \sin 3t)\,.$$