Přednáška 7

Křivkový a plošný integrál prvního druhu

Osnova přednášky

1. Regulární k–rozměrná plocha v $\mathbb{R}^n$; parametrické rovnice.

2. Míra elementu k–rozměrné regulární plochy v $\mathbb{R}^n$.

3. Element délky regulární křivky v $\mathbb{R}^n$.

4. Element regulární plochy v $\mathbb{R}^3$, tečné vektory a normála.

5. Integrál přes k–rozměrnou regulární plochu.

6. Křivkový integrál prvního druhu přes regulární křivku; příklad

$$\int_{\mathcal{C}} z\,\mathrm{d}s\,, \quad \text{kde} \quad x = t\cos t\,, \quad y = t\sin t\,, \quad z = t\,, \qquad 0 \le t \le 2\pi\,.$$

7. Plošný integrál prvního druhu přes regulární plochu v $\mathbb{R}^3$; příklad obsah plochy

$$x = u\cos v\,, \quad y = u\sin v\,, \quad z = v\,, \qquad 0 < v < u < 1\,.$$

8. Element plochy, která je daná jako graf funkce; příklad: obsah plochy

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25\,, \qquad z > 3\,.$$

9. Množiny míry nula.

10. Křivkový a plošný integrál prvního druhu.

V této přednášce zavedeme integrál funkce $f(\mathbf{x})$, která je definována na regulární k–rozměrné nadploše $\mathcal{S}$ přes tuto nadplochu. V principu lze postupovat stejně jako při definici Riemannova integrálu. Plochu $\mathcal{S}$ rozdělíme na konečný počet malých disjunktních kousků $\mathcal{S}_i$, u kterých známe jejich k-rozměrný obsah ΔS_i, vybereme body $\mathbf{x}_i \in \mathcal{S}_i$, vytvoříme součet $I = \sum\limits_i f(\mathbf{x}_i)\Delta S_i$ a přejdeme k limitě $\Delta = \max\bigl(\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n\bigr) \to 0$.

U Riemannova integrálu bylo důležité, že jsme daný objem rozdělili na kvádry, jejich objem jsme mohli snadno spočítat. U plochy už takové dělení obecně možné není. Proto musíme nejprve zjistit, jak spočítat velikosti malých plošek $\mathcal{S}_i$. Nejprve se budeme zabývat regulárními plochami, u kterých lze velikost těchto plošek najít pomocí parametrických rovnic.

Takové nadplochy se popisují pomocí zobrazení $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$, kde G je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^k$ pro $k < n$. Než přejdeme k popisu těchto ploch, budeme definovat některé potřebné pojmy.

Definice. Nechť je $S \subset \mathbb{R}^n$. Množina $M \subset S$ se nazývá *otevřená v množině* S, jestliže existuje otevřená množina $U \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $M = U \cap S$.

Je-li $\mathbf{a} \in S$ a $U_\varepsilon(\mathbf{a})$ otevřené ε–ové okolí bodu $\mathbf{a}$ v $\mathbb{R}^n$, nazýváme množinu $V_\varepsilon(\mathbf{a}) = U_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap S$ ε–ové okolí bodu $\mathbf{a}$ v množině S.

Definice. Neprázdnou množinu $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ nazýváme *k–rozměrnou nadplochou* (v $\mathbb{R}^n$), jestliže pro každý bod $\mathbf{a} \in \mathcal{S}$ existuje okolí $V_\varepsilon(\mathbf{a})$ bodu $\mathbf{a}$ v množině $\mathcal{S}$ a vzájemně jednoznačné zobrazení $\boldsymbol{\varphi} : G \to V_\varepsilon(\mathbf{a})$, kde $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina, takové, že obě zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ a $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$ jsou spojitá.

`Poznámky.` Ve složkách lze zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ zapsat jako

$$x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k)\,, \quad x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k)\,, \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_k)\,.$$

Tyto rovnice se nazývají *parametrické rovnice* nadplochy $\mathcal{S}$ v okolí bodu $\mathbf{a}$.
Jednorozměrné nadplochy se nazývají *křivky* a dvojrozměrné nadplochy nazýváme *plochy.*
Z definice k–rozměrné nadplochy $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ plyne, že každá neprázdná v $\mathcal{S}$ otevřená množina $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ je také k–rozměrná nadplocha.

My se budeme zabývat případem, kdy je zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ spojitě diferencovatelné.

Definice. Nechť je $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ k–rozměrná nadplocha. Jestliže pro každý bod $\mathbf{a} \in \mathcal{S}$ existuje okolí $V(\mathbf{a})$ v $\mathcal{S}$ a zobrazení $\boldsymbol{\varphi} : G \to V(\mathbf{a})$, kde G je otevřená množina v $\mathbb{R}^k$ takové, že

1. $\boldsymbol{\varphi}$ je vzájemně jednoznačné;
2. obě zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ a $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$ jsou spojitá;
3. zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ je třídy $C_m(G)$, tj. jeho složky mají na G spojité parciální derivace do řádu m včetně;
4. hodnost matice

$$\mathbf{W}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\varphi}'(t_1, \dots, t_k) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}, & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_2}, & \dots, & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_k} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t_1}, & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t_2}, & \dots, & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}, & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_2}, & \dots, & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_k} \end{pmatrix} (\mathbf{t}) \tag{1}$$

   je pro každé $\mathbf{t} \in G$ rovna k,

říkáme, že $\mathcal{S}$ je *regulární nadplocha* (třídy C_m). Zobrazeni $\boldsymbol{\varphi}$ pak nazýváme regulárním parametrickým popisem (třídy C_m) okolí $V(\mathbf{a})$.

Vektory $\mathbf{v}_i$, kde $i = 1, 2, \dots, k$, definované vztahy

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{t}) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_i}(\mathbf{t}) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_i}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i} \right)$$

jsou tečné vektory k ploše $\mathcal{S}$ v bodě $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t})$ a výraz

$$\left\| \boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{t}) \right\| = \sqrt{\det\bigl(\mathbf{W}(\mathbf{t})\mathbf{W}^T(\mathbf{t})\bigr)} \tag{2}$$

má geometrický význam k–rozměrného objemu rovnoběžníka se stranami $\mathbf{v}_i(\mathbf{t})$. Podmínka (1) geometricky znamená, že dimenze tečného prostoru ke k–rozměrné nadploše $\mathcal{S}$ je v každém bodě nadplochy rovna k.

Vztah (2) lze zapsat různými způsoby. Uvedeme dva z nich.

Pomocí skalárních součinů tečných vektorů $\mathbf{v}_i$ lze psát

$$\left\|\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{t})\right\|^2 = \det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1, & \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2, & \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_3, & \dots & \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_1, & \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2, & \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_3, & \dots & \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_3\cdot\mathbf{v}_1, & \mathbf{v}_3\cdot\mathbf{v}_2, & \mathbf{v}_3\cdot\mathbf{v}_3, & \dots & \mathbf{v}_3\cdot\mathbf{v}_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_k\cdot\mathbf{v}_1, & \mathbf{v}_k\cdot\mathbf{v}_2, & \mathbf{v}_k\cdot\mathbf{v}_3, & \dots & \mathbf{v}_k\cdot\mathbf{v}_k \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Jiná forma zápisu vztahu (2) je

$$\left\|\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{t})\right\|^2 = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} A^2_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\,, \tag{4}$$

kde $A_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ jsou subdeterminanty řádu k, tj.

$$A_{i_1,i_2,\ldots,i_k} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_{i_1}}{\partial t_1}, & \frac{\partial\varphi_{i_2}}{\partial t_1}, & \frac{\partial\varphi_{i_3}}{\partial t_1}, & \dots, & \frac{\partial\varphi_{i_k}}{\partial t_1} \\ \frac{\partial\varphi_{i_1}}{\partial t_2}, & \frac{\partial\varphi_{i_2}}{\partial t_2}, & \frac{\partial\varphi_{i_3}}{\partial t_2}, & \dots, & \frac{\partial\varphi_{i_k}}{\partial t_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_{i_1}}{\partial t_k}, & \frac{\partial\varphi_{i_2}}{\partial t_k}, & \frac{\partial\varphi_{i_3}}{\partial t_k}, & \dots, & \frac{\partial\varphi_{i_k}}{\partial t_k} \end{pmatrix}.$$

Uvedeme příklady těchto vztahů, které se nejčastěji vyskytují v aplikacích:

1. Regulární křivka v prostoru $\mathbb{R}^n$. V tomto případě je $G = (a,b)$ otevřený interval a parametrické rovnice $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ jsou

$$x_1 = \varphi_1(t)\,,\quad x_2 = \varphi_2(t)\,,\quad \dots\,,\quad x_n = \varphi_n(t)\,,\qquad t\in(a,b)\,. \tag{5}$$

Tečný vektor je

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t}(t) = \bigl(\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \dots, \varphi_n'(t)\bigr)$$

a $\left\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\right\|$ je jeho délka, tj.

$$\left\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\right\| = \sqrt{(\varphi_1')^2 + (\varphi_2')^2 + \ldots + (\varphi_n')^2}\,. \tag{6}$$

2. Regulární plocha v prostoru $\mathbb{R}^3$. V tomto případě je G oblast, tj. otevřená souvislá množina, v $\mathbb{R}^2$. Parametrické rovnice $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(u,v)$ se často píší ve tvaru

$$x = x(u,v)\,,\quad y = y(u,v)\,,\quad z = z(u,v)\,,\qquad (u,v)\in G\,. \tag{7}$$

V každém bodě plochy existují dva lineárně nezávislé tečné vektory

$$\mathbf{t}_u = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v) = \Big(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\Big)\,, \qquad \mathbf{t}_v = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v) = \Big(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\Big).$$

Veličina $\|\boldsymbol{\varphi}'(u,v)\|$ je pak rovna obsahu rovnoběžníka se stranami $\mathbf{t}_u$ a $\mathbf{t}_v$ a lze ji spočítat jedním z výše uvedených obecných postupů. Například vztah (3) dává

$$\|\boldsymbol{\varphi}'(u,v)\|^2 = \det\begin{pmatrix} \mathbf{t}_u\cdot\mathbf{t}_u\,,\ \mathbf{t}_u\cdot\mathbf{t}_v \\ \mathbf{t}_v\cdot\mathbf{t}_u\,,\ \mathbf{t}_v\cdot\mathbf{t}_v \end{pmatrix} = E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)\,,$$

kde

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \mathbf{t}_u\cdot\mathbf{t}_u = \Big(\frac{\partial x}{\partial u}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial y}{\partial u}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial u}\Big)^2, \\ G(u,v) &= \mathbf{t}_v\cdot\mathbf{t}_v = \Big(\frac{\partial x}{\partial v}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial y}{\partial v}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial v}\Big)^2, \\ F(u,v) &= \mathbf{t}_u\cdot\mathbf{t}_v = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Velmi často se také používá vztah (4), podle kterého je

$$\|\boldsymbol{\varphi}'(u,v)\|^2 = A_{1,2}^2 + A_{1,3}^2 + A_{2,3}^2\,,$$

kde

$$A_{1,2} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad A_{1,3} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad A_{2,3} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Jestliže označíme $A_{1,2} = n_3$, $A_{1,3} = -n_2$, $A_{2,3} = n_1$, je

$$\|\boldsymbol{\varphi}'(u,v)\|^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \|\mathbf{n}\|^2\,,$$

kde

$$\mathbf{n} = \mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v$$

je vektorový součin tečných vektorů $\mathbf{t}_u$ a $\mathbf{t}_v$ a má tedy směr normály k ploše v bodě $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(u,v)$.

<u>*3. Regulární plocha zadaná jako graf funkce.*</u> Jestliže je regulární $(n-1)$–rozměrná nadplocha v $\mathbb{R}^n$ dána jako graf funkce, tj. je definována rovnicí $x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, lze za její parametrické rovnice $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$ vzít

$$x_1 = t_1\,, \quad x_2 = t_2\,, \quad \ldots, \quad , x_{n-1} = t_{n-1}\,, \quad x_n = f(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})\,.$$

Příslušné tečné vektory jsou

$$\mathbf{t}_1 = \Big(1, 0, \ldots, 0, \frac{\partial f}{\partial t_1}\Big), \quad \mathbf{t}_2 = \Big(0, 1, \ldots, 0, \frac{\partial f}{\partial t_2}\Big), \quad \ldots, \quad \mathbf{t}_{n-1} = \Big(0, 0, \ldots, 1, \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}}\Big)\,.$$

Ze vztahu (4) pak dostaneme

$$\|\boldsymbol{\varphi}'\| = \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial f}{\partial t_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial t_2}\Big)^2 + \ldots + \Big(\frac{\partial f}{\partial t_{n-1}}\Big)^2}\,.$$

Speciálně v případě plochy v $\mathbb{R}^3$ dané jako graf funkce $z = z(x,y)$ je pro parametrické rovnice tvaru $\boldsymbol{\varphi}(x,y) = \big(x, y, z(x,y)\big)$, tj. $x = x$, $y = y$, $z = z(x,y)$,

$$\big\|\boldsymbol{\varphi}'(x,y)\big\|^2 = \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2}\,. \tag{9}$$

Pomocí parametrických rovnic se pak definuje k-rozměrný obsah jistých podmnožin $M \subset \mathcal{S}$, který se často nazývá k-rozměrná míra množiny M a značí se $\mu_{\mathcal{S}}(M)$. Postupuje se následujícím způsobem:

Parametrické rovnice $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t})$ zobrazují prostor parametrů, což jsou pomocné proměnné, do reálného prostoru $\mathbb{R}^n$. Prostor parametrů rozdělíme na malé kvádry

$$\Delta\mathcal{I} = \langle t_1, t_1 + \Delta t_1\rangle \times \langle t_2, t_2 + \Delta t_2\rangle \times \ldots \times \langle t_k, t_k + \Delta t_k\rangle\,.$$

Jestliže jsou Δt_i malá, zobrazí se kvádr $\Delta\mathcal{I}$ při zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ na k-rozměrný křivočarý rovnoběžnostěn $\Delta\mathcal{S} = \boldsymbol{\varphi}(\Delta\mathcal{I}) \subset \mathcal{S}$, jehož hrany $\Delta\mathbf{x}_i$ jsou obrazy stran kvádru $\Delta\mathcal{I}$, tj.

$$\Delta\mathbf{x}_i = \boldsymbol{\varphi}(t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, \tau, t_{i+1}, \ldots, t_k)\,, \qquad \tau \in \langle t_i, t_i + \Delta t_i\rangle\,.$$

Pro malá Δt_i nahradíme křivočarý rovnoběžnostěn $\Delta\mathcal{S}$ rovnoběžnostěnem, jehož strany jsou úsečky, které spojují body

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \quad \text{a} \quad \mathbf{x}_i = \boldsymbol{\varphi}(t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, t_i + \Delta t_i, t_{i+1}, \ldots, t_k)\,.$$

V prostoru $\mathbb{R}^n$ tak dostaneme k–rozměrný rovnoběžnostěn, jehož strany jsou vektory

$$\Delta\mathbf{x}_i = \boldsymbol{\varphi}(t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, t_i + \Delta t_i, t_{i+1}, \ldots, t_k) - \boldsymbol{\varphi}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \approx \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t})}{\partial t_i}\,\Delta t_i\,.$$

k–rozměrný obsah takového rovnoběžnostěnu je

$$\Delta S = \big\|\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{t})\big\|\,\Delta t_1\,.\Delta t_2\,\ldots\,\Delta t_k\,,$$

Jestliže pro parametrizaci $\boldsymbol{\varphi} : G \to \mathcal{S}$ je $M \subset \boldsymbol{\varphi}(G)$, definujeme k-rozměrnou míru množiny M vztahem

$$\mu_{\mathcal{S}}(M) = \int_{\boldsymbol{\varphi}^{(-1)}(M)} \big\|\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{t})\big\|\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\ldots\,\mathrm{d}t_k\,. \tag{10}$$

Tato míra se pak rozšíří na jistou třídu množin, tzv. σ–algebru měřitelných podmnožin nadplochy $\mathcal{S}$. Tento postup je standardní v teorii míry, ale nejen z časových důvodů jej zde nebudu uvádět.

`Poznámka.` Důležitá vlastnost míry definované vztahem (10) je, že nezávisí na parametrizaci regulární nadplochy $\mathcal{S}$.

Nechť je $\mathbf{a} \in \mathcal{S}$. Uvažujme dvě lokální parametrizace $\boldsymbol{\varphi} : G \to V(\mathbf{a})$ a $\boldsymbol{\psi} : H \to V(\mathbf{a})$ okolí bodu $\mathbf{a}$, tj. pro každé $\mathbf{x} \in V(\mathbf{a})$ je $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{s})$, kde $\mathbf{t} \in G$ a $\mathbf{s} \in H$.

Podle předpokladu existuje zobrazení $\boldsymbol{\varphi}^{(-1)} : V(\mathbf{a}) \to G$. Pak je $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\varphi}^{(-1)} \circ \boldsymbol{\psi} : H \to G$ vzájemně jednoznačné zobrazení, tj. platí $\mathbf{t} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{s})$. Podle předpokladů je toto zobrazení třídy $C_1(G)$. Protože pro každou množinu $M \subset V(\mathbf{a})$ je $\boldsymbol{\chi}^{(-1)}\big(\boldsymbol{\varphi}^{(-1)}(M)\big) = \boldsymbol{\psi}^{(-1)}(M)$, dostaneme z věty o substituci

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}^{(-1)}(M)} \big\|\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{t})\big\| \,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 \dots \mathrm{d}t_k = \int_{\boldsymbol{\psi}^{(-1)}(M)} \Big\|\boldsymbol{\varphi}'\big(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{s})\big)\Big\| \,\big|J(\mathbf{s})\big| \,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2 \dots \mathrm{d}s_k\,, \tag{11}$$

kde $J(\mathbf{s})$ je jakobián substituce $\mathbf{t} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{s})$, tj. $J(\mathbf{s}) = \det \boldsymbol{\chi}'(\mathbf{s})$.

Ze vztahu $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{s})$ plyne, že pro každé $\mathbf{s} \in H$ platí rovnost $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{s}) = \boldsymbol{\varphi}\big(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{s})\big)$. Matice $\mathbf{W}(\mathbf{t})$ pro parametrizaci $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t})$ a $\widehat{\mathbf{W}}(\mathbf{s})$ pro parametrizaci $\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{s})$ jsou podle (1) rovny

$$\mathbf{W}(\mathbf{t}) = \big(\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{t})\big)^T \qquad \text{a} \qquad \widehat{\mathbf{W}}(\mathbf{s}) = \big(\boldsymbol{\psi}'(\mathbf{s})\big)^T,$$

kde $\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{t})$ je matice derivace zobrazení $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t})$, $\boldsymbol{\psi}'(\mathbf{s})$ matice derivace zobrazení $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{s})$ a $\mathbf{A}^T$ značí transponovanou matici k matici $\mathbf{A}$. Podle věty o derivaci složené funkce je

$$\boldsymbol{\psi}'(\mathbf{s}) = \boldsymbol{\varphi}'\big(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{s})\big)\,\boldsymbol{\chi}'(\mathbf{s})\,,$$

a tedy

$$\widehat{\mathbf{W}}(\mathbf{s}) = \big(\boldsymbol{\psi}'(\mathbf{s})\big)^T = \Big(\boldsymbol{\varphi}'\big(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{s})\big)\,\boldsymbol{\chi}'(\mathbf{s})\Big)^T = \big(\boldsymbol{\chi}'(\mathbf{s})\big)^T \Big(\boldsymbol{\varphi}'\big(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{s})\big)\Big)^T = \big(\boldsymbol{\chi}'(\mathbf{s})\big)^T\,\mathbf{W}\big(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{s})\big).$$

Proto je

$$\begin{aligned}
\big\|\boldsymbol{\psi}(\mathbf{s})\big\|^2 &= \det\Big(\widehat{\mathbf{W}}(\mathbf{s})\widehat{\mathbf{W}}^T(\mathbf{s})\Big) = \det\Big(\big(\boldsymbol{\chi}'(\mathbf{s})\big)^T\,\mathbf{W}\big(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{s})\big)\ \big(\mathbf{W}\big(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{s})\big)\big)^T\ \boldsymbol{\chi}'(\mathbf{s})\Big) = \\
&= \det\big(\boldsymbol{\chi}'(\mathbf{s})\big)^T\,\det\Big(\mathbf{W}\big(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{s})\big)\ \big(\mathbf{W}\big(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{s})\big)\big)^T\Big)\,\det\boldsymbol{\chi}'(\mathbf{s}) = \\
&= \Big\|\boldsymbol{\varphi}'\big(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{s})\big)\Big\|^2\,\big(\det\boldsymbol{\chi}'(\mathbf{s})\big)^2 = \Big\|\boldsymbol{\varphi}'\big(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{s})\big)\Big\|^2\,J^2(\mathbf{s})\,.
\end{aligned}$$

Vztah (11) pak dává

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}^{(-1)}(M)} \big\|\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{t})\big\| \,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 \dots \mathrm{d}t_k = \int_{\boldsymbol{\psi}^{(-1)}(M)} \big\|\boldsymbol{\psi}'(\mathbf{s})\big\| \,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2 \dots \mathrm{d}s_k\,,$$

a tedy míra množiny $M \subset \mathcal{S}$ nezávisí na volbě parametrizace nadplochy $\mathcal{S}$.

Další důležitá vlastnost míry $\mu_{\mathcal{S}}$ na regulární k–rozměrné nadploše $\mathcal{S}$ je to, že regulární nadplocha dimenze menší než k má k–rozměrnou míru nula.

Věta. Je-li $M \subset \mathcal{S}$ regulární r–rozměrná nadplocha, kde $r < k$, je $\mu_{\mathcal{S}}(M) = 0$.

Když máme na regulární k–rozměrné nadploše definovanou míru, lze standardním postupem zavést integrál jistých, tzv. měřitelných funkcí $f(\mathbf{x})$, přes měřitelnou podmnožinu $M \subset \mathcal{S}$. K přesné definici bychom se potřebovali odvolat na obecnou teorii integrálu, ale pro naše účely postačí vědět, že každá spojitá funkce je měřitelná.

Definice. Nechť je $\mathcal{S}$ regulární k–rozměrná nadplocha v $\mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{\varphi} : G \to \mathcal{S}$ její parametrický popis. Nechť je $M \subset \mathcal{S}$ měřitelná množina, $M \subset \boldsymbol{\varphi}(G)$ a $f(\mathbf{x})$ měřitelná funkce na M. Pak definujeme integrál funkce $f(\mathbf{x})$ přes množinu $M \subset \mathcal{S}$ vztahem

$$\int_M f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{S}} = \int_{\boldsymbol{\varphi}^{(-1)}(M)} f\big(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t})\big)\,\big\|\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{t})\big\|\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_k\,. \tag{12}$$

Je-li $\mathcal{S} = \mathcal{C}$ regulární křivka, obvykle píšeme tento integrál jako $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}s$ a nazýváme jej *křivkový integrál prvního druhu.*

Jestliže je $\mathcal{S}$ regulární plocha v $\mathbb{R}^3$, budeme tento integrál nazývat *plošný integrál prvního druhu* a používat pro něj značení $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$.

`Poznámka.` Podobným způsobem jako pro míru množiny lze ukázat, že integrál (12) nezávisí na parametrizaci regulární nadplochy $\mathcal{S}$.

Uvedeme ještě konkrétní tvar integrálu na pravé straně rovnosti (12) v případech, které se často objevují při výpočtech.

1. Křivkový integrál prvního druhu v $\mathbb{R}^n$. Jestliže je regulární křivka $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ dána parametrickými rovnicemi $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$, kde $t \in (a, b)$, tj. rovnicemi (5), je podle (6)

$$\int_{\mathcal{C}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s = \int_a^b f\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big)\,\sqrt{(\varphi_1')^2 + (\varphi_2')^2 + \ldots + (\varphi_n')^2}\,\mathrm{d}t\,. \tag{13}$$

Tento vztah se poměrně snadno zapamatuje, pokud zavedeme tzv. *element délky*

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\varphi_1')^2 + (\varphi_2')^2 + \ldots + (\varphi_n')^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Speciálně pro křivku v prostoru $\mathbb{R}^3$ s parametrickými rovnicemi

$$x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,, \quad z = z(t)\,, \qquad t \in (a, b)$$

je

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t$$

a

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\,\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Podobné vztahy platí pro křivku $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$, kde musíme samozřejmě vynechat proměnnou z.

Příklad. Najděte integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} z\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C}$ je jeden závit kuželové šroubovice

$$x = t\cos t\,, \quad y = t\sin t\,, \quad z = t\,, \qquad 0 \le t \le 2\pi\,.$$

Řešení. Protože

$$x'(t) = \cos t - t\sin t\,, \qquad y'(t) = \sin t + t\cos t\,, \qquad z'(t) = 1\,,$$

je

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Tedy hledaný integrál je

$$\int_{\mathcal{C}} z\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\tfrac{1}{3}\left(2+t^2\right)^{3/2}\Big]_0^{2\pi} = \tfrac{1}{3}\Big(\left(2+4\pi^2\right)^{3/2} - 2\sqrt{2}\Big)\,.$$

2. Plošný integrál prvního druhu v $\mathbb{R}^3$. Jestliže je $\mathcal{S}$ plocha v $\mathbb{R}^3$ s parametrickými rovnicemi (7), najdeme element plochy dS tak, že nejprve spočítáme tečné vektory

$$\mathbf{t}_u = \Big(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\Big) \quad \text{a} \quad \mathbf{t}_v = \Big(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\Big).$$

Pomocí těchto vektorů pak určíme normálový vektor

$$\mathbf{n}(u,v) = \mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v$$

a plošný element dS je pak roven

$$\mathrm{d}S = \big\|\mathbf{n}(u,v)\big\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Tedy plošný integrál prvního druhu najdeme jako dvojný integrál

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{\Omega} f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)\big\|\mathbf{n}(u,v)\big\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Pro plošný element lze také použít vztah

$$\mathrm{d}S = \sqrt{\det\begin{pmatrix}\mathbf{t}_u\cdot\mathbf{t}_u\,, & \mathbf{t}_u\cdot\mathbf{t}_v\\ \mathbf{t}_v\cdot\mathbf{t}_u\,, & \mathbf{t}_v\cdot\mathbf{t}_v\end{pmatrix}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,$$

kde $E(u,v)$, $F(u,v)$ a $G(u,v)$ jsou dány vztahy (8). Pak je

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{\Omega} f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)\sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Příklad. Najděte obsah plochy $\mathcal{S}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = u\cos v\,,\quad y = u\sin v\,,\quad z = v\,,\qquad 0 < v < u < 2\pi\,.$$

Řešení. Tečné vektory k ploše $\mathcal{S}$ jsou

$$\mathbf{t}_u = (\cos v, \sin v, 0)\,,\qquad \mathbf{t}_v = (-u\sin v, u\cos v, 1)\,.$$

Tedy

$$\mathbf{n}(u,v) = \mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v = (\sin v, -\cos v, u)\,,\qquad \mathrm{d}S = \big\|\mathbf{n}(u,v)\big\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Obsah P plochy$\mathcal{S}$ pak je

$$P = \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S = \iint_{\Omega} \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je dána nerovnostmi $0 < v < u < 2\pi$. Tedy

$$P = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}u \int_0^u \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} u\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{3}\,\big((1+4\pi^2)^{3/2} - 1\big)\,.$$

3. Plocha v $\mathbb{R}^3$ parametrizovaná jako graf funkce. Jestliže je $\mathcal{S}$ plocha v $\mathbb{R}^3$ popsaná rovnicí $z = z(x,y)$, kde $(x,y) \in \Omega$, tj. je graf funkce $z = z(x,y)$, je

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

a pro plošný integrál prvního druhu platí

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{\Omega} f\big(x,y,z(x,y)\big)\sqrt{1 + \Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Příklad. Najděte obsah části kulové plochy

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25\,, \qquad z > 3\,.$$

Řešení. Protože je $z > 0$ lze plochu popsat jako graf funkce

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}\,, \qquad \sqrt{25 - x^2 - y^2} > 3\,, \quad \text{tj.} \quad x^2 + y^2 < 16\,.$$

Proto dostaneme

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{5\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$$

a obsah P dané plochy je

$$P = \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S = \iint_{x^2+y^2<16} \frac{5\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\,.$$

Když pro výpočet posledního integrálu použijeme polární souřadnice

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \qquad r > 0\,, \quad 0 < \varphi < 2\pi\,,$$

je jakobián $J = r$ a pro obsah plochy $\mathcal{S}$ dostaneme

$$P = \int_0^4 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \frac{5r\,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{25 - r^2}} = 10\pi \int_0^4 \frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{25 - r^2}} = 10\pi\Big[-\sqrt{25 - r^2}\Big]_0^4 = 20\pi\,.$$

Zatím jsme zavedli integrály přes regulární k–rozměrné nadplochy v $\mathbb{R}^n$. Podstatné bylo, že regulární nadplocha je popsána alespoň lokálně pomocí parametrických rovnic, které mají spojité parciální derivace a matice $\mathbf{W}(\mathbf{t})$ má hodnost k. To geometricky znamená, že regulární nadplocha má v každém svém bodě k lineárně nezávislých tečných vektorů, které se mění spojitě na nadploše $\mathcal{S}$. Tímto způsobem nelze ale obecně popsat všechny body množiny $\mathcal{S}$. Například je-li $\mathcal{S}$ hranice krychle, nejsme schopni tímto způsobem popsat její hrany a vrcholy. Přesto by bylo dobré, mít možnost přes takové plochy integrovat. Proto trochu rozšíříme třídu nadploch, přes které lze počítat integrály.

Nejjednodušší, a pro nás zcela postačující, je to udělat tak, že budeme uvažovat plochu $\mathcal{S}$, která je sjednocením konečného počtu regulárních nadploch a množiny N, která má k–rozměrnou míru rovnou nule. Takové množiny N jsou například konečná (obecněji spočetná) sjednocení regulárních r–rozměrných nadploch, kde $r < k$. Z tohoto hlediska se snad zřejmá následující definice.

Definice. Nechť je množina $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ rovna

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{S}_i \cup N \,,$$

kde $\mathcal{S}_i$ jsou navzájem disjunktní regulární k–rozměrné nadplochy a N je konečné sjednocení regulárních nadploch dimenze menší než k. Nechť je $M \subset \mathcal{S}$. Pak definujeme

$$\int_M f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu_S = \sum_{i=1}^{r} \int_{\mathcal{S}_i \cap M} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu_S \,,$$

kde integrály na pravé straně jsou integrály přes regulární k–rozměrné nadplochy definované vztahem (12).