Přednáška 4

Riemannův integrál v $\mathbb{R}$

Osnova přednášky

1. Vztah $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Geometrický význam integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Nerovnosti mezi integrály.

4. Funkce $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, její spojitost a derivace.

5. Příklad $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \bigl(1-\cos\sqrt{t}\bigr)\,\mathrm{d}t}{x^2}$.

6. Vztah $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \bigl[F(x)\bigr]_a^b = F(b) - F(a)$.

7. Newtonův určitý integrál a jeho souvislost s Riemannovým integrálem.

8. Věta o integraci per partes pro určitý integrál.

9. Příklad: integrály $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x$ a $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x$.

10. První věta o substituci pro určitý integrál.

11. Druhá věta o substituci pro určitý integrál.

12. Věty o střední hodnotě integrálního počtu.

V minulé přednášce jsme se věnovali Riemannovu integrálu omezené funkce $f(\mathbf{x})$ v n–rozměrném prostoru $\mathbb{R}^n$. Riemannovy integrály funkce jedné reálné proměnné mají nekteré speciální vlastnosti, kterými se budeme zabývat v této přednášce.

Integrál omezené funckce $f(x)$ přes omezený intreval $\mathcal{I} = \langle a, b\rangle$ se obvykle zapisuje jako

$$\int_{\mathcal{I}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Pro integrály funkce jedné reálné proměnné platí následující věta.

Věta. Funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ právě tehdy, když je pro každé $c \in (a, b)$ integrovatelná na obou intervalech $\langle a, c\rangle$ a $\langle c, b\rangle$ a platí rovnost

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{1}$$

Prozatím jsme integrál definovali pouze pro $a < b$. Předešlá věta nám umožňuje definovat pro $a \geq b$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Pak platí
$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$
a vztah (1) platí pro každou trojici čísel a, b a c za předpokladu, že aspoň dva integrály existují.

Pro funkci $f(x) \geq 0$, jsme geometricky interpretovali Riemannův integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jako obsah obrazce omezeného osou x, grafem funkce $y = f(x)$ a přímkami $x = a$ a $x = b$. Dejme ještě geometrickou interpretaci Riemannova integrálu pro libovolnou integrovatelnou funkci.

Nechť je $f_+(x)$, resp. $f_-(x)$, nezáporná, resp. nekladná, část integrovatelné funkce $f(x)$. Pak platí rovnosti
$$f(x) = f_+(x) - f_-(x) \quad \text{a} \quad \bigl|f(x)\bigr| = f_+(x) + f_-(x)\,.$$
Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na množině M, jsou obě funkce $f_+(x)$ a $f_-(x)$ integrovatelné na M, tj. je integrovatelná také funkce $\bigl|f(x)\bigr|$, a platí
$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}x = \int_M f_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_M f_-(x)\,\mathrm{d}x\,,$$
$$\int_M \bigl|f(x)\bigr|\,\mathrm{d}x = \int_M f_+(x)\,\mathrm{d}x + \int_M f_-(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
Z toho je zřejmé, že pro libovolnou integrovatelnou funkci $f(x)$ je Riemannův integrál rozdíl obsahu plochy, která leží nad osou x pro $f(x) > 0$, a obsahu plochy, která leží pod osou x pro $f(x) < 0$.

Nyní uvedeme některé takřka samozřejmé nerovnosti, které jsou potřebné k důkazu dalších důležitých vět.

Věta. Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\mathcal{I} = \langle a, b\rangle$ a pro každé $x \in \mathcal{I}$ platí $k \leq f(x) \leq K$. Pak platí nerovnost
$$k(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq K(b-a)\,.$$

Důkaz: Pro každé dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\mathcal{I}$ platí nerovnost
$$k(b-a) \leq s_{\mathcal{D}}(f) \leq S_{\mathcal{D}} \leq K(b-a)\,.$$
Jestliže přejdeme na levé straně k supremu a na pravé straně k infimu, dostaneme nerovnost
$$k(b-a) \leq s(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S(f) \leq K(b-a)\,.$$

Věta. Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné na množině M a pro každé $x \in M$ platí $g(x) \leq f(x)$. Pak je
$$\int_M g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_M f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{2}$$

DŮKAZ: plyne z nerovnosti $0 \le f(x) - g(x)$, linearity integrálu a předchozí věty.

Věta. Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na množině M, platí nerovnost

$$\left|\int_M f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_M \bigl|f(x)\bigr|\,\mathrm{d}x\,.$$

DŮKAZ: plyne z nerovností $-\bigl|f(x)\bigr| \le f(x) \le \bigl|f(x)\bigr|$ a předchozí věty.

Riemannův integrál jako funkce horní meze

Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$, je integrovatelná také na intervalu $\langle a, c\rangle$ pro každé $c \in \langle a, b\rangle$. Proto můžeme na intervalu $\langle a, b\rangle$ definovat funkci

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{3}$$

Nyní se budeme zabývat touto funkcí.

Věta. Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$, je funkce $F(x)$ definovaná vztahem (3) na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá.

DŮKAZ: Máme dokázat, že pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ je

$$\lim_{h\to 0}\Bigl(F(x+h) - F(x)\Bigr) = 0\,.$$

Podle definice funkce $F(x)$ je

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Protože je funkce $f(x)$ omezená, existuje číslo K takové, že $\bigl|f(x)\bigr| \le K$. Podle výše uvedených nerovností je

$$\bigl|F(x+h) - F(x)\bigr| = \left|\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_x^{x+h} \bigl|f(t)\bigr|\,\mathrm{d}t \le K\int_x^{x+h} \mathrm{d}t = Kh\,.$$

Tedy platí

$$\lim_{h\to 0}\bigl|F(x+h) - F(x)\bigr| = 0\,, \quad \text{tj.} \quad \lim_{h\to 0}\bigl(F(x+h) - F(x)\bigr) = 0\,.$$

Věta. Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a existuje konečná limita $\lim\limits_{h\to 0_\pm} f(x+h) = A_\pm$. Pak je

$$\lim_{h\to 0_\pm} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = A_\pm\,. \tag{4}$$

DŮKAZ: Tvrzení dokážeme pouze pro limitu zprava, tj. pro znaménko +. Pro limitu zleva je důkaz analogický. Jak jsme ukázali dříve, je

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Proto je

$$\left|F(x+h)-F(x)-A_+h\right| = \Big|\int_x^{x+h} \big(f(t)-A_+\big)\,\mathrm{d}t\Big| \le \int_x^{x+h} \left|f(t)-A_+\right|\mathrm{d}t\,.$$

Protože $\lim\limits_{t\to x_+} f(t) = A_+$, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ číslo $\delta > 0$ takové, že pro každé t, pro které je $x < t < x+\delta$, je $\left|f(t)-A_+\right| < \varepsilon$.

Zvolíme-li tedy $0 < h < \delta$, dostaneme pro taková h nerovnost

$$\left|F(x+h)-F(x)-A_+h\right| < \int_x^{x+h} \varepsilon\,\mathrm{d}t = h\varepsilon\,.$$

Proto pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé h, $0 < h < \delta$ je

$$\Big|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - A_+\Big| < \varepsilon\,, \quad \text{tj.} \quad \lim_{h\to 0_+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = A_+\,.$$

Věta. Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a,b\rangle$ a spojitá v bodě x. Pak je

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\Big) = f(x)\,. \tag{5}$$

Důkaz: Je-li funkce $f(x)$ spojitá v bodě x, je $\lim\limits_{h\to 0_+} f(x+h) = \lim\limits_{h\to 0_+} f(x-h) = f(x)$, je tvrzení věty důsledkem vztahu (4).

Příklad: Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\int_0^x (1-\cos\sqrt{t})\,\mathrm{d}t}{x^2}$.

Řešení: Protože se jedná o limitu typu $\frac{0}{0}$, můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo. Tak dostaneme

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\int_0^x (1-\cos\sqrt{t})\,\mathrm{d}t}{x^2} = \lim_{x\to 0_+} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{2x} = \lim_{x\to 0_+} \frac{\sin\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{\cos\sqrt{x}}{4} = \frac{1}{4}\,.$$

Víme, že když je funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitá, je na tomto intervalu integrovatelná. Vztah (5) ale znamená, že funkce $F(x)$ definovaná vztahem (3) je na intervalu (a,b) primitivní funkce k funkci $f(x)$. Tedy platí

Věta. Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$, existuje k ní na tomto intervalu primitivní funkce.

Vztah (5) nám poměrně jednoduše umožňuje počítat Riemannův integrál. Platí totiž

Věta. Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b)-F(a)\,, \tag{6}$$

kde $F(x)$ je libovolná primitivní funkce k funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$.

Důkaz: Nechť je $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$. Protože je funkce definovaná vztahem (3) primitivní funkce na tomto intervalu, existuje konstanta c taková, že pro každé $x \in \langle a,b\rangle$ platí $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + c$. Tedy platí

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + c - \Big(\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t + c\Big) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Vztah (6) se velmi často používá k výpočtu Riemannových integrálů a definuje se pomocí něj tzv. Newtonův integrál.

Definice. Nechť je $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak se reálné číslo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[\,F(x)\,\big]_a^b = F(b) - F(a) \tag{7}$$

nazývá *Newtonův určitý integrál* funkce $f(x)$ přes interval $\langle a,b\rangle$.

Předcházející větu lze pak vyjádřit jako

Věta. Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak se její Riemannův integrál rovná jejímu Newtonovu integrálu.

Následující věty jsou obdobou podobných vět pro neurčitý integrál.

Věta (*o integraci per partes*). Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojitě diferencovatelné na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak platí

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{8}$$

Důkaz: Protože jsou funkce

$$F(x) = \int_a^x f'(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{a} \quad \widehat{F}(x) = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t$$

dvě primitivní funkce k funkci $f'(x)\,g(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$, mohou se lišit pouze o konstantu. Ale protože pro $x = a$ je $F(a) = \widehat{F}(a) = 0$, jsou tyto funkce rovny pro každé $x \in \langle a,b\rangle$. Rovnost (8) je pak rovnost $F(b) = \widehat{F}(b)$.

Příklad: Najděte integrál $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x$, kde $n \geq 2$.

Řešení: Označme $f'(x) = \sin x$ a $g(x) = \sin^{n-1} x$. Protože $f(x) = -\cos x$ a $g'(x) = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x$, dostaneme z (8)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\cos\frac{\pi}{2}\,\sin^{n-1}\frac{\pi}{2} + \cos 0\,\sin^{n-1} 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,\mathrm{d}x =$$
$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,\mathrm{d}x\,.$$

Jestliže použijeme vztah $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, dostaneme

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x = (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x - (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x \,.$$

S této rovnice plyne

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x \,.$$

Podobně lze ukázat, že pro $n \geq 2$ platí

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x \,\mathrm{d}x \,.$$

Pomocí těchto vztahů lze snižovat v integrálech mocniny, až dostaneme

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{nebo} \quad \int_0^{\pi/2} \sin^0 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \,.$$

Nyní uvedeme dvě věty o substituci v určitém integrálu. Podobně jako v případě neurčitého integrálu mají obě tyto věty tvar

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\bigl(\varphi(t)\bigr) \cdot \varphi'(t) \,\mathrm{d}t \,, \tag{9}$$

ale předpoklady se liší podle toho, zda známý integrál, pomocí něhož počítáme druhý, je v rovnosti (9) integrál vpravo nebo vlevo.

Věta (*první věta o substituci*). Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle A, B\rangle$ a funkce $\varphi : \langle \alpha, \beta\rangle \to \langle A, B\rangle$ má spojitou derivaci. Nechť platí $\varphi(\alpha) = a$ a $\varphi(\beta) = b$. Pak platí rovnost

$$\int_\alpha^\beta f\bigl(\varphi(t)\bigr) \cdot \varphi'(t) \,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \,.$$

`Poznámka.` V této větě předpokládáme, že známe integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a počítáme druhý integrál.

Důkaz: Je-li $F(x)$ na intervalu $\langle A, B\rangle$ primitivní funkce k funkci $f(x)$, je podle první věty o substituci pro neurčitý integrál funkce $\Phi(t) = F\bigl(\varphi(t)\bigr)$ na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ primitivní funkcí k funkci $f\bigl(\varphi(t)\bigr) \cdot \varphi'(t)$. Proto je integrál vlevo roven

$$\int_\alpha^\beta f\bigl(\varphi(t)\bigr) \cdot \varphi'(t) \,\mathrm{d}t = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F\bigl(\varphi(\beta)\bigr) - F\bigl(\varphi(\alpha)\bigr) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \,.$$

Věta (*druhá věta o substituci*). Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a funkce $\varphi : \langle \alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle$ je spojitě diferencovatelná funkce, která zobrazuje interval $\langle \alpha, \beta\rangle$ na interval $\langle a, b\rangle$. Nechť je $\varphi'(t) \neq 0$. Pak platí

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{(-1)}(a)}^{\varphi^{(-1)}(b)} f\bigl(\varphi(t)\bigr) \cdot \varphi'(t) \,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\bigl(\varphi(t)\bigr) \bigl|\varphi'(t)\bigr| \,\mathrm{d}t \,.$$

`Poznámka.` Zde předpokládáme, že známe integrál $\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\cdot\big|\varphi'(t)\big|\,\mathrm{d}t$ a počítáme integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

DŮKAZ: je obdobný jako v případě první věty o substituci.

Věty o střední hodnotě integrálního počtu

Uvedeme ještě dvě věty, které jsou známy jako věty o střední hodnotě integrálního počtu.

Věta (*první věta o střední hodnotě*). Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné na intervalu $\langle a,b\rangle$, $g(x)\ge 0$ a platí $k\le f(x)\le K$. Pak platí nerovnost

$$k\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \le K\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Je-li navíc funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitá, existuje $c\in(a,b)$ takové, že

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{10}$$

DŮKAZ: Protože je $g(x)\ge 0$, platí pro každé $x\in\langle a,b\rangle$ nerovnost

$$kg(x)\le f(x)\,g(x)\le Kg(x)$$

a protože jsou funkce $g(x)$ a $f(x)\,g(x)$ integrovatelné, plyne uvedená nerovnost z (2).

Je-li navíc funkce $f(x)$ spojitá, zobrazuje interval $\langle a,b\rangle$ na interval $\langle k,K\rangle$, kde $k=\min\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$ a $K=\max\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$. Tedy existuje $c\in(a,b)$ takové, že platí (10).

Věta (*druhá věta o střední hodnotě*). Nechť je $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a $g(x)$ je monotonní funkce, která má na $\langle a,b\rangle$ spojitou derivaci. Pak existuje $c\in(a,b)$ takové, že

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = g(b)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + g(a)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{11}$$

DŮKAZ: Za uvedených předpokladů lze druhou větu o střední hodnotě dokázat integrací per partes. Nechť je $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$. Pak je podle (8)

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = F(b)g(b)-F(a)g(a)-\int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Protože je funkce $g(x)$ monotonní, nemění její derivace na intervalu $\langle a,b\rangle$ znaménko. Proto lze na poslední integrál použít první větu o střední hodnotě (10). Podle ní existuje $c\in(a,b)$ takové, že

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x &= F(b)g(b)-F(a)g(a)-F(c)\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= F(b)g(b)-F(a)g(a)-F(c)\big(g(b)-g(a)\big) = \\ &= g(b)\big(F(b)-F(c)\big)+g(a)\big(F(c)-F(a)\big)\,.\end{aligned}$$

Ale protože je $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$, je tento vztah rovnost (11).