Přednáška 5

Nevlastní Riemannův integrál

Osnova přednášky

1. Nevlastní Riemannův integrál neomezené funkce; příklad $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$ a $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-x}$.

2. Vztah mezi Riemannovým a nevlastním Riemannovým integrálem; příklad $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x$.

3. Nevlastní Riemannův integrál přes neomezenou množinu; příklad $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$.

4. Příklad $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(x+3)\,\mathrm{d}x}{(2x-1)(3x^2-6x+4)}$.

5. Obecná definice nevlastního Reimannova integrálu; příklady

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}}\,, \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}\,.$$

6. Absolutně a neabsolutně konvergentní nevlastní Riemannovy integrály.

7. Konvergence integrálu nezáporné funkce, srovnávací kritérium; příklad $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p}\,\mathrm{d}x$.

8. Konvergence integrálů $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ a $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$.

9. Konvergence integrálů $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt[4]{x^3+2x+1}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2+1}\,\sqrt[5]{x^6+x^4+x^2+1}}$ a $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^3}\,\sqrt[3]{x^3-3x+2}}$.

10. Absolutně konvergentní integrály; příklad $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

11. Konvergence integrálu $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

12. Dirichletovo kritérium konvergence; příklad $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$.

V minulé přednášce jsme se zabývali určitým integrálem. Definovali jsme Newtonův integrál funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$ vztahem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b)-F(a)\,, \tag{1}$$

kde $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$, a Riemannův integrál jako obsah plochy pod grafem funkce $y=f(x)\geq 0$. Zjistili jsme, že pro spojité funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$ vedou obě definice ke stejné hodnotě.

Ale může se stát, že jeden z těchto integrálů existuje a druhý ne. Nevýhoda Newtonova integrálu je v tom, že musí existovat primitivní funkce k funkci $f(x)$. Hlavní nevýhoda Riemannova integrálu je v tom, že jsme se při jeho definici museli omezit na omezené intervaly $\langle a, b\rangle$ a omezené funkce. V této přednášce budeme definovat o něco obecnější nevlastní (neboli zobecněný) Riemannův integrál, který tyto problémy částečně odstraní.

Nejprve na příkladu ukážeme, jak lze odstranit předpoklad, že funkce $f(x)$ je omezená.

Příklad. Po každé $b \in (0, 1)$ je definován Riemannův integrál

$$\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^b = -2\sqrt{1-b} + 2\,.$$

Tento integrál vyjadřuje velikost plochy pod grafem funkce $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ mezi body $x = 0$ a $x = b \in (0, 1)$. Protože existuje konečná limita

$$\lim_{b\to 1_-} \int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b\to 1_-} \left(-2\sqrt{1-b} + 2\right) = 2\,,$$

je přirozené, považovat toto číslo za obsah plochy pod grafem funkce $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ mezi body $x = 0$ a $x = 1$.

Na druhou stranu je pro každé $b \in (0, 1)$ je definován Riemannův integrál

$$\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \left[-\ln(1-x)\right]_0^b = -\ln(1-b)\,.$$

Ale v tomto případě je

$$\lim_{b\to 1_-} \int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \lim_{b\to 1_-} \left(-\ln(1-b)\right) = +\infty$$

a obsah plochy pod grafem funkce $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ od bodu $x = 0$ do bodu $x = 1$ není konečný.

Na tomto příkladě je vidět, že existují neomezené funkce, pro které lze definovat obsah plochy pod jejím grafem. Proto je přirozené rozšířit definici Riemannova integrálu na takové funkce.

Definice. Nechť pro každé $y \in (a, b)$ existuje Riemannův integrál $\displaystyle\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{y\to b_-} \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

nazýváme ji nevlastní Riemannův integrál funkce $f(x)$ od bodu na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Nechť pro každé $y \in (a, b)$ existuje Riemannův integrál $\displaystyle\int_y^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{y\to a_+} \int_y^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

nazýváme ji nevlastní Riemannův integrál funkce $f(x)$ přes interval $\langle a, b\rangle$.
Jestliže existuje nevlastní integrál, říkáme, že integrál *konverguje*. V opačném případě říkáme, že integrál *diverguje*.

Příklad. Najděte hodnoty $p \in \mathbb{R}$, pro které konverguje integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$.

Řešení: Pro každé $y \in (0,1)$ je

$$\int_y^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1-y^{1-p}}{1-p} & \text{pro} \quad p \neq 1\,, \\ -\ln y & \text{pro} \quad p = 1\,. \end{cases} \tag{2}$$

Jestliže v (2) přejdeme k limitě $y \to 0_+$, dostaneme

$$\lim_{y\to 0_+} \int_y^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p} & \text{pro} \quad p < 1\,, \\ +\infty & \text{pro} \quad p \geq 1\,. \end{cases}$$

Integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ tedy konverguje pro $p < 1$.

Nevlastní Riemannovy integrály budeme značit stejným symbolem $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jako obyčejné Riemannovy integrály. Platí totiž

Věta. Pokud existuje Riemannův integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, rovná se nevlastnímu Riemannovu integrálu.

Příklad. Najděte integrál $\displaystyle\int_0^1 x \ln x \,\mathrm{d}x$.

Řešení: Protože $\lim\limits_{x\to 0_+} x \ln x = 0$, je funkce $f(x) = x \ln x$ na intervalu $(0,1)$ omezená. Proto je daný integrál Riemannův. Integrací per partes dostamene

$$\int_0^1 x \ln x \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\, x^2 \ln x - \tfrac{1}{4}\, x^2\,.$$

Pokud bychom chtěli použít vztah

$$\int_0^1 x \ln x \,\mathrm{d}x = \Big[\tfrac{1}{2}\, x^2 \ln x - \tfrac{1}{4}\, x^2\Big]_0^1,$$

dostali bychom neurčitý výraz typu $0 \cdot \infty$. Ale protože je Riemannův integrál roven nevlastnímu integrálu, platí

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \ln x \,\mathrm{d}x = \lim_{y\to 0_+} \int_y^1 x \ln x \,\mathrm{d}x = \lim_{y\to 0_+} \Big[\tfrac{1}{2}\, x^2 \ln x - \tfrac{1}{4}\, x^2\Big]_y^1 = \\ = -\tfrac{1}{4} - \lim_{y\to 0_+} \big(\tfrac{1}{2}\, y^2 \ln y - \tfrac{1}{4}\, y^2\big) = -\tfrac{1}{4}\,,\end{aligned}$$

protože $\lim\limits_{y\to 0_+} y^2 \ln y = 0$.

Podobně lze odstranit i předpoklad omezeného intervalu. I v tomto případě požadujeme, aby integrál nabýval pouze konečných hodnot.

Definice. Nechť pro každé $y > a$ existuje Riemannův integrál $\displaystyle\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{y\to+\infty} \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

nazýváme ji *nevlastní Riemannův integrál.*
Nechť pro každé $y < a$ existuje Riemannův integrál $\displaystyle\int_y^a f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{y\to-\infty} \int_y^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

nazýváme ji *nevlastní Riemannův integrál.*
Jestliže existuje nevlastní integrál, říkáme, že integrál *konverguje.* V opačném případě říkáme, že integrál *diverguje.*

Příklad. Najděte množinu všech $p \in \mathbb{R}$, pro která konverguje integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$.

Řešení: Pro každé $y > 1$ je

$$\int_1^y \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{y^{1-p}-1}{1-p} & \text{pro } \ p \neq 1\,, \\ \ln y & \text{pro } \ p = 1\,. \end{cases} \tag{3}$$

Jestliže přejdeme k limitě $y \to +\infty$, dostaneme

$$\lim_{y\to+\infty} \int_1^y \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & \text{pro } \ p > 1\,, \\ +\infty & \text{pro } \ p \leq 1\,. \end{cases}$$

Integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ tedy konverguje pro $p > 1$.

Příklad. Najděte nevlastní Riemannův integrál $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{(x+3)\,\mathrm{d}x}{(2x-1)(3x^2-6x+4)}$.

Řešení: Podle definice je

$$\int_1^{\infty} \frac{(x+3)\,\mathrm{d}x}{(2x-1)(3x^2-6x+4)} = \lim_{y\to+\infty} \int_1^{y} \frac{(x+3)\,\mathrm{d}x}{(2x-1)(3x^2-6x+4)}\,.$$

Primitivní funkci najdeme pomocí rozkladu na parciální zlomky. Protože polynom $3x^2 - 6x + 4$ nemá reálné kořeny, budeme hledat reálná čísla A, B a C taková, že

$$\frac{x+3}{(2x-1)(3x^2-6x+4)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{Bx+C}{3x^2-6x+4}\,.$$

Standardním postupem zjistíme, že $A = 2$, $B = -3$ a $C = 5$. Tedy

$$\int \frac{(x+3)\,\mathrm{d}x}{(2x-1)(3x^2-6x+4)} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{2x-1} - \int \frac{(3x-5)\,\mathrm{d}x}{3x^2-6x+4} =$$
$$= \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{2x-1} - \int \frac{(3x-3)\,\mathrm{d}x}{3x^2-6x+4} + \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{3(x-1)^2+1} =$$
$$= \ln \frac{|2x-1|}{\sqrt{3x^2-6x+4}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\bigl(\sqrt{3}\,(x-1)\bigr)$$

a hledaný integrál je

$$\int_1^{\infty} \frac{(x+3)\,\mathrm{d}x}{(2x-1)(3x^2-6x+4)} = \lim_{y\to+\infty} \left[\ln \frac{|2x-1|}{\sqrt{3x^2-6x+4}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\bigl(\sqrt{3}\,(x-1)\bigr)\right]_1^y =$$
$$= \lim_{y\to+\infty} \left(\ln \frac{|2y-1|}{\sqrt{3y^2-6y+4}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\bigl(\sqrt{3}\,(y-1)\bigr)\right) = \ln \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

Zatím jsme definovali nevlastní Riemannův integrál pouze v případě, kdy nám vadil jenom jeden bod, který byl krajním bodem integračního oboru. V následujících příkladech ukážeme, jak se postupuje v obecném případě.

Příklad. V integrálu $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}}$ není integrovaná funkce omezená v okolí bodu $x = 0$, který leží uvnitř intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Je přirozené, rozdělit tímto bodem interval $\langle -1, 1\rangle$ na dva intervaly a definovat

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}}\,,$$

kde oba integrály na pravé straně jsou již nevlastní Riemannovy integrály ve smyslu dříve uvedených definic.

Příklad. V integrálu $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$ nám vadí body $x = 0$, $x = 1$ a $x = 2$, které jsou uvnitř intervalu, a body $\pm\infty$. Při výpočtu takového integrálu je přirozené zvolit body $a_1 \in (-\infty, 0)$, $a_2 \in (0, 1)$, $a_3 \in (1, 2)$ a $a_4 \in (2, +\infty)$ a definovat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a_1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a_2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x +$$
$$+ \int_{1}^{a_3} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a_3}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{a_4} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a_4}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

kde $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$. V tomto vztahu jsou na pravé straně opět nevlastní integrály, které jsme definovali dříve.

Aby na pravé straně této rovnosti nebyly výrazy typu $\infty - \infty$, omezili jsme se při definici nevlastních Riemannových integrálů na vlastní limity. Celý integrál pak konverguje právě tehdy, když konvergují všechny integrály vpravo.

Definice. Nechť existují body a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_n takové, že $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$, a pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$ existuje nevlastní integrál $\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x$ ve smyslu výše uvedených definic. Pak číslo

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

nazýváme nevlastním Riemannovým integrálem od bodu a do bodu b.

Konvergence nevlastního integrálu

Mnohdy nás až tak nezajímá hodnota nevlastního Riemannova integrálu, ale to, jestli integrál konverguje nebo diverguje, tj. jestli pomocí něj můžeme definovat nějakou konečnou hodnotu. Uvedeme několik vět, které se týkají konvergence nevlastního Riemannova integrálu.

Věta. Existuje-li $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$, pak nevlastní integrál $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje.

Věta. Jestliže je funkce $f(x)$ na intervalu $(a, +\infty)$ spojitá a $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Věta. Jestliže konverguje integrál $\displaystyle\int_a^b \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x$, konverguje také integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Definice. Jestliže konverguje integrál $\displaystyle\int_a^b \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x$, nazývá se integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *absolutně konvergentní.*
Jestliže konverguje integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a integrál $\displaystyle\int_a^b \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x$ diverguje, nazývá se integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *neabsolutně konvergentní.*

Konvergence integrálu nezáporné funkce

Je podstatně jednodušší rozhodnout o absolutní konvergenci integrálu. Je-li totiž $f(x) \geq 0$, je $F(y) = \displaystyle\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$ neklesající funkce proměnné y, a proto vždy existuje

$$\lim_{y\to b_-} F(y) = \sup_{y\in(a,b)} F(y)\,.$$

Tedy nevlastní Riemannův integrál nezáporné funkce $f(x)$ existuje právě tehdy, když je funkce $F(y) = \displaystyle\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$ na intervalu (a, b) omezená.

Z toho plynou další kritéria konvergence nevlastních integrálů nezáporných funkcí. V těchto větách budeme mlčky předpokládat, že pro každé $y \in (a, b)$ existuje Riemannův integrál $\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$. To je splněno například tehdy, když je funkce $f(x)$ na intervalu (a,b) spojitá nebo monotonní.

Věta (*srovnávací kritérium*). Nechť pro každé $x \in (a,b)$ platí $0 \le g(x) \le f(x)$.
Konverguje-li integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, konverguje také integrál $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
Diverguje-li integrál $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, diverguje také integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Důkaz: Pro každé $y \in (a,b)$ platí nerovnost

$$0 \le \int_a^y g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Jestliže konverguje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, je funkce $G(y) = \int_a^y g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, a tedy je omezená.
Jestliže diverguje integrál $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, je funkce $F(y) = \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_a^y g(x)\,\mathrm{d}x$, a tedy není omezená. $\square$

Příklad. Rozhodněte, pro která $p \in \mathbb{R}$ konveruje integrál $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Protože pro $x \in \langle 1,\infty)$ je $\frac{1}{4}\pi \le \operatorname{arctg} x < \frac{1}{2}\pi$, platí nerovnost

$$0 \le \frac{\pi}{4x^p} \le \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p} < \frac{\pi}{2x^p}\,.$$

A protože integrál $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ konverguje pro $p > 1$ a diverguje pro $p \le 1$, konverguje, resp. diverguje, uvedený integrál pro stejné hodnoty parametru p.

Je zřejmé, že konvergence nevlastního integrálu závisí pouze chování integrované funkce v okolí bodu, kde neexistuje její Riemannův integrál. Abychom rozhodli o konvergenci nebo divergenci nevlastního integrálu často srovnáváme integrovanou funkci v okolí tohoto bodu s funkcí, o které víme, že její nevlastní integrál konverguje nebo diverguje. Přesněji platí následující věta.

Věta. Nechť jsou $f(x)$ a $g(x)$ nezáporné funkce a pro každé $y \in (a,b)$ existují Riemannovy integrály $\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^y g(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže existuje konečná limita $\lim_{x\to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} = A \ne 0$, pak integrály $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ současně konvergují nebo divergují.

Abychom mohli používat tuto větu, musíme mít jistou zásobu funkcí, o nichž víme, že jejich nevlastní integrály konvergují nebo divergují. Pak srovnáváme daný integrál s těmito známými integrály. Pro konvergenci v nekonečnu se používá integrál

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}\,, \quad \text{který} \quad \begin{cases} \text{konverguje pro } p > 1 \\ \text{diverguje pro } p \le 1 \end{cases} \tag{4}$$

a pro konvergenci v konečném bodě $x = a$ integrál

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}\,, \quad \text{který} \quad \begin{cases} \text{konverguje pro } p < 1 \\ \text{diverguje pro } p \geq 1. \end{cases} \tag{5}$$

Příklad. Zkoumejte konvergenci integrálu $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt[4]{x^3+2x+1}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2+1}\,\sqrt[5]{x^6+x^4+x^2+1}}$.

Řešení: Integrovaná funkce je na intervalu $\langle 1, +\infty)$ omezená a spojitá. Proto pro každé $y \in (1, +\infty)$ existuje její Riemannův integrál. Pro velká x je

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3+2x+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}\,\sqrt[5]{x^6+x^4+x^2+1}} \approx \frac{x^{3/4}}{x^{2/3}\,x^{6/5}} = \frac{1}{x^{67/60}}\,.$$

Protože $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{-67/60}} = 1$, konverguje uvedený integrál současně s integrálem $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{67/60}}$, který konverguje podle (4). Tedy uvedený integrál konverguje.

Příklad. Zkoumejte konvergenci integrálu $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^3}\,\sqrt[3]{x^3-3x+2}}$.

Řešení: Protože

$$1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2) \quad \text{a} \quad x^3 - 3x + 2 = (1-x)^2(2+x)\,,$$

je jediný bod, kde není integrovaná funkce na intervalu $(0, 1)$ omezená, bod $x = 1$. Integrovanou funkci lze psát ve tvaru

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}\,\sqrt[3]{x^3-3x+2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}\,\frac{1}{(1-x)^{1/2}}\,\frac{1}{\sqrt[3]{2+x}}\,\frac{1}{(1-x)^{2/3}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}\,\frac{1}{\sqrt[3]{2+x}}\,\frac{1}{(1-x)^{7/6}}\,.$$

Z toho je vidět, že

$$\lim_{x\to 1_-} \frac{f(x)}{(1-x)^{-7/6}} = \frac{1}{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{3}}\,.$$

Proto uvedený integrál konverguje právě tehdy, když konverguje integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^{7/6}}$, který podle (5) diverguje. Tedy uvedený integrál diverguje.

Jestliže existuje více bodů, v jejichž okolí neexistuje integrál jako Riemannův, rozdělíme interval na několik dílčích intervalů a vyšetřujeme konvergenci integrálu na každém intervalu zvlášť. Aby integrál konvergoval na celém intervalu, musí konvergovat na každém z dílčích intervalů.

Příklad. V závislosti na hodnotě parametru $p \in \mathbb{R}$ vyšetřujte konvergenci nevlastního Riemannova integrálu $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x}{x^p}$.

Řešení: Protože je funkce $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^p}$ na intervalu $(0, +\infty)$ spojitá mohou nastat problémy v bodě $x = +\infty$, tam určitě, a v bodě $x = 0$, pokud nebude v okolí tohoto bodu funkce $f(x)$ omezená. Proto napíšeme

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x}{x^p} = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x}{x^p} + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x}{x^p} \, .$$

Protože je $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{2}\pi$, konverguje druhý integrál současně s integrálem $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$. Podle (4) tedy musí být $p > 1$.

Protože je $\operatorname{arctg} 0 = 0$ je situace v prvním integrálu trochu složitější. Jestliže nahradíme funkci $\operatorname{arctg} x$ v okolí bodu $x = 0$ prvním nenulovým členem Taylorova rozvoje, tj. napíšeme $\operatorname{arctg} x \sim x$, dostaneme v okolí bodu $x = 0$ vztah

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x^p} \sim \frac{x}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}} \, .$$

Protože

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{f(x)}{x^{-p+1}} = \lim_{x \to 0_+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 \, ,$$

konverguje první integrál současně s integrálem $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{p-1}}$. Podle (5) musí tedy být $p - 1 < 1$, tj. $p < 2$.

Celkově tedy integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x}{x^p}$ konverguje pro $1 < p < 2$.

Absolutní a neabsolutní konvergence integrálu

Jestliže funkce $f(x)$ není nezáporná, vyšetřujeme nejprve absolutní konvergenci integrálu $\displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$, tj. konvergenci integrálu $\displaystyle\int_a^b \bigl|f(x)\bigr| \, \mathrm{d}x$, na který už můžeme použít uvedená kritéria pro konvergenci integrálů nezáporné funkce.

Příklad. Ukažte, že integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} \, \mathrm{d}x$ konverguje.

Řešení: Protože pro každé $x \in (1, \infty)$ platí nerovnost

$$\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| = \frac{|\sin x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$$

a integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ konverguje, konverguje také integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} \, \mathrm{d}x$ (dokonce absolutně).

Nekonverguje-li integrál $\displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ absolutně, je situace podstatně složitější. Uvedeme aspoň jeden příklad.

Příklad. Dokažte, že nevlastní integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x$ konverguje.

Řešení: Integrál napíšeme jako součet dvou integrálů

$$\int_0^y \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x\,.$$

Protože $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} \frac{\sin x}{x} = 1$ je funkce $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ na intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$ omezená. První integrál je tedy obyčejný Riemannův integrál spojité funkce, a proto konverguje.

Druhý integrál je nevlstní a podle definice je

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x = \lim_{y\to+\infty} \int_{\pi/2}^{y} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x\,.$$

Když v integrálu použijeme integraci per partes a dostaneme

$$\int_{\pi/2}^{y} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_{\pi/2}^{y} - \int_{\pi/2}^{y} \frac{\cos x}{x^2}\, \mathrm{d}x = -\frac{\cos y}{y} - \int_{\pi/2}^{y} \frac{\cos x}{x^2}\, \mathrm{d}x\,.$$

Protože $\displaystyle\lim_{y\to\infty} \frac{\cos y}{y} = 0$, dostaneme rovnost

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x = -\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, \mathrm{d}x\,.$$

A protože platí nerovnost $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \le \dfrac{1}{x^2}$, je tento integrál také konvergentní.

Obecně platí pro neabsolutně konvergentní integrály následující věta, jejíž důkaz využívá druhé věty o střední hodnotě nebo integrace per partes podobně jako v předchozím příkladu.

Věta (*Dirichletovo kritérium*). Nechť je $f(x)$ spojitá funkce a $g(x)$ je nezáporná spojitě diferencovatelná nerostoucí funkce na intervalu $(a, +\infty)$ a platí $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Nechť je funkce $F(y) = \displaystyle\int_a^y f(x)\, \mathrm{d}x$ omezená na intervalu $(a, +\infty)$. Pak integrál $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$ konverguje.

Toto kritérium by bylo možné aplikovat na integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\, \mathrm{d}x$, kde $0 < p \le 1$, pro který bychom mohli vzít $f(x) = \sin x$ a $g(x) = \dfrac{1}{x^p}$.