Přednáška 3

Riemannův integrál

Osnova přadnášky

1. Hlavní myšlenka konstrukce Riemannova integrálu v $\mathbb{R}^3$.

2. Definice Riemannova integrálu přes interval v $\mathbb{R}^n$.

3. Riemannův integrál přes množinu $M \subset \mathbb{R}^n$.

4. Linearita Riemannova integrálu.

5. Nezáporná a nekladná část funkce $f(\mathbf{x})$,

6. Riemannovsky měřitelné množiny a jejich míra.

7. Algebra Riemannovsky měřitelných množin.

8. Množiny míry nula a jejich význam v teorii integrálu.

9. Integrál přes sjednocení množin.

Existuje několik definic integrálu. V přednášce budeme definovat tzv. *Riemannův integrál*, protože má velmi názornou geometrickou interpretaci. V matematice se ale většinou používá tzv. *Lebesgueův integrál*, který má mezi jinými integrály podobnou vlastnost úplnosti, jako mají reálná čísla mezi racionálními čísly (limita posloupnosti racionálních čísel může být reálné číslo) a je definován pro největší množinu funkcí. Lebesgueovým integrálem se zabývat nebudeme, protože by jeho zavedení vyžadovalo mnohem více času. Při praktických výpočtech integrálu se používá tzv. *Newtonův integrál*, což je integrál přes intervaly v $\mathbb{R}$. Různé definice integrálů se liší hlavně tím, že je lze definovat pro různé třídy funkcí a množin, přes které integrujeme. Obecně platí, že pokud jsou integrály definovány v různých teoriích integrálu, navzájem se rovnají.

Hlavní myšlenka konstrukce Riemannova integrálu v $\mathbb{R}^3$

Podstata konstrukce Riemannova integrálu je stejná pro všechny dimenze. Proto se ji pokusíme vysvětlit na příkladě tělesa $\mathcal{V}$ v $\mathbb{R}^3$, tj. v obyčejném trojrozměrném prostoru, který se nejčastěji vyskytuje v aplikacích.

Těleso $\mathcal{V}$ rozdělíme na konečný počet nepřekrývajících se malých těles $\mathcal{V}_i$, pro která umíme spočítat objem ΔV_i, a takové rozdělení označíme $\mathcal{D}$. Nyní záleží na tom, co chceme spočítat. Jestliže chceme spočítat například hmotnost celého tělesa, spočítáme hmotnost všech malých těles $\mathcal{V}_i$, která je $\Delta m_i = \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$, kde $\rho(x_i, y_i, z_i)$ je hustota v nějakém bodě $(x_i, y_i, z_i) \in \mathcal{V}_i$, jestliže počítáme například moment setrvačnosti vzhledem k ose z, spočítáme moment setrvačnosti vzhledem k ose z pro každé malé těleso $\mathcal{V}_i$, který je (možná znám z fyziky) $\Delta J_i = \rho(x_i, y_i, z_i)\,(x_i^2 + y_i^2)\Delta V_i$, kde bod (x_i, y_i, z_i) leží ve $\mathcal{V}_i$.

Obecně spočítáme pro každé malé těleso $\mathcal{V}_i$ hodnotu výrazu $f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$, kde bod $(x_i, y_i, z_i) \in \mathcal{V}_i$. Pro dané rozdělení $\mathcal{D}$ najdeme součet

$$S_{\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i\,. \tag{1}$$

Tento součet závisí na tom, jak jsme těleso $\mathcal{V}$ rozdělili a jak jsme vybrali body $(x_i, y_i, y_i) \in \mathcal{V}_i$. Označíme $|\mathcal{D}| = \max\bigl(\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n\bigr)$ objem největšího kousku, na který jsme těleso $\mathcal{V}$ rozdělili, a ve výrazu (1) přejdeme jistým způsobem k "limitě $|\mathcal{D}| \to 0$". Tuto limitu označíme

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

a budeme ji nazývat Riemannův integrál funkce $f(x,y,z)$ přes těleso $\mathcal{V}$. Problém je v tom, že musíme zajistit, aby limita nezávisela na rozdělení tělesa $\mathcal{V}$ a na výběru bodu $(x_i, y_i, y_i) \in \mathcal{V}_i$.

V této přednášce se budeme zabývat touto konstrukcí pro funkce n reálných proměnných. V nejjednodušším případě funkce jedné reálné proměnné $f(x)$, bude těleso $\mathcal{V}$ interval $\mathcal{I} = \langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$. Jestliže je funkce $y = f(x)$ nezáporná, budeme vlastně počítat obsah oblasti v rovině omezené osou x, tj. přímkou $y = 0$, křivkou $y = f(x)$ a přímkami $x = a$ a $x = b$. Jde-li o funkci dvou proměnných $z = f(x,y)$, bude množina $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$, v jednoduchém případě obdélník $\mathcal{O} = \langle a_1, a_2\rangle \times \langle b_1, b_2\rangle$, a je-li $f(x,y) \geq 0$, budeme geometricky počítat objem tělesa $\mathcal{T} = \bigl\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ 0 \leq z \leq f(x,y)\,;\ (x,y) \in \mathcal{V}\bigr\}$.

`Poznámka.` Při konstrukci Riemannova integrálu v $\mathbb{R}$ se dělí množina $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ na malé intervaly délky Δx_i. Proto se pro Riemannův integrál funkce jedné proměnné používá značka

$$\int_{\mathcal{M}} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Při konstrukci Riemannova integrálu v rovině $\mathbb{R}^2$ se dělí množina $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$ na malé obdélníčky se stranami délky Δx_i a Δy_i. Jejich plocha je $\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$. Proto se pro integrál v rovině někdy používá označení

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x,y)\,\mathrm{d}S = \iint_{\mathcal{S}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Při konstrukci Riemannova integrálu v $\mathbb{R}^3$ se těleso $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ dělí na malé kvádry se stranami délky Δx_i, Δy_i a Δz_i. Jejich objem pak je $\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ a pro integrál v prostoru $\mathbb{R}^3$ se používá označení

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Definice Riemannova integrálu v $\mathbb{R}^n$

Nechť je dán omezený interval

$$\mathcal{I} = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \ldots \times \langle a_n, b_n\rangle \subset \mathbb{R}^n\,, \tag{2}$$

kde $a_i < b_i$ pro každé $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Definice. Každou množinu čísel $x_i^{(r)}$, kde $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ a $r = 0,\ 1,\ \ldots,\ N_i$, pro kterou platí

$$a_i = x_i^{(0)} < x_i^{(1)} < x_i^{(2)} < \ldots < x_i^{(N_i)} = b_i\,,$$

nazveme *dělení* intervalu (2) a budeme ji značit $\mathcal{D}$. Množinu všech dělení intervalu $\mathcal{I}$ označíme $\mathfrak{D}$.

Pro každé dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\mathcal{I}$ budeme psát

$$\mathcal{I}_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = \left\langle x_1^{(i_1-1)}, x_1^{(i_1)} \right\rangle \times \left\langle x_2^{(i_2-1)}, x_2^{(i_2)} \right\rangle \times \ldots \times \left\langle x_n^{(i_n-1)}, x_n^{(i_n)} \right\rangle$$

a označíme

$$\Delta_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = \left(x_1^{(i_1)} - x_1^{(i_1-1)}\right)\left(x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_2-1)}\right) \ldots \left(x_n^{(i_n)} - x_n^{(i_n-1)}\right)$$

n–rozměrný objem intervalu $\mathcal{I}_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$.

Nechť je $f(\mathbf{x})$ omezená reálná funkce definovaná na intervalu $\mathcal{I}$. Pro každé dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\mathcal{I}$ označíme

$$m_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = \inf_{\mathbf{x}\in\mathcal{I}_{i_1,i_2,\ldots,i_n}} f(\mathbf{x}) \quad \text{a} \quad M_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = \sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{I}_{i_1,i_2,\ldots,i_n}} f(\mathbf{x})$$

a definujeme

$$\begin{aligned} s(f,\mathcal{D}) &= \sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2} \ldots \sum_{i_n=1}^{N_n} m_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\Delta_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\,, \\ S(f,\mathcal{D}) &= \sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2} \ldots \sum_{i_n=1}^{N_n} M_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\Delta_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\,. \end{aligned}$$

Čísla $s(f,\mathcal{D})$, resp. $S(f,\mathcal{D})$, se nazývají dolní, resp. *horní, Riemannův součet* funkce $f(\mathbf{x})$ příslušný k dělení $\mathcal{D}$.

Protože je funkce $f(\mathbf{x})$ na $\mathcal{I}$ omezená, existují reálná čísla $m = \inf\limits_{\mathbf{x}\in\mathcal{I}} f(\mathbf{x})$ a $M = \sup\limits_{\mathbf{x}\in\mathcal{I}} f(\mathbf{x})$. Ze zřejmé nerovnosti $m \le m_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \le M_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \le M$ plyne, že pro každé dělení $\mathcal{D}$ platí

$$mV \le s(f,\mathcal{D}) \le S(f,\mathcal{D}) \le MV\,, \tag{3}$$

kde $V = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_n - a_n)$ je n–rozměrný objem intervalu $\mathcal{I}$.

Z nerovnosti (3) vidíme, že množina $\left\{s(f,\mathcal{D})\,;\ \mathcal{D} \in \mathfrak{D}\right\}$ je shora omezená číslem MV a množina $\left\{S(f,\mathcal{D})\,;\ \mathcal{D} \in \mathfrak{D}\right\}$ je zdola omezená číslem mV. Proto existují reálná čísla

$$s(f) = \sup_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} s(f,\mathcal{D}) \quad \text{a} \quad S(f) = \inf_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} S(f,\mathcal{D})\,. \tag{4}$$

Čísla $s(f)$, resp. $S(f)$, se nazývají *dolní*, resp. *horní, Riemannův integrál* funkce $f(\mathbf{x})$ přes interval $\mathcal{I}$.

Z nerovnosti (3) plyne, že pro dolní a horní Riemannův integrál platí nerovnost

$$mV \le s(f) \le S(f) \le MV\,.$$

Definice. Nechť je $\mathcal{I}$ omezený interval (2) a $f(\mathbf{x})$ omezená funkce definovaná na $\mathcal{I}$. Jestliže platí rovnost $s(f) = S(f)$, říkáme, že je funkce $f(\mathbf{x})$ *integrovatelná* (v Riemannově smyslu) na intervalu $\mathcal{I}$ a číslo $S(f) = s(f)$ nazýváme *integrál* (Riemannův) funkce $f(\mathbf{x})$ přes interval $\mathcal{I}$.

Integrál funkce $f(\mathbf{x})$ přes interval $\mathcal{I}$ budeme značit $\displaystyle\int_{\mathcal{I}} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n$.

`Poznámka.` I v případě funkce jedné proměnné existují funkce, které nejsou Riemannovsky integrovatelné. Známý je příklad tzv. Dirichletovy funkce

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \text{ racionální}\,, \\ 0 & \text{pro } x \text{ iracionální}\,. \end{cases}$$

Pro tuto funkci je pro každé dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\langle 0, 1\rangle$

$$s_{\mathcal{D}}(D) = 0 \quad \text{a} \quad S_{\mathcal{D}}(D) = 1\,.$$

Proto je $s(D) = 0 < S(D) = 1$ a Riemannův integrál neexistuje.

Je proto užitečné znát aspoň nějaké podmínky, které zaručují existenci Riemannova integrálu funkce $f(\mathbf{x})$ přes interval $\mathcal{I}$. Jednoduchá podmínka, které se používá při odvození dalších užitečnějších podmínek je dána v následující větě.

Věta. Funkce $f(\mathbf{x})$ je integrovatelná na intervalu $\mathcal{I}$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\mathcal{I}$ takové, že platí

$$S_{\mathcal{D}}(f) - s_{\mathcal{D}}(f) < \varepsilon\,. \tag{5}$$

Nebudeme se zde zabývat otázkou existence Riemannova integrálu, ale uvedeme alespoň dvě třídy funkcí jedné reálné proměnné, které jsou vždy integrovatelné.

Věta. Je-li funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ monotonní, je integrovatelná.

Důkaz: Pro monotonní funkce totiž víme, ve kterých bodech nabývá funkce $f(x)$ hodnoty m_i a M_i z definice horního a dolního součtu. Nechť je například funkce $f(x)$ neklesající. Je-li $f(b) = f(a)$ je funkce konstantní a integrál existuje. Nechť je $f(b) > f(a)$. Pak pro každé dělení $\mathcal{D}$ dostaneme $m_i = f(x_{i-1})$ a $M_i = f(x_i)$. Proto platí

$$S_{\mathcal{D}}(f) - s_{\mathcal{D}}(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)(x_i - x_{i-1})\,.$$

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme dělení $\mathcal{D}$ takové, že pro každé i je $x_i - x_{i-1} < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Protože je funkce $f(x)$ neklesající, je $f(x_i) - f(x_{i-1}) \geq 0$, a proto platí nerovnost

$$S_{\mathcal{D}}(f) - s_{\mathcal{D}}(f) < \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1}\big)\,\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \big(f(b) - f(a)\big)\,\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \varepsilon\,.$$

Tedy podle (5) integrál existuje. □

Věta. Je-li funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá, je integrovatelná.

Důkaz této věty je založen na tvrzení, že každá funkce spojitá na kompaktní množině je tzv. stejnoměrně spojitá a nebudeme jej uvádět.

Uvedeme ještě jednu konstrukci, která dává Riemannův integrál za předpokladu, že existuje. Tato konstrukce se velmi často používá například ve fyzice. Pro dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\mathcal{I}$ zavedeme normu dělení $\mathcal{D}$ jako

$$|\mathcal{D}| = \max_{i_1, i_2, \dots, i_n} \Delta_{i_1, i_2, \dots, i_n}\,.$$

Nechť je $\mathcal{D}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, posloupnost dělení intervalu $\mathcal{I}$ na intervaly $\mathcal{I}^{(k)}_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} |\mathcal{D}_k| = 0$. Nechť je $\mathbf{x}^{(k)}_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ libovolný bod intervalu $\mathcal{I}^{(k)}_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$. Je-li funkce $f(\mathbf{x})$ integrovatelná na intervalu $\mathcal{I}$ je

$$\int_{\mathcal{I}} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\,\mathrm{d}x_n = \lim_{k\to\infty}\Big(\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} f\big(\mathbf{x}^{(k)}_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\big)\Delta^{(k)}_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\Big)\,.$$

Zatím jsme definovali integrál omezené funkce $f(\mathbf{x})$ přes omezený interval $\mathcal{I}$. Ingerál funkce $f(\mathbf{x})$ přes omezenou množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ definujeme pomocí integrálu přes interval.

Definice. Nechť je M omezená podmnožina $\mathbb{R}^n$ a $f(\mathbf{x})$ funkce omezená na množině M. Nechť je $\mathcal{I}$ omezený interval v $\mathbb{R}^n$ takový, že $M \subset \mathcal{I}$. Definujme funkci

$$\widehat{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{pro} \quad \mathbf{x} \in M\,, \\ 0 & \text{pro} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{I} \setminus M\,. \end{cases}$$

Jestliže je funkce $\widehat{f}(\mathbf{x})$ integrovatelná na intervalu $\mathcal{I}$, řekneme, že je funkce $f(\mathbf{x})$ integrovatelná na množině M a píšeme

$$\int_M f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\,\mathrm{d}x_n = \int_{\mathcal{I}} \widehat{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\,\mathrm{d}x_n\,.$$

`Poznámka:` Lze ukázat, že v předchozí definici nezávisí na volbě intervalu $\mathcal{I}$.

Základní vlastnosti Riemannova integrálu v $\mathbb{R}^n$

Věta. (*Linearita integrálu*) Funkce jsou funkce $f_k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, \ldots, r$ integrovatelné na množině M a c_k reálné konstanty. Pak je funkce $f(\mathbf{x}) = \sum\limits_{k=1}^{r} c_k f_k(\mathbf{x})$ integrovatelná na množině M a platí rovnost

$$\int_M \sum_{k=1}^{r} c_k f_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\,\mathrm{d}x_n = \sum_{k=1}^{r} c_k \int_M f_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\,\mathrm{d}x_n\,.$$

V teorii integrálu hrají důležitou roli funkce

$$f_+(\mathbf{x}) = \max\big(f(\mathbf{x}), 0\big) \quad \text{a} \quad f_-(\mathbf{x}) = \max\big(-f(\mathbf{x}), 0\big)\,.$$

Funkce $f_+(\mathbf{x})$, resp. $f_-(\mathbf{x})$, se nazývají *nezáporná*, resp. *nekladná*, část funkce $f(\mathbf{x})$. Ihned je vidět, že pro tyto funkce platí $f_\pm(\mathbf{x}) \geq 0$ a

$$f(\mathbf{x}) = f_+(\mathbf{x}) - f_-(\mathbf{x}) \quad \text{a} \quad \big|f(\mathbf{x})\big| = f_+(\mathbf{x}) + f_-(\mathbf{x})\,.$$

Důležitost těchto funkcí plyne z následující věty:

Věta. Funkce $f(\mathbf{x})$ je integrovatelná na množině M právě tehdy, když jsou na M integrovatelné obě funkce $f_\pm(\mathbf{x})$.

Těchto funkcí je používá při důkazu následující věty:

Věta. Nechť jsou funkce $f(\mathbf{x})$ a $g(\mathbf{x})$ integrovatelné na množině M. Pak jsou integrovatelné také funkce $\big|f(\mathbf{x})\big|$, $\big(f(\mathbf{x})\big)^2$ a $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$.

Riemannovsky měřitelné množiny a jejich míra

Nejprve se budeme zabývat "objemem" množiny M. Pro každou množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ definujeme tzv. *charakteristickou funkci množiny* M předpisem

$$\chi_M(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad \mathbf{x} \in M\,, \\ 0 & \text{pro} \quad \mathbf{x} \notin M\,. \end{cases}$$

Definice. Jestliže je funkce $\chi_M(\mathbf{x})$ integrovatelná na množině M, nazývá se množina M *měřitelná* (v Riemannově smyslu) a integrál

$$V(M) = \int_M \chi_M(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\,\mathrm{d}x_n$$

mírou (nebo objemem nebo obsahem) množiny M.

Pro charakteristické funkce množin M_1 a M_2 platí následující vztahy:

$$\begin{aligned} \chi_{M_1\cap M_2}(\mathbf{x}) &= \chi_{M_1}(\mathbf{x})\cdot\chi_{M_2}(\mathbf{x})\,, \\ \chi_{M_1\cup M_2}(\mathbf{x}) &= \chi_{M_1}(\mathbf{x}) + \chi_{M_2}(\mathbf{x}) - \chi_{M_1\cap M_2}(\mathbf{x}) = \chi_{M_1}(\mathbf{x}) + \chi_{M_2}(\mathbf{x}) - \chi_{M_1}(\mathbf{x})\cdot\chi_{M_2}(\mathbf{x})\,, \\ \chi_{M_1\setminus M_2}(\mathbf{x}) &= \chi_{M_1}(\mathbf{x}) - \chi_{M_1\cap M_2}(\mathbf{x}) = \chi_{M_1}(\mathbf{x}) - \chi_{M_1}(\mathbf{x})\cdot\chi_{M_2}(\mathbf{x})\,. \end{aligned}$$

Z těchto vztahů v předchozích vět plyne následující věta:

Věta. Nechť jsou M_1 a M_2 měřitelné množiny. Pak jsou množiny $M_1 \cap M_2$, $M_1 \cup M_2$ a $M_1 \setminus M_2$ měřitelné.

Protože je míra měřitelné množiny M nezáporná, tj. $V(M) \geq 0$, a míra prázdné množiny je rovna nule, dostaneme integrací předchozích vztahů následující větu:

Věta. Nechť jsou M_1 a M_2 měřitelné množiny. Pak platí:

1. $V(M_1 \cup M_2) = V(M_1) + V(M_2) - V(M_1 \cap M_2)$;
2. Jsou-li množiny M_1 a M_2 disjunktní, tj. platí $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, je
$$V(M_1 \cup M_2) = V(M_1) + V(M_2)\,;$$
3. $V(M_1) = V(M_1 \setminus M_2) + V(M_1 \cap M_2)$;
4. Jestliže $M_2 \subset M_1$, pak je $V(M_2) \leq V(M_1)$.

V teorii integrálu jsou velmi důležité množiny, jejichž míra je rovna nule.

Definice. Měřitelná množina M, jejíž míra je rovna nule, se nazývá *množina míry nula*.

Věta. Je-li M množina míry nula a $N \subset M$, je množina N množinou míry nula.

Věta. Nechť je funkce $f(\mathbf{x})$ integrovaná na množinách M_1 a M_2 a množina $M_1 \cap M_2$ má míru nula. Pak platí

$$\int_{M_1\cup M_2} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\,\mathrm{d}x_n = \int_{M_1} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\,\mathrm{d}x_n + \int_{M_2} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\,\mathrm{d}x_n\,.$$

`Poznámka.` Existují různé definice integrálu funkce více proměnných. Obecně platí, jestliže je funkce integrovatelná ve dvou různých teoriích, jsou integrály, které dostaneme pomocí těchto teorií rovny. Rozdíly mezi různými teoriemi spočívají zejména v tom, jaké funkce považujeme za integrovatelné a zejména jaké připouštíme množiny míry nula.

Pro Riemannův integrál platí následující věta.

Věta. Jestliže je množina $M \subset \mathbb{R}^n$ konečné sjednocení regulárních nadploch dimenze $k < n$, je její míra rovná nule.

V příkladech se s neintegrovatelnými funkcemi v podstatě nesetkáme. Platí totiž

Věta. Nechť je M měřitelná množina taková, že míra její hranice ∂M je rovna nule. Pak je každá omezená spojitá funkce definovaná na M na množině M integrovatelná.

V teorii integrálu se velmi často používá slovní spojení "platí skoro všude". Jeho přesný význam je tento:

Definice. Jestliže nějaká vlastnost $V(\mathbf{x})$ platí pro všechna $\mathbf{x} \in M$ mimo množinu bodů $N \subset M$ a množina N je množina míry nula, budeme říkat, že vlastnost $V(\mathbf{x})$ platí *skoro všude na množině M*.
Tvrzení $V(\mathbf{x})$ platí skoro všude na množině M se často píše jako $V(\mathbf{x})$ platí s.v. na M.

Podstatné je, že pro intergovatelné funkce $f(\mathbf{x})$ a $g(\mathbf{x})$ neplyne z rovnosti

$$\int_M \big| f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) \big| \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n = 0$$

vztah $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$, ale pouze to, že $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ s.v. na M.