Přednáška 2

Integrály racionálních funkcí

Osnova přednášky

1. Racionální funkce; příklad $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x + 4}{x^3 + 1}$

2. Dělení polynomu polynomem; příklad $\dfrac{x^4 + 2x + 4}{x^3 + 1} = x + \dfrac{x + 4}{x^3 + 1}$.

3. Rozklad polynomu na součin kořenových činitelů; příklad $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$.

4. Rozklad na parciální zlomky; příklad

$$\frac{x + 4}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{1}{x + 1} + \frac{-x + 3}{x^2 - x + 1}\,.$$

5. Integrály typu $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x - a)^n}$.

6. Rozklad integrálů

$$\int \frac{(ax + b)\,\mathrm{d}x}{(x^2 + px + q)^n} = \int \frac{\alpha(2x + p)\,\mathrm{d}x}{(x^2 + px + q)^n} + \int \frac{\beta\,\mathrm{d}x}{(x^2 + px + q)^n}\,.$$

Příklad

$$\int \frac{(x - 3)\,\mathrm{d}x}{x^2 - x + 1} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x - 1)\,\mathrm{d}x}{x^2 - x + 1} + \int \frac{-\frac{5}{2}\,\mathrm{d}x}{x^2 - x + 1}\,.$$

7. Výpočet integrálů typu $\displaystyle\int \frac{(2x + p)\,\mathrm{d}x}{(x^2 + px + q)^n}$; příklad

$$\int \frac{(2x - 1)\,\mathrm{d}x}{x^2 - x + 1} = \ln\bigl(x^2 - x + 1\bigr)\,.$$

8. Výpočet integrálů typu $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + px + q}$, kde $4q - p^2 > 0$; příklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}\,, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - x + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\,.$$

9. Výpočet integrálů typu $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + 1)^n}$.

10. Integrály typu $\int R(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$; příklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x} = \ln\left|\frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}\right|.$$

11. Integrály typu $\displaystyle\int \frac{R(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$; příklad

$$\int \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x\bigl(\ln^2 x + 2\ln x + 5\bigr)} = \ln\sqrt{\ln^2 x + 2\ln x + 5} - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\ln x + 1}{2}\,.$$

12. Integrály typu $\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$, kde

$$R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x) \qquad \text{nebo} \qquad R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)\,;$$

příklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \ln\bigl|\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x\bigr|\,.$$

13. Integrály typu $\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$, kde $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$; příklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x} = \ln\sqrt{\left|\frac{\mathrm{tg}\,x+1}{\mathrm{tg}\,x+3}\right|}\,.$$

14. Integrály typu $\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$, substituce $y = \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x$; příklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}\,.$$

15. Integrály typu $\int R\bigl(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\bigr)\,\mathrm{d}x$, Eulerovy substituce.

16. Substituce v integrálech typu

$$\int R\bigl(x, \sqrt{1-x^2}\bigr)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int R\bigl(x, \sqrt{x^2+1}\bigr)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int R\bigl(x, \sqrt{x^2-1}\bigr)\,\mathrm{d}x\,.$$

Při výpočtu integrálů se snažíme pomocí integrace per partes a substitucí převést na integrál, který známe nebo jej umíme spočítat. V podstatě jediné integrály, o kterých se ví, jak se počítají, jsou integrály racionálních funkcí, tj. funkcí tvaru

$$f(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}\,,$$

kde $Q_m(x)$, resp. $P_n(x)$, je reálný polynom stupně m, resp. n. V první části této přednášky uvedeme postup, který vede k výpočtu integrálů takového typu, tj. integrálů

$$\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}\,\mathrm{d}x\,. \tag{1}$$

Je-li stupeň polynomu v čitateli větší nebo roven stupni polynomu ve jmenovateli, tj. když je $m \geq n$, vydělíme částečně polynom $Q_m(x)$ polynomem $P_n(x)$, tj. napíšeme

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = S(x) + \frac{R_{\widehat{m}}(x)}{P_n(x)}\,,$$

kde $S(x)$ je polynom a stupeň polynomu $R_{\widehat{m}}(x)$, tj. $\widehat{m}$, je menší než stupeň polynomu $P_n(x)$. Integrál (1) pak je

$$\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}\,\mathrm{d}x = \int S(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{R_{\widehat{m}}(x)}{P_n(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

První integrál je integrál polynomu, a tedy jej umíme spočítat.

Budeme se zabývat výpočtem druhého integrálu. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že

$$P_n(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots + c_1 x + c_0 \,.$$

Mělo by být známo, že takový polynom lze zapsat ve tvaru

$$P_n(x) = (x-a_1)^{r_1}(x-a_2)^{r_2}\ldots(x-a_k)^{r_k}\big(x^2+p_1x+q_1\big)^{s_1}\ldots\big(x^2+p_\ell x+q_\ell\big)^{s_\ell}\,,$$

kde a_i, $i = 1, \ldots, k$, jsou všechny různé reálné kořeny polynomu $P_n(x)$, r_i je násobnost kořene a_i, kvadratické polynomy $x^2+p_jx+q_j$, $j = 1, \ldots, \ell$, jsou navzájem různé a nemají reálné kořeny.

Máme-li polynom $P_n(x)$ zapsán v tomto tvaru, rozložíme racionální funkci $\dfrac{R_m(x)}{P_n(x)}$, kde $m < n$, na tzv. *parciální zlomky*. Lze ukázat, že existují reálné konstanty $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ a $C_{i,j}$ takové, že

$$\begin{aligned}
\frac{R_m(x)}{P_n(x)} &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r_i}\frac{A_{i,j}}{(x-a_i)^j} + \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{s_i}\frac{B_{i,j}x+C_{i,j}}{(x^2+p_ix+q_i)^j} = \\
&= \frac{A_{1,1}}{x-a_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1,r_1}}{(x-a_1)^{r_1}} + \\
&\quad + \frac{A_{2,1}}{x-a_2} + \frac{A_{2,2}}{(x-a_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2,r_2}}{(x-a_2)^{r_2}} + \\
&\quad + \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad + \\
&\quad + \frac{A_{k,1}}{x-a_k} + \frac{A_{k,2}}{(x-a_k)^2} + \ldots + \frac{A_{k,r_k}}{(x-a_k)^{r_k}} + \\
&\quad + \frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_{1,2}x+C_{1,2}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots + \frac{B_{1,s_1}x+C_{1,s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \\
&\quad + \frac{B_{2,1}x+C_{2,1}}{x^2+p_2x+q_2} + \frac{B_{2,2}x+C_{2,2}}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + \ldots + \frac{B_{2s_2}x+C_{2s_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}} + \\
&\quad + \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad + \\
&\quad + \frac{B_{\ell,1}x+C_{\ell,1}}{x^2+p_\ell x+q_\ell} + \frac{B_{\ell,2}x+C_{\ell,2}}{(x^2+p_\ell x+q_\ell)^2} + \ldots + \frac{B_{\ell,s_\ell}x+C_{\ell,s_\ell}}{(x^2+p_\ell x+q_\ell)^{s_\ell}}\,.
\end{aligned}$$

Proto nám stačí najít integrály typu

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} \qquad \text{a} \qquad \int\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x\,.$$

První integrál je až na lineární substituci tabulkový integrál a platí

$$\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} &= -\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{(x-a)^{n-1}} \quad \text{pro} \quad n\neq 1\,,\\
\int\frac{\mathrm{d}x}{x-a} &= \ln|x-a|\,.
\end{aligned}$$

Integrály s kvadratickými polynomy ve jmenovateli se počítají ve dvou krocích. Protože $\big(x^2+px+q\big)' = 2x+p$, napíšeme

$$\frac{ax+b}{\big(x^2+px+q\big)^n} = \frac{a}{2}\,\frac{2x+p}{\big(x^2+px+q\big)^n} + \frac{b-\frac{1}{2}ap}{\big(x^2+px+q\big)^n}\,.$$

Pak je

$$\int \frac{ax+b}{\big(x^2+px+q\big)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{\big(x^2+px+q\big)^n}\,\mathrm{d}x + \big(b-\tfrac{1}{2}ap\big)\int \frac{\mathrm{d}x}{\big(x^2+px+q\big)^n}\,.$$

V prvním integrálu zavedeme $y = x^2+px+q$ a dostaneme

$$\int \frac{2x+p}{\big(x^2+px+q\big)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{y^n}\,,$$

což je známý integrál.

Zbývá nám tedy najít integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\big(x^2+px+q\big)^n}\,.$$

Napíšeme

$$x^2+px+q = \big(x+\tfrac{1}{2}p\big)^2 + q - \tfrac{1}{4}\,p^2\,.$$

Protože jsme předpokládali, že polynom x^2+px+q nemá reálný kořen, je $q-\frac{1}{4}p^2 > 0$. Když zavedeme substituci

$$x+\tfrac{1}{2}p = \sqrt{q-\tfrac{1}{4}p^2}\,y\,,$$

dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\big(x^2+px+q\big)^n} = \big(q-\tfrac{1}{4}p^2\big)^{1/2-n}\int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+1)^n}\,.$$

Pro $n=1$ je poslední integrál

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \operatorname{arctg} y\,.$$

Zbývá ještě najít integrály tvaru

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} \quad \text{pro} \quad n \ge 2\,. \tag{2}$$

Tyto integrály lze najít integrací per partes. Pomocí ní dostaneme pro $n \ge 1$

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n+1}} = \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} - 2n\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n+1}} \\
I_n &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}\,.
\end{aligned}$$

Z poslední rovnice pak plyne, že pro $n \geq 1$ je

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n\,. \tag{3}$$

Pomocí tohoto vztahu pak lze v integrálu (2) postupně snižovat index n tak dlouho, až dostaneme známý integrál I_1.

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{x^4+2x+4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Jedná se o integrál z racionální funkce. Protože je stupeň polynomu ve čitateli větší než stupeň polynomu jmenovateli nejprve oba polynomy vydělíme. Protože

$$\frac{x^4+2x+4}{x^3+1} = x + \frac{x+4}{x^3+1}\,,$$

dostaneme

$$\int \frac{x^4+2x+4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x + \int \frac{x+4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x+4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Polynom ve jmenovateli rozložíme na součin

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)\,.$$

Zlomek v posledním integrálu rozložíme na parciální zlomky, tj. budeme hledat reálná čísla A, B a C tak, aby platilo

$$\frac{x+4}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}\,.$$

Jestliže tento vztah vynásobíme nejmenším společným jmenovatelem $(x+1)(x^2-x+1)$, dostaneme vztah

$$x+4 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)\,, \tag{4}$$

který musí platit pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Speciálně pro $x=-1$ získáme $3 = 3A$, tj. $A=1$.

Když napíšeme rovnost (4) ve tvaru

$$x+4 = (A+B)x^2 + (-A+B+C)x + A + C$$

a srovnáme členy u stejných mocnin x, dostaneme pro čísla A, B a C soustavu rovnic

$$A+B=0\,, \qquad -A+B+C=1\,, \qquad A+C=4\,.$$

A protože víme, že $A=1$, dostaneme z prvního a třetího vztahu $B=-1$ a $C=3$. Pokud to není moc pracné, je dobré se přesvědčit, že je splněn i druhý vztah.

Tedy pro každé x platí

$$\frac{x+4}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{-x+3}{x^2-x+1}\,,$$

a proto je

$$\int \frac{(x+4)\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \int \frac{x-3}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x+1| - \int \frac{x-3}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Protože $\bigl(x^2-x+1\bigr)' = 2x-1$, rozložíme poslední integrál na dva členy

$$\int \frac{x-3}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-1)\,\mathrm{d}x}{x^2-x+1} - \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}\,.$$

V prvním integrálu zavedeme novou proměnnou $y = x^2-x+1$, a protože $\mathrm{d}y = (2x-1)\,\mathrm{d}x$, dostaneme

$$\int \frac{x-3}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{y} - \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\ln|y| - \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} =$$
$$= \ln\sqrt{x^2-x+1} - \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}\,.$$

Zatím jsme dostali

$$\int \frac{x^4+2x+4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \ln|x+1| - \ln\sqrt{x^2-x+1} + \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} =$$
$$= \frac{x^2}{2} + \ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}\,.$$

Jmenovatel v posledním integrálu je $x^2-x+1 = \bigl(x-\frac{1}{2}\bigr)^2 + \frac{3}{4}$. Po substituci $x - \frac{1}{2} = y$ dostaneme z integrálu

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2y}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\,,$$

kde jsme využili vztah

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,, \tag{5}$$

který jsme odvodili v předchozí přednášce.

Celkově tedy

$$\int \frac{x^4+2x+4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\,.$$

Substituce, které vedou na integrály z racionálních funkcí

Uvedeme nějaké známé substituce, které převádějí jisté typy integrálů na integrály z racionální funkce. Je ovšem třeba poznamenat, že tyto obecné substituce vedou na poměrně složité racionální funkce, jejichž integrace je pracná. Proto se při výpočtu konkrétních integrálů často používají i jiné substituce.

Integrály typu $\displaystyle\int R\biggl(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\biggr)\,\mathrm{d}x$, kde $R(x,y)$ je racionální funkce proměnných x a y, tj. podíl polynomů dvou proměnných x a y. Budeme předpokládat, že $ad-bc \neq 0$. V opačném případě je $\dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{a}{c}$.

Integrály tohoto typu převedeme na integrál racionální funkce substitucí

$$\frac{ax+b}{cx+d} = y^n .$$

Pak je

$$x = \frac{dy^n - b}{a - cy^n}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{n(ad-bc)y^{n-1}}{\bigl(cy^n - a\bigr)^2}\,\mathrm{d}y .$$

Příklad: Jako příklad najdeme pomocí této substituce integrál

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int (1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x .$$

Řešení: Zavedeme novou proměnnou $y^2 = \dfrac{1-x}{1+x}$. Pak dostaneme

$$x = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \qquad 1+x = \frac{2}{1+y^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{-4y\,\mathrm{d}y}{(1+y^2)^2} .$$

Po dosazení získáme integrál

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -8\int \frac{y^2}{(1+y^2)^3}\,\mathrm{d}y = -8\int \frac{y^2+1-1}{(1+y^2)^3}\,\mathrm{d}y = 8\bigl(I_3(y) - I_2(y)\bigr) ,$$

kde integrály I_2 a I_3 jsou dány v (2). Pomocí (3) postupně dostaneme

$$\begin{aligned} 8\bigl(I_3(y) - I_2(y)\bigr) &= \frac{2y}{(1+y^2)^2} - 2I_2(y) = \frac{2y}{(1+y^2)^2} - \frac{y}{1+y^2} - I_1(y) = \\ &= \frac{2y}{(1+y^2)^2} - \frac{y}{1+y^2} - \operatorname{arctg} y . \end{aligned}$$

Jestliže se vrátíme k proměnné x, dostaneme

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x\sqrt{1-x^2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} .$$

Integrály typu $\int R\bigl(\mathrm{e}^x\bigr)\,\mathrm{d}x$, kde $R(y)$ je racionální funkce proměnné y, převedeme na integrál z racionální funkce substitucí $y = \mathrm{e}^x$. Pak je

$$\mathrm{d}y = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \implies \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} .$$

Příklad: Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x}$.

Řešení: Podle definice je funkce $\sinh x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$. Proto je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \int \frac{2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x} - 1} .$$

Po substituci $y = \mathrm{e}^x$ dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}y}{y^2-1} = \int \Bigl(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\Bigr)\,\mathrm{d}y = \ln|y-1| - \ln|y+1| = \ln\Bigl|\frac{y-1}{y+1}\Bigr| =$$
$$= \ln\Bigl|\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\Bigr| = \ln\Bigl|\frac{\mathrm{e}^{x/2}-\mathrm{e}^{-x/2}}{\mathrm{e}^{x/2}+\mathrm{e}^{-x/2}}\Bigr| = \ln\Bigl|\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\Bigr|.$$

Integrály typu $\displaystyle\int R\bigl(\ln x\bigr)\frac{\mathrm{d}x}{x}$, kde $R(y)$ je racionální funkce proměnné y, převedeme na integrál z racionální funkce substitucí $y = \ln x$. Pak je

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x} \implies \int R\bigl(\ln x\bigr)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int R(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Příklad: Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x\bigl(\ln^2 x + 2\ln x + 5\bigr)}$.

Řešení: Substituce $y = \ln x$ vede k integrálu

$$\int \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x\bigl(\ln^2 x + 2\ln x + 5\bigr)} = \int \frac{y\,\mathrm{d}y}{y^2+2y+5}\,,$$

což je integrál z racionální funkce. Protože $\bigl(y^2+2y+5\bigr)' = 2y+2$, napíšeme integrál ve tvaru

$$\int \frac{y\,\mathrm{d}y}{y^2+2y+5} = \frac{1}{2}\int \frac{2y+2}{y^2+2y+5}\,\mathrm{d}y - \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+2y+5}\,.$$

V prvním integrálu použijeme substituci $y^2+2y+5 = z$ a dostaneme

$$\frac{1}{2}\int \frac{2y+2}{y^2+2y+5}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\ln|z|}{2} = \ln\sqrt{y^2+2y+5}\,.$$

Ve druhém integrálu napíšeme $y^2+2y+5 = (y+1)^2+4$ a když použijeme (5), dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+2y+5} = \int \frac{\mathrm{d}y}{(y+1)^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y+1}{2}\,.$$

Celkově tedy

$$\int \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x\bigl(\ln^2 x + 2\ln x + 5\bigr)} = \ln\sqrt{\ln^2 x + 2\ln x + 5} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\ln x + 1}{2}\,.$$

Integrály typu $\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$, kde $R(x,y)$ je racionální funkce dvou proměnných, lze převést na integrál racionální funkce substitucí $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Tato substituce je ale příliš obecná a používá se pouze tehdy, když je to nevyhnutelné. Má-li funkce $R(\cos x, \sin x)$ určité vlastnosti, je výhodnější použít jiné substituce.

Jestliže platí $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, tj. když změníme znaménko funkce $\cos x$, změní se znaménko integrované funkce, používá se substituce $\sin x = y$. Důvod je ten, že v tomto případě má funkce $R(\cos x, \sin x)$ tvar

$$R(\cos x, \sin x) = S\big(\cos^2 x, \sin x\big) \cos x = S\big(1 - \sin^2 x, \sin x\big) \cos x$$

a $\mathrm{d}y = \mathrm{d}(\sin x) = \cos x \,\mathrm{d}x$.

Podobně když je $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, tj. když změníme znaménko funkce $\sin x$, změní se znaménko integrované funkce, používá se substituce $\cos x = y$, protože

$$R(\cos x, \sin x) = T\big(\cos x, \sin^2 x\big) \sin x = T\big(\cos x, 1 - \cos^2 x\big) \sin x$$

a $\mathrm{d}y = \mathrm{d}(\cos x) = -\sin x \,\mathrm{d}x$.

Příklad: Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

Řešení: Protože můžeme psát

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\sin x \,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x \,\mathrm{d}x}{1 - \cos^2 x},$$

je výhodné použít substituci $\cos x = y$. Po dosazení pak dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} &= \int \frac{-\mathrm{d}y}{1 - y^2} = -\frac{1}{2} \int \Big(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y} \Big) \mathrm{d}y = -\tfrac{1}{2}\big(\ln|1+y| - \ln|1-y|\big) = \\ &= \ln \sqrt{\Big|\frac{1-y}{1+y}\Big|} = \ln \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \ln\Big|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\Big|. \end{aligned}$$

Jestliže platí $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$, tj. když současně změníme znaménko obou funkcí $\cos x$ i $\sin x$, nezmění se integrovaná funkce, lze použít substituci $\operatorname{tg} x = y$. Funkce s takovou vlastností jsou vlastně funkce proměnných $\cos^2 x$, $\cos x \sin x$ a $\sin^2 x$. Substituci $y = \operatorname{tg} x$ lze použít, protože platí

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}, \\ \cos x \sin x &= \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{y}{1+y^2}, \\ \sin^2 x &= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{y^2}{1+y^2} \\ \mathrm{d}y &= \mathrm{d}\big(\operatorname{tg} x\big) = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \implies \mathrm{d}x = \cos^2 x \,\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}. \end{aligned}$$

Příklad: Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x}$.

Řešení: V tomto integrálu je výhodné zavést novou proměnnou $y = \operatorname{tg} x$. To je vidět například tehdy, když napíšeme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x + 3} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}.$$

Po substituci dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+4y+3} = \int \frac{\mathrm{d}y}{(y+1)(y+3)} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \Big(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+3}\Big)\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}\big(\ln|y+1| - \ln|y+3|\big) = \ln\sqrt{\left|\frac{y+1}{y+3}\right|} =$$
$$= \ln\sqrt{\left|\frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x + 3}\right|} = \ln\sqrt{\left|\frac{\sin x + \cos x}{\sin x + 3\cos x}\right|}\,.$$

Nemá-li funkce $R(\cos x, \sin x)$ žádnou z výše zmíněných vlastností, lze nejprve zavést proměnnou $t = \frac{1}{2}x$, tj. $x = 2t$. Protože $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$ a $\sin 2t = 2\sin t\cos t$, je

$$R(\cos x, \sin x) = R\big(\cos^2 t - \sin^2 t, 2\cos t\sin t\big) = S(\cos t, \sin t)\,.$$

Proto je $S(-\cos t, -\sin t) = S(\cos t, \sin t)$ a lze použít substituci $y = \operatorname{tg} t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Příklad: Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x}$.

Řešení: Když zavedeme proměnnou t vztahem $x = 2t$, dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-\sin 2t} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-2\sin t\cos t} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t + \sin^2 t - 2\sin t\cos t}\,.$$

Když v tomto integrálu položíme $y = \operatorname{tg} t$, dostaneme po úpravě integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}y}{(1-y)^2} = \frac{2}{1-y} = \frac{2}{1-\operatorname{tg}\big(\frac{1}{2}x\big)} =$$
$$= \frac{2\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x} - \sqrt{1-\cos x}} = \frac{1+\cos x + \sin x}{\cos x}$$

neboli $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$, kde jsme vynechali pro neurčitý integrál nepodstatnou konstantu $\frac{\cos x}{\cos x} = 1$.

Integrály typu $\int R\big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\big)\,\mathrm{d}x$, kde $R(x,y)$ je racionální funkce dvou proměnných a $a \neq 0$. Cílem substitucí je odstranit odmocninu kvadratického výrazu. K tomu se používají různé metody.

Obecně lze použít tzv. *Eulerovy substituce*:

1. Má-li kvadratický polynom ax^2+bx+c reálné kořeny, používá se úprava

$$\sqrt{(x-a)(x-b)} = (x-b)\sqrt{\frac{x-a}{x-b}} \quad \text{a} \quad \frac{x-a}{x-b} = y^2\,.$$

Tuto substituci jsme použili v jednom z předcházejících příkladů.

2. Je-li $a > 0$, položíme $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x - y$. Po umocnění dostaneme

$$ax^2+bx+c = ax^2 - 2\sqrt{a}\,xy + y^2 \implies x = \frac{y^2-c}{2\sqrt{a}\,y+b}\,.$$

Odmocninu pak dostaneme ze vztahu

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x - y = \frac{\sqrt{a}\,(y^2-c)}{2\sqrt{a}\,y+b} - y\,.$$

3. Je-li $c > 0$, můžeme položit $\sqrt{ax^2+bx+c} = xy - \sqrt{c}$. Po umocnění získáme

$$ax^2+bx+c = x^2y^2 - 2\sqrt{c}\,xy + c \implies x = \frac{2\sqrt{c}\,y+b}{y^2-a}$$

a stejně jako dříve, dostaneme pro odmocninu

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{2\sqrt{c}\,y+b}{y^2-a}\,y - \sqrt{c}\,.$$

Eulerovy substituce vedou sice k integrálům z racionálních funkcí, ale vzniklé racionální funkce jsou většinou poměrně složité. Proto se odmocnin z kvadratických výrazu při integraci pokoušíme často zbavit jiným způsobem.

Protože platí

$$x^2+bx+c = \left(x+\tfrac{1}{2}b\right)^2 + c - \tfrac{1}{4}\,b^2\,,$$

lze lineární substitucí převést odmocninu z kvadratického polynomu na jeden z výrazů $\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{x^2-1}$ nebo $\sqrt{1+x^2}$.

V integrálu $\int R\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)\,\mathrm{d}x$ se lze odmocniny zbavit substitucí $x = \sin t$. Pak je

$$x = \sin t\,, \qquad \sqrt{1-x^2} = \cos t$$

a integrál vede na integraci racionální funkce v proměnných $\sin t$ a $\cos t$, kterým jsme se zabývali dříve.

V integrálu $\int R\left(x, \sqrt{x^2-1}\right)\,\mathrm{d}x$ lze k odstranění odmocniny použít vztah $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, tj. $\cosh^2 - 1 = \sinh^2 t$. Po substituci $x = \cosh t$ pak dostaneme $\sqrt{x^2-1} = \sinh t$. Protože podle definice je

$$\cosh t = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\,, \qquad \sinh t = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\,,$$

dostaneme integrál racionální funkce v proměnné e^t. Od proměnné t k proměnné x se vrátíme pomocí vztahu $\mathrm{e}^t = x + \sqrt{x^2-1}$.

Jiná možnost je položit $x = \dfrac{1}{\cos t}$. Pak je

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}} = \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \operatorname{tg} t$$

a dostaneme integrál racionální funkce proměnných $\cos t$ a $\sin t$, který jsme vyšetřovali dříve.

V integrálu $\int R\bigl(x, \sqrt{1+x^2}\bigr)\,\mathrm{d}x$ se lze odmocniny zbavit podobně jako v předcházejícím případě substitucí $x = \sinh t$. Pak je $\sqrt{1+x^2} = \cosh t$ a pro inverzní transformaci dostaneme $\mathrm{e}^t = x + \sqrt{x^2+1}$.

Jiná možnost je položit $x = \operatorname{tg} t$. Pak dostaneme

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} = \sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{1}{\cos t}$$

a integrál převedeme na integrál racionální funkce proměnných $\cos t$ a $\sin t$, který jsme vyšetřovali dříve.