Přednáška 6

Riemannův integrál v $\mathbb{R}^n$

Osnova přednášky

1. Fubiniova věta.

2. Příklad $\displaystyle\iint_M y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde je $M \subset \mathbb{R}^2$ dána nerovnostmi $x^2 + y^2 - 2x \le 0$ a $x + y \ge 2$.

3. Příklad $M = \displaystyle\iiint_{\mathcal{T}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$ je dáno nerovnostmi

$$2x^2 + 2y^2 + z \le 9\,, \qquad x^2 + y^2 \le z + 3\,, \qquad x^2 + y^2 \ge 1\,.$$

4. Element plochy v polárních souřadnicích.

5. Regulární zobrazení a jakobiáln, element objemu.

6. Polární souřadnice.

7. Zobecněné polární souřadnice.

8. Cylindrické souřadnice; objem tětesa $x^2 + y^2 + z^2 \le 16$ a $-1 \le z \le 3$.

9. Zobecněné cylindrické souřadnice; objem tělesa $2x^2 + 3y^2 + z \le 4$, $z \ge 0$.

10. Sférické souřadnice.

11. Zobecněné sférické souřadnice

12. Jakobián inverzního zobrazení; objem tělesa

$$x < yz < 2x\,, \qquad y < xz < 3y\,, \qquad z < xy < 4z\,.$$

Pro výpočet Riemannova integrálu v $\mathbb{R}^n$ se používají dvě základní věty: Fubiniova věta a věta o substituci.

Fubiniova věta

Pomocí Fubiniovy věty převádíme integrál přes množinu v $\mathbb{R}^n$ na dva integrály v prostorech nižší dimenze. Body v prostoru $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{r+s}$ budeme psát jako uspořádanou dvojici $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$ a $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$. Pro danou množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ označíme $\Pi_{\mathbf{x}}$ kolmý průmět množiny M do nadroviny $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, tj.

$$\Pi_{\mathbf{x}} = \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r\,;\ \exists (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M\big\}\,.$$

Pro každé $\mathbf{x}_0 \in \Pi_{\mathbf{x}}$ definujeme množinu $\mathcal{S}(\mathbf{x}_0)$ jako průnik nadroviny $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \subset \mathbb{R}^n$ s množinou M, tj.

$$\mathcal{S}(\mathbf{x}_0) = \big\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s\,;\ (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) \in M\big\}\,.$$

`Poznámka.` Podle definice je pro každé $\mathbf{x}_0 \in \Pi_{\mathbf{x}}$ množina $\mathcal{S}(\mathbf{x}_0)$ neprázdná. Množinu $\mathcal{S}(\mathbf{x}_0)$ bychom mohli definovat pro každé $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^r$. Ale pro $\mathbf{x}_0 \notin \Pi_{\mathbf{x}}$, by bylo $\mathcal{S}(\mathbf{x}_0) = \emptyset$.

Podobně lze definovat množiny

$$\Pi_{\mathbf{y}} = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^s \,;\ \exists (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M \right\}$$

a pro $\mathbf{y}_0 \in \Pi_{\mathbf{y}}$ neprázdnou množinu

$$\mathcal{S}(\mathbf{y}_0) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r \,;\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) \in M \right\}.$$

Věta (*Fubiniova věta*). Nechť je $M \subset \mathbb{R}^n$ a funkce $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ integrovatelná na množině M. Nechť pro skoro všechna $\mathbf{x} \in \Pi_{\mathbf{x}}$, resp. pro skoro všechna $\mathbf{y} \in \Pi_{\mathbf{y}}$, existuje integrál

$$F(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{S}(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, \mathrm{d}y_1 \, \mathrm{d}y_2 \dots \, \mathrm{d}y_s \,,$$

respektive integrál

$$G(\mathbf{y}) = \int_{\mathcal{S}(\mathbf{y})} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \dots \, \mathrm{d}x_r \,.$$

Jestliže rozšíříme funkci $F(\mathbf{x})$ na množinu $\Pi_{\mathbf{x}}$ tak, že v bodech $\mathbf{x}$, kde není definována, položíme $F(\mathbf{x}) = 0$, respektive rozšíříme funkci $G(\mathbf{y})$ na množinu $\Pi_{\mathbf{y}}$ tak, že v bodech $\mathbf{y}$, kde není definována, položíme $G(\mathbf{y}) = 0$, platí rovnost

$$\int_M f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, \mathrm{d}x_1 \dots \, \mathrm{d}x_r \, \mathrm{d}y_1 \dots \, \mathrm{d}y_y = \int_{\Pi_{\mathbf{x}}} F(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}x_1 \dots \, \mathrm{d}x_r = \int_{\Pi_{\mathbf{y}}} G(\mathbf{y}) \, \mathrm{d}y_1 \dots \, \mathrm{d}y_s \,.$$

Význam Fubiniovy věty spočívá v tom, že její postupnou aplikací lze integrál v $\mathbb{R}^n$ najít pomocí n jednorozměrných integrálů.

Příklad. Najděte integrál $\displaystyle\iint_M y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, kde je množina $M \subset \mathbb{R}^2$ dána nerovnostmi

$$x^2 + y^2 - 2x \le 0 \,, \qquad x + y \ge 2 \,.$$

Řešení: Nejjednodušší je si množinu M nakreslit. Je dána jako průnik vnitřku kruhu $x^2 + y^2 - 2x \le 0$, tj. $(x-1)^2 + y^2 \le 1$ s polorovinou $x + y \ge 2$. Hranice kruhu, tj. kružnice $x^2 + y^2 - 2x = 0$, se s hranicí poloroviny, tj. přímkou $x + y = 2$, protíná v bodech $[1, 1]$ a $[2, 0]$.

Abychom spočítali daný integrál vybereme si nejprve pořadí integrace ve Fubiniově větě. Jestliže zvolíme

$$\iint_M y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{\Pi_x} \mathrm{d}x \int_{\mathcal{S}(x)} y \, \mathrm{d}y \,,$$

vidíme, že průmět množiny M na osu x, tj. množina $\Pi_x = \langle 1, 2 \rangle$. Tedy

$$\iint_M y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\mathcal{S}(x)} y \, \mathrm{d}y \,.$$

Pro dané $x \in \langle 1, 2\rangle$ sestrojíme množinu $\mathcal{S}(x)$. To je interval, jehož počáteční bod leží na přímce $x + y = 2$ a koncový bod na kružnici $x^2 + y^2 - 2x = 0$. Proto je pro dané x počáteční bod intervalu $\mathcal{S}(x)$ roven $y_1 = 2 - x$ a jeho koncový bod je $y_2 = \sqrt{2x - x^2}$. Podle Fubiniovy věty tedy je

$$\iint_M y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} y \,\mathrm{d}y = \int_1^2 \left[\tfrac{1}{2}\, y^2\right]_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} \mathrm{d}x = \int_1^2 \left(-2 + 3x - x^2\right) \mathrm{d}x = \tfrac{1}{6}\,.$$

Kdybychom zvolili Fubiniovu větu ve tvaru

$$\iint_M y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{\Pi_y} \mathrm{d}y \int_{\mathcal{S}(y)} y \,\mathrm{d}x\,,$$

zjistili bychom, že průmět Π_y množiny M na osu y je interval $\langle 0, 1\rangle$. Tedy podle Fubiniovy věty je

$$\iint_M y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\mathcal{S}(y)} y \,\mathrm{d}x\,.$$

Pro dané $y \in \langle 0, 1\rangle$ je množina $\mathcal{S}(y)$ interval s počátečním bodem $x = 2 - y$ a koncovým bodem, který leží na kružnici $x^2 - 2x + y^2 = 0$. Protože je dáno y, jedná se o kvadratickou rovnici pro x, jejíž řešení je $x_\pm = 1 \pm \sqrt{1 - y^2}$. Je tedy vidět, že množina $\mathcal{S}(y)$ je interval $\left\langle 2 - y, 1 + \sqrt{1 - y^2}\right\rangle$ a podle Fubiniovy věty platí

$$\begin{aligned}\iint_M y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \big[yx\big]_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} = \int_0^1 y\big(y - 1 + \sqrt{1 - y^2}\big) \,\mathrm{d}y = \\ &= \int_0^1 \big(y^2 - y + y\sqrt{1 - y^2}\big) \,\mathrm{d}y = \left[\tfrac{1}{3}\, y^3 - \tfrac{1}{2}\, y^2 - \tfrac{1}{3}\left(1 - y^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = \tfrac{1}{6}\,,\end{aligned}$$

kde jsme při výpočtu integrálu $\displaystyle\int y\sqrt{1 - y^2} \,\mathrm{d}y$ použili substituci $1 - y^2 = t$.

Jestliže neumíme nebo si z nějakého důvodu nechceme nakreslit množinu M, lze najít množiny Π_x a $\mathcal{S}(x)$, respektive Π_y a $\mathcal{S}(y)$, výpočtem. Nejprve si opět vybereme pořadí, ve kterém chceme integrovat. Například se rozhodneme, že použijeme Fubiniovu větu ve tvaru

$$\iint_M y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{\Pi_x} \mathrm{d}x \int_{\mathcal{S}(x)} y \,\mathrm{d}y\,.$$

Zvolíme pevné x a budeme pro toto x hledat množinu všech y, pro která jsou splněny nerovnice $x^2 + y^2 - 2x \le 0$ a $x + y \ge 2$, které definují množinu M. Tím najdeme množinu $\mathcal{S}(x)$. Množina Π_x je pak množina všech, pro které má tato soustava nerovnic aspoň jedno řešení.

Z uvedených nerovnic dostaneme

$$2 - x \le y \quad \text{a} \quad -\sqrt{2x - x^2} \le y \le \sqrt{2x - x^2}\,.$$

Je zřejmé, že musí platit $2x - x^2 \ge 0$, tj. $0 \le x \le 2$, a

$$\max\big(2 - x, -\sqrt{2x - x^2}\big) \le y \le \sqrt{2x - x^2}\,.$$

Protože pro $0 \le x \le 2$, je $-\sqrt{2x-x^2} \le 0 \le 2-x$, je $\max\bigl(2-x, -\sqrt{2x-x^2}\bigr) = 2-x$. Proto jsou dané nerovnice ekvivalentní nerovnicím

$$2 - x \le y \le \sqrt{2x-x^2}\,, \quad 0 \le x \le 2\,. \tag{1}$$

Z první nerovnosti získáme $\mathcal{S}(x) = \bigl\langle 2-x, \sqrt{2x-x^2}\bigr\rangle$, a tedy

$$\iint_M y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\Pi_x} \mathrm{d}x \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} y\,\mathrm{d}y = \int_{\Pi_x} \bigl(-2+3x-x^2\bigr)\,\mathrm{d}x\,,$$

kde množina Π_x je dána nerovnostmi

$$2 - x \le \sqrt{2x-x^2}\,, \quad 0 \le x \le 2\,.$$

`Poznámka:` První z těchto nerovností je skryta v první nerovnosti (1), ve které jsme vynechali y. V podstatě říká, že je horní mez v integrálu přes y větší než dolní. Formálně matematicky plyne tato nerovnost z faktu, že pokud x nerovnost nesplňuje, je množina $\mathcal{S}(x)$ prázdná.

Z těchto nerovností pak plyne, že $\Pi_x = \langle 1, 2\rangle$ a opět dostaneme

$$\iint_M y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \bigl(-2+3x-x^2\bigr)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{6}\,.$$

Kdybychom se rozhodli použít Fubiniovu větu ve tvaru

$$\iint_M y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\Pi_y} \mathrm{d}y \int_{\mathcal{S}(y)} y\,\mathrm{d}x\,,$$

hledali bychom pro dané y množinu všech x, pro která platí nerovnosti $x^2+y^2-2x \le 0$ a $x + y \ge 2$, tj. množinu $\mathcal{S}(y)$. Tato soustava nerovností je ekvivalentní se systémem nerovností

$$\max\bigl(2-y, 1-\sqrt{1-y^2}\bigr) \le x \le 1 + \sqrt{1-y^2}\,, \quad -1 \le y \le 1\,.$$

Protože pro $y \in \langle -1, 1\rangle$ je $1 - \sqrt{1-y^2} \le 1 \le 2-y$, vede tato soustava nerovností k nerovnostem

$$2 - y \le x \le 1 + \sqrt{1-y^2}\,, \quad -1 \le y \le 1\,. \tag{2}$$

Tedy množina $\mathcal{S}(y) = \Bigl\langle 2-y, 1+\sqrt{1-y^2}\Bigr\rangle$ a množina Π_y je daná nerovnostmi

$$2 - y \le 1 + \sqrt{1-y^2}\,, \quad -1 \le y \le 1\,,$$

kde první nerovnost je opět důsledkem první nerovnosti v (2). Z těchto nerovností pak zjistíme, že $\Pi_y = \langle 0, 1\rangle$. Tedy podle Fubiniovy věty je

$$\iint_M y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} y\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{6}\,.$$

Příklad. Najděte hmotnost tělesa $\mathcal{T}$, které je dáno nerovnostmi

$$2x^2 + 2y^2 + z \le 9\,, \qquad x^2 + y^2 - z \le 3\,, \qquad x^2 + y^2 \ge 1\,, \tag{3}$$

jehož hustota $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$.
Řešení: Hmotnost tělesa $\mathcal{T}$ je dána integrálem

$$M = \iiint_{\mathcal{T}} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\mathcal{T}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Geometricky je těleso $\mathcal{T}$ část průniku dvou rotačních paraboloidů $2x^2+2y^2+z \le 9$ a $x^2+y^2-z \le 3$, která leží vně válce $x^2+y^2 \le 1$.

Pokud si těleso $\mathcal{T}$ nechceme představovat geometricky, budeme muset meze v integrálech spočítat. Na tomto příkladě se pokusíme vysvětit, jak lze v podobných případech postupovat.

Pokud nerovnice (3) zapíšeme ve tvaru

$$x^2+y^2-3 \le z \le 9-2(x^2+y^2)\,, \qquad x^2+y^2 \ge 1\,,$$

vidíme, že pro dané x a y musí být $z \in \left\langle x^2+y^2-3, 9-2(x^2+y^2)\right\rangle$. Proto bude výhodné použít Fubiniovu větu ve tvaru

$$\begin{aligned} M = \iiint_{\mathcal{T}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint_{\Pi_{(x,y)}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{\mathcal{S}(x,y)} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}z = \\ &= \iint_{\Pi_{(x,y)}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{x^2+y^2-3}^{9-2(x^2+y^2)} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}z = \\ &= \iint_{\Pi_{(x,y)}} 3\bigl(4-x^2-y^2\bigr)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \end{aligned}$$

kde množina $\Pi_{(x,y)}$ je dána nerovnostmi

$$x^2+y^2-3 \le 9-2(x^2+y^2)\,, \qquad x^2+y^2 \ge 1\,,$$

neboli nerovnostmi

$$1 \le x^2+y^2 \le 4\,. \tag{4}$$

Průmět $\Pi_{(x,y)}$ tělesa $\mathcal{T}$ na rovinu (xy) je tedy mezikruží (4). Pokud bychom použili na intergál přes toto mezikruží Fubiniovu větu, dostali bychom

$$\begin{aligned} M = \int_{-2}^{-1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \\ + \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{1}^{2} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,, \end{aligned}$$

kde $f(x,y) = 3\bigl(4-x^2-y^2\bigr)\sqrt{x^2+y^2}$.

Tedy spočítali našli uvedený interál, musíme najít čtyři integrály. Navíc integace vede k integrálům typu

$$\int \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \qquad \text{a} \qquad \int y^2\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,,$$

jejichž výpočet není úplně snadný. Proto se při výpočtech často používá věta o substituci, pomocí které se snažíme zjednodušit popis množiny, přes kterou integrujeme.

Věta o substituci

Mnohdy se stává, že danou množinu M, přes kterou integrujeme, je jednodušší popsat pomocí jiných než kartézských souřadnic.

Například v předcházejícím příkladě jsme integrovali přes mezikruží $M = \Pi_{(x,y)}$ popsané nerovnicemi (4). Tato množina se ale snadněji popíše pomocí souřadnic r a φ, které jsou definovány vztahy

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \qquad r > 0\,, \quad \varphi \in (0, 2\pi)\,.$$

Jestliže z množiny M vynecháme hranici, která má míru nula a pro výpočet integrálu není podstatná, dostaneme po dosazení za x a y pro množinu M nerovnosti

$$1 \le r^2 \le 4\,. \tag{5}$$

Protože $r > 0$ a $\varphi \in (0, 2\pi)$ zjistíme, že množinu M lze popsat pomocí polárních souřadnic r a φ nerovnicemi

$$1 < r < 2\,, \qquad 0 < \varphi < 2\pi\,. \tag{6}$$

Jestliže do integrované funkce dosadíme za x a y a použijeme označení $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}S$, přejde integrál

$$\iint_{\Pi_{(x,y)}} 3\big(4 - x^2 - y^2\big)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Pi_{(x,y)}} 3\big(4 - x^2 - y^2\big)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}S \;\to$$
$$\to \iint_{\Pi_{(r,\varphi)}} 3(4 - r^2)r\,\mathrm{d}S\,,$$

kde je $\Pi_{(x,y)}$ je množina daná nerovnostmi (4) a $\Pi_{(r,\varphi)}$ množina daná nerovnostmi (6).

Ještě ale musíme pomocí r a φ vyjádřit plošný element $\mathrm{d}S$. Ten souvisel s dělením množiny, přes kterou integrujeme. Jestliže jsme rozdělili rovinu na malé obdélníky se stranami $\mathbf{t}_x = (\mathrm{d}x, 0)$ a $\mathbf{t}_y = (0, \mathrm{d}y)$, byl plošný element roven obsahu obdélníka se stranami $\mathbf{t}_x$ a $\mathbf{t}_y$, tj. $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Ale při integraci podle r a φ dělíme množinu v rovině $(r\varphi)$ a plošný obsah obdélníku v této rovině už nesouvisí tak jednoduše s plošným elementem v rovině (xy), který má skutečný geometrický význam. Proto musíme obsah $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$ z roviny $(r\varphi)$ "přepočítat".

V rovině $(r\varphi)$ uvažujme obdélníček $\Delta_{(r,\varphi)}$ s vrcholy v bodech (r, φ), $(r + \mathrm{d}r, \varphi)$, $(r + \mathrm{d}r, \varphi + \mathrm{d}\varphi)$ a $(r, \varphi + \mathrm{d}\varphi)$. Tomuto obdélníčku při zobrazení (5) přibližně odpovídá[1] v rovině (xy) rovnoběžník se stranami

$$\mathbf{t}_r \sim \Big(\frac{\partial x}{\partial r}\,\mathrm{d}r, \frac{\partial y}{\partial r}\,\mathrm{d}r\Big) = \big(\cos\varphi, \sin\varphi\big)\,\mathrm{d}r\,,$$

což je vlastně přibližný obraz úsečky z bodu (r, φ) do bodu $(r + \mathrm{d}r, \varphi)$ a

$$\mathbf{t}_\varphi \sim \Big(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi, \frac{\partial y}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi\Big) = \big(-r\sin\varphi, r\cos\varphi\big)\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

což je vlastně přibližný obraz úsečky z bodu (r, φ) do bodu $(r, \varphi + \mathrm{d}\varphi)$.

[1] až na veličiny druhého a vyššího řádu ve velmi malých proměnných $\mathrm{d}r$ a $\mathrm{d}\varphi$

Geometrický obsah, který odpovídá obdélníčku $\Delta_{(r,\varphi)}$, je pak přibližně roven obsahu rovnoběžníka se stranami $\mathbf{t}_r$ a $\mathbf{t}_\varphi$, tj.

$$\mathrm{d}S = \bigl|J(r,\varphi)\bigr|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

kde

$$J(r,\varphi) = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r}, & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}, & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi, & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi, & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r\,.$$

Z toho zjistíme, že $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$, a proto

$$\iint_{\Pi_{(x,y)}} 3\bigl(4-x^2-y^2\bigr)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Pi_{(r,\varphi)}} 3(4-r^2)\,r\,\bigl(r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\bigr)\,.$$

A protože je množina $\Pi_{(r,\varphi)}$ dána nerovnostmi (6), dostaneme pomocí Fubiniovy věty

$$M = \iint_{\Pi_{(x,y)}} 3\bigl(4-x^2-y^2\bigr)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Pi_{(r,\varphi)}} 3\bigl(4r^2-r^4\bigr)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int_1^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} 3\bigl(4r^2-r^4\bigr)\,\mathrm{d}\varphi = \tfrac{94}{5}\,\pi\,.$$

Veličina $J(r,\varphi)$, která sloužila k přepočtu objemu z roviny $(r\varphi)$ do roviny (xy) se nazývá jakobián a musíme ji počítat pro každou substituci. Úvahy podobného typu vedou k následující větě:

Věta (*o substituci*). Nechť je $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$ prosté regulární zobrazení[2] otevřené množiny $Y \subset \mathbb{R}^n$ na množinu $X \subset \mathbb{R}^n$. Nechť je $M \subset X$, funkce $f(\mathbf{x})$ je definovaná na M a

$$J(\mathbf{y}) = \frac{D(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{D(y_1,y_2,\ldots,y_n)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1}, & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial y_1}, & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}(\mathbf{y}) \neq 0 \tag{7}$$

je jakobián zobrazení $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$. Označme $\boldsymbol{\varphi}^{-1}(M)$ vzor množiny M, tj.

$$\boldsymbol{\varphi}^{-1}(M) = \bigl\{\mathbf{y} \in Y\,;\ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}) \in M\bigr\}\,.$$

Pak platí

$$\int_M f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\,\mathrm{d}x_n = \int_{\boldsymbol{\varphi}^{-1}(M)} f\bigl(\mathbf{x}(\mathbf{y})\bigr)\bigl|J(\mathbf{y})\bigr|\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2\ldots\,\mathrm{d}y_n\,,$$

[2]Zobrazení $\boldsymbol{\varphi}: Y \to X$ se nazývá regulární zobrazení množiny $Y \subset \mathbb{R}^n$ do množiny $X \subset \mathbb{R}^n$, jestliže je třídy $C_1(Y)$, tj. má na množině Y spojité všechny parciální derivace prvního řádu a jeho jakobián $J(\mathbf{y})$ je pro každé $\mathbf{y} \in Y$ nenulový.

pokud oba integrály existují.

Jakobián závisí pouze na substituci $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$, ne na integrované funkci $f(\mathbf{x})$ ani na množině M. Pro často užívané substituce je dobré jakobián znát, abychom jej nemuseli neustále počítat.

<u>**Polární souřadnice.**</u> V $\mathbb{R}^2$ se často používá substituce do polárních souřadnic r a φ, která je definována vztahy

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \qquad r > 0\,, \quad 0 < \varphi < 2\pi \quad \text{nebo} \quad -\pi < \varphi < \pi\,, \tag{8}$$

jejíž jakobián je $J(r, \varphi) = r$. Tato substituce se používá, když nerovnosti, které definují množinu M obsahují výrazy $x^2 + y^2$, protože tento výraz nezávisí na φ a je roven r^2.

<u>**Zobecněné polární souřadnice.**</u> Trochu obecnější je substituce

$$x = ar\cos\varphi\,, \quad y = br\sin\varphi\,, \qquad r > 0\,, \quad 0 < \varphi < 2\pi \quad \text{nebo} \quad -\pi < \varphi < \pi\,, \tag{9}$$

pro kterou je $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = r^2$ a jejíž jakobián je roven $J(r, \varphi) = abr$.

<u>**Válcové (cylindrické) souřadnice.**</u> Pro integrály v $\mathbb{R}^3$ se často používají válcové (cylindrické) souřadnice, které jsou definovány vztahy

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = z\,, \qquad r > 0\,, \quad 0 < \varphi < 2\pi\,, \quad z \in \mathbb{R}\,. \tag{10}$$

Tato substituce je vlastně zobecněním polárních souřadnic (8) a její jakobián je roven $J(r, \varphi, z) = r$.

Příklad. Najděte objem tělesa $\mathcal{T}$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 16\,, \qquad -1 \le z \le 3\,.$$

Řešení: Objem V těsesa $\mathcal{T}$ je dán integrálem

$$V = \iiint_{\mathcal{T}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Když použijeme válcové souřadnice (10), jejichž jakobián je $J = r$, dostaneme

$$V = \iiint_{\mathcal{T}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\widehat{\mathcal{T}}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\,,$$

kde množina $\widehat{\mathcal{T}} \subset \mathbb{R}^3$ je dána nerovnostmi

$$r > 0\,, \qquad 0 < \varphi < 2\pi\,, \qquad r^2 + z^2 \le 16\,, \qquad -1 < z < 3\,.$$

Z těchto nerovnic je vidět, že bude výhodné integrovat nejprve přes proměnnou φ. To dává

$$V = \iint_{\Omega} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \iint_{\Omega} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,,$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je dána nerovnostmi

$$r > 0 \,, \qquad r^2 + z^2 \le 16 \,, \qquad -1 < z < 3 \,.$$

Protože $r > 0$ jsiou tyto nerovnosti ekvivalentní nerovnostem

$$0 < r \le \sqrt{16 - z^2} \,, \qquad -1 < z < 3 \,.$$

Proto budeme nejprve integrovat přes proměnnou r. Tím dostaneme

$$V = 2\pi \iint_\Omega r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z = 2\pi \int_{\mathcal{I}} \mathrm{d}z \int_0^{\sqrt{16-z^2}} r \,\mathrm{d}r = \pi \int_{\mathcal{I}} (16 - z^2) \,\mathrm{d}z \,,$$

kde $\mathcal{I}$ je množina daná nerovnostmi

$$z^2 \le 16 \,, \quad -1 < z < 3 \quad \text{tj.} \quad -1 < z < 3 \,.$$

Tedy objem daného tělesa je

$$V = \pi \int_{-1}^{3} (16 - z^2) \,\mathrm{d}z = \tfrac{165}{3} \pi \,.$$

<u>Zobecněné válcové (zobecněné cylindrické) souřadnice.</u> Podobně jako v $\mathbb{R}^2$ lze definovat substituci

$$x = ar\cos\varphi \,, \quad y = br\sin\varphi \,, \quad z = z \,, \qquad r > 0 \,, \quad 0 < \varphi < 2\pi \,, \quad z \in \mathbb{R} \,, \tag{11}$$

jejíž jakobián je $J(r, \varphi, z) = abr$.

Příklad. Najděte objem tělesa $\mathcal{T}$, které je dáno nerovnostmi

$$2x^2 + 3y^2 + z \le 4 \,, \qquad z \ge 0 \,.$$

Řešení. Máme najít integrál

$$V = \iiint_{\mathcal{T}} \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \,.$$

Protože řezy tělesa s rovinami $z =$ konst. jsou elipsy, použijeme zobecněné válcové souřadnice (11). V našem konkrétní případě použijeme souřadnice

$$x = \tfrac{1}{\sqrt{2}} r\cos\varphi \,, \quad y = \tfrac{1}{\sqrt{3}} r\sin\varphi \,, \quad z = z \,, \qquad r > 0 \,, \quad 0 < \varphi < 2\pi \,, \quad z \in \mathbb{R} \,,$$

Protože jakobián této substituce je $J = \frac{1}{\sqrt{6}} r$, je objem tělesa $\mathcal{T}$ dán integrálem

$$V = \iiint_{\mathcal{T}} \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \iiint_{\widehat{\mathcal{T}}} \frac{r}{\sqrt{6}} \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z \,,$$

kde množina $\widehat{\mathcal{T}} \subset \mathbb{R}^3$ je dána nerovnostmi

$$r > 0 \,, \qquad 0 < \varphi < 2\pi \,, \qquad r^2 + z < 4 \,, \qquad z > 0 \,.$$

Po jednoduché integraci pře proměnnou φ, dostaneme

$$V = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\pi \iint_\Omega r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,,$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je dána nerovnostmi

$$r > 0\,, \quad r^2 + z < 4\,, \quad z > 0\,, \quad \text{tj.} \quad 0 < z < 4 - r^2\,, \quad r > 0\,.$$

Nyní můžeme integrovat přes proměnnou z a dostaneme

$$V = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\pi \int_{\mathcal{I}} r\big(4 - r^2\big)\,\mathrm{d}r\,,$$

kde $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ je dána nerovnostmi

$$r > 0\,, \quad r^2 < 4\,, \text{tj.} \quad 0 < r < 2\,.$$

Tedy objem daného tělesa je

$$V = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\pi \int_0^2 r\big(4 - r^2\big)\,\mathrm{d}r = 4\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\pi\,.$$

Sférické souřadnice. Pokud se v nerovnicích, které popisují množinu $M \subset \mathbb{R}^3$ vyskytují výrazy $x^2 + y^2 + z^2$, je někdy výhodné použít sférické souřadnice

$$\begin{gathered} x = r\cos\vartheta\cos\varphi\,, \quad y = r\cos\vartheta\sin\varphi\,, \quad z = r\sin\vartheta\,, \\ r > 0\,, \quad -\tfrac{1}{2}\pi < \vartheta < \tfrac{1}{2}\pi\,, \quad 0 < \varphi < 2\pi\,, \end{gathered} \tag{12}$$

protože v těchto souřadnicích je $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Jakobián substituce do sférických souřadnic je $J(r, \vartheta, \varphi) = r^2\cos\vartheta$.

Zobecněné sférické souřadnice. Tyto souřadnice lze zobecnit podobně jako polární souřadnice v rovině a definovat substituci

$$\begin{gathered} x = ar\cos\vartheta\cos\varphi\,, \quad y = br\cos\vartheta\sin\varphi\,, \quad z = cr\sin\vartheta\,, \\ r > 0\,, \quad -\tfrac{1}{2}\pi < \vartheta < \tfrac{1}{2}\pi\,, \quad 0 < \varphi < 2\pi\,, \end{gathered} \tag{13}$$

jejíž jakobián je $J(r, \vartheta, \varphi) = abcr^2\cos\vartheta$. V těchto souřadnicích platí $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{c^2} = r^2$.

`Poznámka:` Často bývá výhodnější přejít k souřadnicím (12) nebo (13) tak, že postupně použijeme substituce (10) a (8) nebo (11) a (9).

V některých případech je vidět, že pro výpočet integrálu bude výhodná substituce $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$. Ale věta o substituci je formulována pro její inverzní substituci $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y})$. Mezi jakobiány těchto substitucí platí vztah $J(\mathbf{y})\widehat{J}(\mathbf{x}) = 1$, kde $J(\mathbf{y})$ je jakobián substituce

$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y})$, který je dán vztahem (7), a $\widehat{J}(\mathbf{x})$ je jakobián substituce $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$, který je definován jako

$$\widehat{J}(\mathbf{x}) = \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_n}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} (\mathbf{x}) = \frac{1}{J\big(\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)} .$$

Proto stačí spočítat jakobián substituce $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$. Ale nesmíte zapomenout, že jakobián ve větě o substituci je $J(\mathbf{y}) = \big(\widehat{J}(\mathbf{x})\big)^{-1}$.

Příklad. Najděte objem tělesa $\mathcal{T}$, které je dané nerovnostmi

$$x < yz < 2x\,, \qquad y < xz < 3y\,, \qquad z < xy < 4z\,. \tag{14}$$

Řešení: Z nerovností (14) plyne, že x, y, $z > 0$. Proto lze tyto nerovnice zapsat jako

$$1 < \frac{yz}{x} < 2\,, \qquad 1 < \frac{xz}{y} < 3\,, \qquad 1 < \frac{xy}{z} < 4\,.$$

Proto se přímo nabízí zavést nové proměnné

$$u = \frac{yz}{x}\,, \qquad v = \frac{xz}{y}\,, \qquad w = \frac{xy}{z}\,, \tag{15}$$

ve kterých je těleso $\mathcal{T}$ popsáno nerovnostmi

$$1 < u < 2\,, \qquad 1 < v < 3\,, \qquad 1 < w < 4\,. \tag{16}$$

Objem tělesa $\mathcal{T}$ je dán integrálem

$$V = \iiint_{\mathcal{T}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\widehat{\mathcal{T}}} \big|J(u,v,w)\big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\,,$$

kde $\mathcal{T}$ je dáno nerovnostmi (14), $\widehat{\mathcal{T}}$ nerovnostmi (16) a

$$J(u,v,w) = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\,.$$

Ale protože máme máme substituci $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$, $w = w(x,y,z)$, museli bychom pro přímý výpočet jakobiánu $J(u,v,w)$ najít inverzní transformaci $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$. Jiná možnost je spočítat jakobián $\widehat{J}(x,y,z)$ substituce (15), neboli

$$\widehat{J}(x,y,z) = \frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \det \begin{pmatrix} -\frac{yz}{x^2}, & \frac{z}{x}, & \frac{y}{x} \\ \frac{z}{y}, & -\frac{xz}{y^2}, & \frac{x}{y} \\ \frac{y}{z}, & \frac{x}{z}, & -\frac{xy}{z^2} \end{pmatrix} = 4\,.$$

Tedy platí

$$J(u,v,w) = \frac{1}{\widehat{J}(x,y,z)} = \frac{1}{4}$$

a objem daného tělesa je $V = \frac{3}{2}$.