Přednáška 8

Křivkový a plošný integrál druhého druhu

Osnova přednášky

1. Práce vektorového pole po křivce.

2. Křivkový integrál prvního druhu přes regulární křivku.

3. Orientace regulární křivky.

4. Tok vektorového pole regulární plochou.

5. Plošný integrál druhého druhu přes regulární plochu v $\mathbb{R}^3$.

6. Orientace regulární plochy.

7. Různé zápisy plošného integrálu druhého druhu.

8. Křivka a její orientace.

9. Křivkový integrál druhého druhu.

10. Příklad: práce síly $\mathbf{f} = z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, po hranici oblasti $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, x, y, $z \geq 0$.

11. Plocha v $\mathbb{R}^3$ a její orientace.

12. Plošný integrál druhého druhu.

13. Tok vektoru $\mathbf{v} = -(x + y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ plochou $z = x^2 + y^2$, $z < 1$.

Práce vektorového pole po křivce

Ve fyzice se řeší úloha najít práci, kterou vykoná silové pole $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \big(f_x(\mathbf{x}), f_y(\mathbf{x}), f_z(\mathbf{x})\big)$, když působí po křivce $\mathcal{C}$. Tuto úlohu můžeme řešit tak, že křivku $\mathcal{C}$ rozdělíme body $\mathbf{x}_i$ na malé úseky a nahradíme ji lomenou čarou $\mathcal{L}$ s vrcholy v bodech $\mathbf{x}_i$. Malý úsek mezi body $\mathbf{x}_i$ a $\mathbf{x}_{i+1}$ lomené čáry $\mathcal{L}$ je úsečka určená počátečním bodem $\mathbf{x}_i$ a vektorem

$$\Delta\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i \,.$$

Délku této úsečky označme $\Delta s_i = \big\|\Delta\mathbf{x}_i\big\|$. Z fyziky je známo, že práce síly $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ po této úsečce je

$$\Delta A_i = f_{\|}(\mathbf{x}_i)\,\Delta s_i \,,$$

kde $f_{\|}(\mathbf{x}_i)$ je kolmý průmět síly $\mathbf{f}$ do směru určeného vektorem $\Delta\mathbf{x}_i$. Je-li α úhel mezi vektory $\mathbf{f}$ a $\Delta\mathbf{x}_i$, je $f_{\|}(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i)\cos\alpha$, kde $f(\mathbf{x}_i) = \big\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)\big\|$ je velikost vektoru $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$. Proto je práce síly $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ úsečce, která spojuje body $\mathbf{x}_i$ a $\mathbf{x}_{i+1}$ rovna

$$\Delta A_i = f(\mathbf{x}_i)\cos\alpha\,\Delta s_i \,.$$

Označme $\boldsymbol{\tau}_i$ jednotkový vektor ve směru $\Delta\mathbf{x}_i$, tj.

$$\boldsymbol{\tau}_i = \frac{\Delta\mathbf{x}_i}{\|\Delta\mathbf{x}_i\|} = \frac{\Delta\mathbf{x}_i}{\Delta s_i} \,.$$

Pak lze pomocí skalárního součinu psát

$$f_{\|}(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i)\cos\alpha = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)\cdot\boldsymbol{\tau}_i$$

a práce po malé úsečce je rovna

$$\Delta A_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)\cdot\boldsymbol{\tau}_i\,\Delta s_i = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)\cdot\Delta\mathbf{x}_i}{\Delta s_i}\,\Delta s_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)\cdot\Delta\mathbf{x}_i\,.$$

Jestliže sečteme práci po všech malých úsečkách dostaneme pro práci A silového pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ po křivce $\mathcal{C}$

$$A \approx \sum_i \Delta A_i = \sum_i \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)\cdot\Delta\mathbf{x}_i = \sum_i \Big(f_x(\mathbf{x}_i)\Delta x_i + f_y(\mathbf{x}_i)\Delta x_i + f_z(\mathbf{x}_i)\Delta z_i\Big)\,.$$

A když přejdeme k limitě $\Delta\mathbf{x}_i \to 0$, dostaneme na pravé straně Riemannův integrál

$$A = \int_{\mathcal{C}} \Big(f_x(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x + f_y(\mathbf{x})\,\mathrm{d}y + f_z(\mathbf{x})\,\mathrm{d}z\Big)\,.$$

Jestliže je křivka $\mathcal{C}$ regulární a její parametrizaci $\boldsymbol{\varphi} : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ budeme psát ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)\,,$$

jak je při výpočtech zvykem, odpovídá dělení křivky $\mathcal{C}$ na malé úseky body $\mathbf{x}_i$ jistému dělení intervalu (a,b) body t_i takovými, že $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(t_i)$. Pak je

$$\Delta\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(t_{i+1}) - \mathbf{x}(t_i) \approx \mathbf{x}'(t_i)\,\Delta t_i\,,$$

kde $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ nebo ve složkách

$$\begin{aligned}
\Delta x_i &= x(t_{i+1}) - x(t_i) \approx x'(t_i)\,\Delta t_i\,,\\
\Delta y_i &= y(t_{i+1}) - y(t_i) \approx y'(t_i)\,\Delta t_i\,,\\
\Delta z_i &= z(t_{i+1}) - z(t_i) \approx z'(t_i)\,\Delta t_i\,.
\end{aligned}$$

Pro práci po křivce $\mathcal{C}$ pak platí

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \Big(f_x(t_i)\,x'(t_i) + f_y(t_i)\,y'(t_i) + f_z(t_i)\,z'(t_i)\Big)\Delta t_i$$

a když přejdeme k limitě $\Delta t_i \to 0$ dostaneme pro práci vyjádření pomocí Riemannova integrálu

$$A = \int_a^b \Big(f_x\big(\mathbf{x}(t)\big)x'(t) + f_y\big(\mathbf{x}(t)\big)y'(t) + f_z\big(\mathbf{x}(t)\big)z'(t)\Big)\,\mathrm{d}t\,.$$

Jestliže ještě zavedeme vektor $\mathrm{d}\mathbf{s} = \big(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\big) = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)\,\mathrm{d}t$, lze práci zapsat pomocí těchto značek jako

$$A = \int_{\mathcal{C}} \big(f_x(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x + f_y(\mathbf{x})\,\mathrm{d}y + f_z(\mathbf{x})\,\mathrm{d}z\big) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s}\,,$$

kde v posledním výrazu si pod $\mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s}$ musíme představit skalární součin vektorů $\mathbf{f}$ a $\mathrm{d}\mathbf{s}$.

Jak je známo, závisí práce, kterou vykoná síla, na směru, ve kterém křivku probíháme. Pokud budeme křivku probíhat v opačném směru, změní se znaménko práce. Pro regulární křivku $\mathcal{C}$ lze směr pohybu po křivce $\mathcal{C}$ zadat směrem tečného vektoru $\mathbf{t}$. Proto musíme při výpočtu práce síly $\mathbf{f}$ po regulární křivce $\mathcal{C}$ zadat aspoň v jednom bodě regulární křivky směr tečného vektoru, ve kterém se po křivce pohybujeme, tzv. orientaci křivky. Protože jsme při definici regulární křivky předpokládali, že se tečný vektor mění na křivce spojitě a je v každém bodě nenulový, je směrem tečny v jednom bodě regulární křivky $\mathcal{C}$ určen směr ve všech jejích bodech.

Tok vektorového pole plochou

Další fyzikální úlohou, kterou se budeme zabývat, je tok vektoru $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ plochou $\mathcal{S}$. Slovy lze tuto úlohu formulovat takto: Je dána plocha $\mathcal{S}$, přes kterou proudí kapalina rychlostí $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. Ptáme se, kolik kapaliny proteče plochou $\mathcal{S}$ za jednotku času.

Abychom tuto úlohu vyřešili, rozdělíme nejprve plochu $\mathcal{S}$ na konečný počet malých plošek $\Delta\mathcal{S}_i$ tak, abychom mohli rychlost proudění $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ v každé plošce považovat za konstantní a rovnou $\mathbf{v}(\mathbf{x}_i)$, kde $\mathbf{x}_i \in \Delta\mathcal{S}_i$. Ploškou $\Delta\mathcal{S}_i$ pak za jednotku času proteče kapalina objemu

$$\Delta V_i = v_\perp(\mathbf{x}_i)\,\Delta S_i\,,$$

kde $v_\perp(\mathbf{x}_i)$ je průmět rychlosti kapaliny do směru kolmého k plošce $\Delta\mathcal{S}_i$ a ΔS_i je obsah této plošky. Celkový objem kapaliny pak je

$$V \approx \sum_i \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} v_\perp(\mathbf{x}_i)\,\Delta S_i\,.$$

Když přejdeme k limitě $\Delta S_i \to 0$, dostaneme vyjádření tohoto objemu pomocí plošného integrálu prvního druhu

$$V = \iint_{\mathcal{S}} v_\perp(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S\,.$$

Do tohoto vztahu ještě dosadíme za $v_\perp(\mathbf{x})$. Pro průmět vektoru rychlosti do směru kolmého k ploše $\mathcal{S}$ v bodě $\mathbf{x}$ platí

$$v_\perp(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})\cos\alpha\,,$$

kde α je úhel mezi vektorem rychlostí $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ a vektorem normály $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ k ploše $\mathcal{S}$ v jejím bodě $\mathbf{x}$. Pomocí skalárního součinu lze tedy psát

$$v_\perp(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{n}(\mathbf{x})\|}$$

a plochou $\mathcal{S}$ proteče za jednotku času objem

$$V = \iint_{\mathcal{S}} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{n}(\mathbf{x})\|}\,\mathrm{d}S = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,,$$

kde jsme zavedli označení

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{\mathbf{n}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{n}(\mathbf{x})\|}\,\mathrm{d}S\,.$$

Je-li $\mathcal{S}$ regulární plocha s parametrizací $\boldsymbol{\varphi} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, kterou budeme psát jako

$$x = x(u,v)\,, \quad y = y(u,v)\,, \quad z = z(u,v)\,, \qquad (u,v) \in \Omega\,, \tag{1}$$

je normála dána vztahem

$$\mathbf{n} = \mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{t}_u = \Big(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\Big), \quad \mathbf{t}_v = \Big(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\Big) \tag{2}$$

jsou tečné vektory k ploše $\mathcal{S}$. Ale protože je v tomto případě

$$\mathrm{d}S = \big\|\mathbf{n}(u,v)\big\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,$$

dostaneme pro objem kapaliny, která proteče plochou $\mathcal{S}$, dvojný Riemannův integrál

$$\begin{aligned} V &= \iint_\Omega \mathbf{v}\big(\mathbf{x}(u,v)\big)\cdot\mathbf{n}(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\ &= \iint_\Omega \Big(v_x\big(\mathbf{x}(u,v)\big)n_x(u,v) + v_y\big(\mathbf{x}(u,v)\big)n_y(u,v) + v_z\big(\mathbf{x}(u,v)\big)n_z(u,v)\Big)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,. \end{aligned}$$

Pro tento integrál se často používá ještě jeden zápis, který se nyní pokusíme aspoň formálně vysvětlit.

Složky normály

$$n_x(u,v) = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u}, & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v}, & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}, \quad n_y(u,v) = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u}, & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v}, & \dfrac{\partial x}{\partial v}\end{pmatrix}, \quad n_z(u,v) = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}, & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}, & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

závisí na tom, v jakém pořadí vezmeme souřadnice u a v. Jestliže je vyměníme, změní se u složek normálového vektoru znaménko. Snaha je, aby formální zápisy byly nezávislé na volbě souřadnic. Proto nemůže ve formálním výrazu

$$\mathrm{d}S_x = n_x(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

platit $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$, ale $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = -\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$. Proto se mezi symboly $\mathrm{d}u$ a $\mathrm{d}v$ zavádí operace $\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$, která se nazývá *vnější součin*. Tato operace je lineární v každém svém argumentu a antisymetrická, tj. pro každá reálná čísla a_1, a_2, b_1 a b_2 platí

$$(a_1\mathrm{d}u + b_1\mathrm{d}v) \wedge (a_2\mathrm{d}u + b_2\mathrm{d}v) = -(a_2\mathrm{d}u + b_2\mathrm{d}v) \wedge (a_1\mathrm{d}u + b_1\mathrm{d}v)\,. \tag{3}$$

Speciálně ze vztahu (3) dostaneme, že

$$\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}u = -\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}u = 0\,, \qquad \mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}v = -\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}v = 0\,, \qquad \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = -\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u\,.$$

Jestliže pak napíšeme

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_x = n_x(u,v)\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v &= \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u}, & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v}, & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = -\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial v}, & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}, & \dfrac{\partial z}{\partial u}\end{pmatrix}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \\ &= \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial v}, & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}, & \dfrac{\partial z}{\partial u}\end{pmatrix}\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u \end{aligned}$$

a podobně pro další složky, je toto vyjádření nezávislé na tom, kterou ze souřadnic u a v považujeme za první a kterou za druhou.

Jestliže si uvědomíme, že

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathrm{d}v\,, \quad \mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}v\,, \quad \mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathrm{d}v\,,$$

dostaneme z linearity a antisymetrie vnějšího součinu

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \;&=\; \Big(\frac{\partial x}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathrm{d}v\Big) \wedge \Big(\frac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}v\Big) = \\
&= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}v = \\
&= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v = \\
&= \Big(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\Big)\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v = \\
&= n_z(u,v)\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v = \,\mathrm{d}S_z\,.
\end{aligned}$$

Podobně se ukáže, že platí

$$\mathrm{d}S_x = n_x(u,v)\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v = \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\,, \qquad \mathrm{d}S_y = n_y(u,v)\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v = \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\,.$$

Pomocí této symboliky lze psát

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S_x &\mapsto n_x(u,v)\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v \mapsto\; \mathrm{d}y\wedge\;\mathrm{d}z\,,\\
\mathrm{d}S_y &\mapsto n_y(u,v)\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v \mapsto\; \mathrm{d}z\wedge\;\mathrm{d}x\,,\\
\mathrm{d}S_z &\mapsto n_z(u,v)\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v \mapsto\; \mathrm{d}x\wedge\;\mathrm{d}y\,.
\end{aligned} \tag{4}$$

Pak pro tok vektoru plochou píšeme

$$\begin{aligned}
V \;&=\; \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}}\Big(v_x(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S_x + v_y(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S_y + v_z(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S_z\Big) = \\
&= \iint_{\mathcal{S}}\Big(v_x(\mathbf{x})\,\mathrm{d}y\wedge\;\mathrm{d}z + v_y(\mathbf{x})\,\mathrm{d}z\wedge\;\mathrm{d}x + v_z(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x\wedge\;\mathrm{d}y\Big).
\end{aligned}$$

Mnohdy se při zápisu integrálu symbol vnějšího součinu $\wedge$ vynechává a píše se prostě

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}}\Big(v_x(\mathbf{x})\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + v_y(\mathbf{x})\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + v_z(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big).$$

Všimněte si toho, že jsme zachovávali pořadí symbolů $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}z$. Jestliže například napíšeme $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$, myslíme tím $-\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$.

Všechna tato značení vyjadřují stejný integrál a nezávisí na parametrizaci plochy $\mathcal{S}$. Jestliže je plocha $\mathcal{S}$ popsána parametrickými rovnicemi (1), je

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\Omega}\Big(v_x\big(\mathbf{x}(u,v)\big)n_x(u,v) + v_y\big(\mathbf{x}(u,v)\big)n_y(u,v) + v_z\big(\mathbf{x}(u,v)\big)n_z(u,v)\Big)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

kde vektor normály $\mathbf{n}(u,v)$ je dán v (2).

Poznámka. Uvedené značení souvisí s vektorovým součinem nebo přesněji řečeno s tzv. diferenciálními formami, což jsou v podstatě výrazy

$$\omega(x,y,z) = \omega_{xy}(x,y,z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \omega_{xz}(x,y,z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \omega_{yz}(x,y,z)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\,.$$

Jestliže srovnáme výrazy $\omega(x,y,z) = \mathbf{v}(x,y,z)\,\mathrm{d}\mathbf{S}$, tj.

$$\omega_{xy}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \omega_{xz}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \omega_{yz}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = v_x\,\mathrm{d}y \wedge\, \mathrm{d}z + v_y\,\mathrm{d}z \wedge\, \mathrm{d}x + v_z\,\mathrm{d}x \wedge\, \mathrm{d}y\,,$$

vidíme, že musí platit

$$v_x = \omega_{yz} = -\omega_{zy}\,, \qquad v_y = \omega_{zx} = -\omega_{xz}\,, \qquad v_z = \omega_{xy} = -\omega_{yx}\,.$$

Proto se v matematice používá pro integrály tohoto typu značení $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} \omega$, kde $\mathcal{S}$ je regulární k–rozměrná nadplocha v prostoru $\mathbb{R}^n$ a $\omega(\mathbf{x})$ je tzv. diferenciální k–forma definovaná na nadploše $\mathcal{S}$.

Z fyzikálního významu tohoto integrálu je zřejmé, že závisí na tom, ve kterém směru považujeme tok vektoru plochou za kladný a ve kterém za záporný. Dobře je to vidět na příkladě plochy $\mathcal{S}$, která je hranicí nějakého tělesa $\mathcal{T}$. Jestliže totiž uvažujeme normálu, která míří ven z tělesa, počítáme objem, který z tělesa vyteče. Naopak jestliže uvažujeme normálu, která míří dovnitř tělesa, počítáme objem kapaliny, který do tělesa vteče. Abychom zadali úlohu zcela přesně, musíme tedy určit alespoň v jednom bodě regulární plochy $\mathcal{S}$ směr vektoru normály neboli plochu $\mathcal{S}$ orientovat. Při změně orientace na opačnou se mění znaménko integrálu.

Orientace křivek

Jak jsme se zmínili dříve, závisí práce vektorového pole po regulární křivce $\mathcal{C}$ na směru, ve kterém ji probíháme, tj. na její orientaci. Směr probíhání regulární křivky lze určit tečným vektorem $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$.

Definice. Regulární křivku $\mathcal{C}$, na které je definováno spojité vektorové pole $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ jednotkových tečných vektorů, nazveme *orientovanou regulární křivkou* a vektorové pole $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ nazýváme *orientací* regulární křivky $\mathcal{C}$.

Poznámka. Protože orientace regulární křivky je dána spojitým polem jednotkových tečných vektorů a v každém bodě regulární křivky $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ existuje nenulový tečný vektor $\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}'(t)$, kde $\boldsymbol{\varphi}(t)$ je parametrizace regulární křivky $\mathcal{C}$ a $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$, stačí pro zadání orientace zadat jednotkový tečný vektor $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ pouze v jednom bodě regulární křivky $\mathcal{C}$. A protože má křivka v bodě $\mathbf{x}$ pouze dva jednotkové tečné vektory, které se liší znaménkem, má každá regulární křivka $\mathcal{C}$ pouze dvě orientace.

Jestliže je $\boldsymbol{\varphi} : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ parametrizace regulární křivky $\mathcal{C}$, je vektor $\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}'(t)$ nenulový spojitý tečný vektor ke křivce $\mathcal{C}$ v bodě $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$. Protože je $\|\mathbf{t}(\mathbf{x})\| \neq 0$, lze jednu orientaci regulární křivky $\mathcal{C}$ definovat jednotkovým tečným vektorem

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{t}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{t}(\mathbf{x})\|}\,.$$

Jestliže je tato orientace $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ shodná s danou orientací $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$, říkáme, že parametrizace $\boldsymbol{\varphi}$ je shodná s orientací regulární křivky $\mathcal{C}$. Jestliže orientace $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ není shodná s danou orientací $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$, musí být $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$. Pak často mluvíme o parametrizaci opačné k dané orientaci.

Jestliže existují krajní body regulární křivky $\mathcal{C}_0$, tj. body

$$\boldsymbol{\varphi}(a) = \lim_{t \to a_+} \boldsymbol{\varphi}(t) \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\varphi}(b) = \lim_{t \to b_-} \boldsymbol{\varphi}(t)\,,$$

lze definovat křivku $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \cup \big\{\boldsymbol{\varphi}(a), \boldsymbol{\varphi}(b)\big\}$. Jestliže je $\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{\varphi}(b)$, říkáme, že křivka $\mathcal{C}$ je *uzavřená.*

`Poznámka.` Podotkněme, že v krajních bodech regulární křivky nemusí existovat ani jednostranné nenulové tečné vektory ke křivce $\mathcal{C}$. Proto jsme se při definici regulární křivky krajním bodům vyhýbali.

Je-li $\mathcal{C}_0$ regulární orientovaná křivka a křivka $\mathcal{C}$, která z ní vznikne přidáním krajních bodů, není uzavřená, lze rozhodnout, který z krajních bodů je počáteční a který koncový bod křivky $\mathcal{C}$. Je-li parametrizace křivky $\mathcal{C}_0$ souhlasná s danou orientací, je bod $\boldsymbol{\varphi}(a) = \mathbf{x}^{(p)}$ *počáteční bod* křivky $\mathcal{C}$ a bod $\boldsymbol{\varphi}(b) = \mathbf{x}^{(k)}$ *koncový bod.* Jestliže je parametrizace opačná k orientaci, je tomu naopak.

Proto můžeme orientaci regulární křivky $\mathcal{C}_0$, která má krajní body a není uzavřená určit tak, že řekneme, který z krajních bodů je počáteční a který koncový.

Toho se použijeme k definici orientace souvislé křivky $\mathcal{C}$, která je složená z regulárních křivek a jejích krajních bodů.

Nechť jsou $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ dvě orientované regulární křivky, které mají počáteční a koncové body $\mathbf{x}_i^{(p)}$ a $\mathbf{x}_i^{(k)}$, kde $i = 1$, 2. Nechť platí $\mathbf{x}_1^{(k)} = \mathbf{x}_2^{(p)}$. Pak se souvislá křivka

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \dotplus \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \{\mathbf{x}_1^{(p)}, \mathbf{x}_1^{(k)} = \mathbf{x}_2^{(p)}, \mathbf{x}_2^{(k)}\}$$

nazývá se součtem orientovaných regulárních křivek $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$. Přitom se bod $\mathbf{x}_1^{(p)}$ nazývá počáteční a bod $\mathbf{x}_2^{(k)}$ koncový bod křivky $\mathcal{C}_1 \dotplus \mathcal{C}_2$.

Podobně postupujeme u konečného počtu orientovaných regulárních křivek. Jestliže jsou $\mathcal{C}_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, orientované regulární křivky s počátečními body $\mathbf{x}_i^{(p)}$ a koncovými body $\mathbf{x}_i^{(k)}$ a pro každé $i = 1, 2, \ldots, r-1$ platí $\mathbf{x}_i^{(k)} = \mathbf{x}_{i+1}^{(p)}$ nazýváme křivku

$$\mathcal{C} = \Big(\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{C}_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{r} \{\mathbf{x}_i^{(p)}, \mathbf{x}_i^{(k)}\}\Big)$$

součtem orientovaných regulárních křivek a budeme jej značit jako

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \dotplus \mathcal{C}_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathcal{C}_r\,. \tag{5}$$

Přitom bod $\mathbf{x}_1^{(p)}$ se nazývá počáteční bod křivky $\mathcal{C}$ a bod $\mathbf{x}_r^{(k)}$ její koncový bod. Jestliže je $\mathbf{x}_1^{(p)} = \mathbf{x}_r^{(k)}$ nazývá se křivka *uzavřená.*

Definice. Souvislá křivka $\mathcal{C}$ se nazývá *orientovaná*, jestliže je součtem konečného počtu regulárních orientovaných křivek.

Křivkový integrál druhého druhu

Definice. Nechť je $\mathcal{C}$ orientovaná regulární křivka v $\mathbb{R}^n$ s orientací $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ a $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ je vektorová funkce definovaná na křivce $\mathcal{C}$. Integrál

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big)\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big)\varphi_i'(t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{6}$$

kde $\boldsymbol{\varphi}(t)$, $t \in (a,b)$, je parametrizace křivky $\mathcal{C}$ souhlasná s orientací $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$, tj.

$$\boldsymbol{\tau}\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big) = \frac{\boldsymbol{\varphi}'(t)}{\big\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\big\|}\,,$$

nazýváme *křivkový integrál druhého druhu* vektorového pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ přes regulární křivku $\mathcal{C}$.

Podle definice souvisí křivkový integrál druhého druhu (6) s křivkovým integrálem prvního druhu vztahem

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} f_{\|}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}s = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}s = \int_{\mathcal{C}} \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x})\tau_i(\mathbf{x})\,\mathrm{d}s\,,$$

kde $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ je orientace křivky $\mathcal{C}$ a

$$f_{\|}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x})\tau_i(\mathbf{x})$$

je průmět vektoru $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ do směru $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$.

Pro křivkový integrál druhého druhu se také používá označení

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_i\,, \tag{7}$$

které dostaneme tak, že formálně položíme $\mathrm{d}\mathbf{s} = (\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \dots, \mathrm{d}x_n)$.

Speciálně v prostoru $\mathbb{R}^3$ se často používá značení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \big(f_x(\mathbf{x}), f_y(\mathbf{x}), f_z(\mathbf{x})\big)$ a

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} \big(f_x(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x + f_y(\mathbf{x})\,\mathrm{d}y + f_z(\mathbf{x})\,\mathrm{d}z\big)\,.$$

Definice. Nechť je $\mathcal{C}$ orientovaná křivka v $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ vektorová funkce definovaná na křivce $\mathcal{C}$. Pak definujeme *křivkový integrál druhého druhu* vektorové funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ přes křivku $\mathcal{C}$ vztahem

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \sum_{i=1}^r \int_{\mathcal{C}_i} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s}\,,$$

kde $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \dotplus \mathcal{C}_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathcal{C}_r$.

Jestliže je orientovaná křivka $\mathcal{C}$ uzavřená, používá se pro křivkový integrál druhého druhu přes tuto křivku označení $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s}$.

`Poznámka.` Křivkový integrál druhého druhu vektorového pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ přes orientovanou křivku $\mathcal{C}$ v prostoru $\mathbb{R}^3$ má fyzikální význam *práce silového pole* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, které působí po křivce $\mathcal{C}$ ve směru daném orientací křivky. Proto závisí tento integrál na orientaci křivky a při její změně na opačnou se změní znaménko integrálu.

Příklad. Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$, jednotkové vektory ve směru os x, y, resp. z, a $\mathcal{S}$ je plocha $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, kde x, y, $z > 0$, která je orientovaná normálou $\mathbf{n}(x, y, z)$, která má kladné složky. Najděte práci vektorového pole $\mathbf{f} = z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ podél souhlasně orientované hranice $\mathcal{C}$ plochy $\mathcal{S}$, tj. pokud se postavíme na hranici hlavou ve směru normály, leží plocha $\mathcal{S}$ po naší levé ruce.

Řešení: V tomto případě je vektorové pole $\mathbf{f} = (0, z, x)$. Hranice plochy $\mathcal{S}$ je složena ze tří křivek

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_x: &\quad x = 0\,, &\quad y^2 + z^2 = 1\,, &\quad y \geq 0\,, &\quad z \geq 0\,,\\ \mathcal{C}_y: &\quad y = 0\,, &\quad x^2 + z^2 = 1\,, &\quad x \geq 0\,, &\quad z \geq 0\,,\\ \mathcal{C}_z: &\quad z = 0\,, &\quad x^2 + y^2 = 1\,, &\quad x \geq 0\,, &\quad y \geq 0\,. \end{aligned}$$

Tyto křivky se navzájem protínají ve třech bodech $A = [1; 0; 0]$, $B = [0; 1; 0]$ a $C = [0; 0; 1]$. Křivka $\mathcal{C}$ bude kladně orientovaná tehdy, když bude probíhána proti směru hodinových ručiček, pokud se na ní podíváme ze směru prvního oktantu, tj. musíme probíhat body A, B a C v pořadí $A \to B \to C \to A$.

Z bodu A do bodu B se dostaneme po křivce $\mathcal{C}_z$, z bodu B do bodu C po křivce $\mathcal{C}_x$ a z bodu C do bodu A po křivce $\mathcal{C}_y$. Tedy práce vektorového pole $\mathbf{f}$ po křivce $\mathcal{C}$ je dána křivkovým integrálem druhého druhu

$$A = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}\,\mathbf{ds} = \int_{\mathcal{C}_z} \mathbf{f}\,\mathbf{ds} + \int_{\mathcal{C}_x} \mathbf{f}\,\mathbf{ds} + \int_{\mathcal{C}_y} \mathbf{f}\,\mathbf{ds}\,.$$

Parametrické rovnice křivky $\mathcal{C}_z$ jsou například

$$x = \cos t\,, \quad y = \sin t\,, \quad z = 0\,, \qquad 0 < t < \tfrac{1}{2}\,\pi\,.$$

A protože pro $t = 0$ dostaneme bod $A = [1; 0; 0]$ a pro $t = \frac{1}{2}\,\pi$ bod $B = [0; 1; 0]$, je zvolená orientace souhlasná se zadanou orientací. Proto je

$$\int_{\mathcal{C}_z} \mathbf{f}\,\mathbf{ds} = \int_{\mathcal{C}_z} \bigl(z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z\bigr) = 0\,.$$

Podobně parametrické rovnice křivky $\mathcal{C}_x$ jsou například

$$x = 0\,, \quad y = \cos t\,, \quad z = \sin t\,, \qquad 0 < t < \tfrac{1}{2}\,\pi\,.$$

A protože pro $t = 0$ dostaneme bod $B = [0; 1; 0]$ a pro $t = \frac{1}{2}\,\pi$ bod $C = [0; 0; 1]$, je zvolená orientace souhlasná se zadanou orientací. Proto je

$$\int_{\mathcal{C}_x} \mathbf{f}\,\mathbf{ds} = \int_{\mathcal{C}_x} \bigl(z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z\bigr) = \int_0^{\pi/2} \sin t \cdot (-\sin t)\,\mathrm{d}t = -\tfrac{1}{4}\,\pi\,.$$

Konečně parametrické rovnice křivky $\mathcal{C}_y$ jsou například

$$x = \cos t\,, \quad y = 0\,, \quad z = \sin t\,, \qquad 0 < t < \tfrac{1}{2}\,\pi\,.$$

Protože pro $t = 0$ dostaneme bod $A = [1; 0; 0]$ a pro $t = \frac{1}{2}\pi$ bod $C = [0; 0; 1]$, je zvolená orientace opačná k zadané orientací. Proto je

$$\int_{\mathcal{C}_y} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}_y} \bigl(z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z\bigr) = -\int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = -\tfrac{1}{4}\,\pi\,.$$

Tedy celková práce vektorového pole po křivce $\mathcal{C}$ je $A = -\frac{1}{2}\,\pi$.

Orientace ploch

Podstatně složitější je popsat orientovanou k–rozměrnou nadplochu $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$, kde $k > 1$. Poměrně snadno se definuje orientace $(n-1)$–rozměrné regulární nadplochy v $\mathbb{R}^n$, protože k ní existuje v každém bodě jednotkový normálový vektor, který se na nadploše $\mathcal{S}$ mění spojitě. Problém ovšem je, jak spojovat jednotlivé regulární kousky nadplochy v $\mathbb{R}^n$. Proto se bohužel budu muset omezit na plochy v prostoru $\mathbb{R}^3$.

Nejprve definujeme orientaci regulární plochy, tj. plochy, kterou můžeme celou popsat parametrickými rovnicemi.

Definice. Regulární plochu $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$, na které je definováno spojité vektorové pole jednotkových normál $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$, nazveme *orientovanou regulární plochou* a vektorové pole $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ nazýváme *orientací* regulární plochy $\mathcal{S}$.

Jestliže je regulární plocha $\mathcal{S}$ popsána parametrickými rovnicemi (1), můžeme sestrojit normálové vektorové pole $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ pomocí (2). Protože je podle definice $\bigl\|\mathbf{n}(u,v)\bigr\| \neq 0$ pro každé $(u,v) \in \Omega$, tj. pro každé $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$, je jednotkový vektor normály

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{n}(u,v)}{\|\mathbf{n}(u,v)\|}\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v)\,.$$

Proto existují pouze dvě orientace regulární plochy, a to konkrétně $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ nebo $-\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$.

Stejně jako v případě křivek budeme orientované regulární plochy mezi sebou spojovat. Dvě orientované regulární plochy se mohou stýkat v jisté křivce $\mathcal{C}$, a proto je situace složitější než u křivek, které se stýkaly v bodě, který byl pro jednu křivku koncový bod a pro druhou bod počáteční.

Nejprve definujeme hranici regulární plochy $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$. To je množina

$$\delta\mathcal{S} = \overline{\mathcal{S}} \setminus \mathcal{S}\,,$$

kde $\overline{\mathcal{S}}$ je uzávěr množiny $\mathcal{S}$ v $\mathbb{R}^3$. Budeme se zabývat pouze plochami, jejichž hranice je souvislá orientovaná křivka.

Budeme říkat, že hranice $\delta\mathcal{S}$ orientované regulární plochy $\mathcal{S}$ je souhlasně orientovaná s orientací $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ plochy $\mathcal{S}$, jestliže při pohledu ze směru normály $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ v jistém okolí bodu hranice obíháme křivku $\delta\mathcal{S}$ proti směru pohybu hodinových ručiček.

Definice. Orientovanou regulární plochu $\mathcal{S}$ s hranicí $\delta\mathcal{S}$, která je orientována souhlasně s plochou $\mathcal{S}$ nazýváme *regulární orientovaná plocha s hranicí.*

Abychom lépe pochopili, jak spojujeme jednotlivé regulární kousky plochy $\mathcal{S}$, uvažujme orientovanou regulární plochu $\mathcal{S}$ s orientací $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ a v ní regulární křivku $\mathcal{C}$, která je částí hranice dvou disjunktních regulárních ploch $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$, které leží v $\mathcal{S}$. Zvolme orientaci $\boldsymbol{\tau}$ křivky $\mathcal{C}$, která je souhlasná například s orientací $\boldsymbol{\nu}$ regulární plochy $\mathcal{S}_1$. Jestliže ale přejdeme přes křivku $\mathcal{C}$ z plochy $\mathcal{S}_1$ do plochy $\mathcal{S}_2$, změní se nám směr oběhu křivky $\mathcal{C}$ a orientace $\boldsymbol{\tau}$ křivky $\mathcal{C}$ je proto vzhledem k orientaci $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ plochy $\mathcal{S}_2$ nesouhlasná. Proto musí být vzhledem s plochou $\mathcal{S}_2$ souhlasná orientace $-\boldsymbol{\tau}$ křivky $\mathcal{C}$.

Definice. Nechť jsou $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ orientované regulární plochy s hranicemi $\delta\mathcal{S}_1$ a $\delta\mathcal{S}_2$, jejichž průnik $\delta\mathcal{S}_1 \cap \delta\mathcal{S}_2$ je neprázdný. Jsou-li orientace křivek $\delta\mathcal{S}_1$ a $\delta\mathcal{S}_2$ opačné, říkáme, že plochy $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ jsou *souhlasně orientované.*

Jestliže jsou $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ souhlasně orientované regulární plochy s hranicemi $\delta\mathcal{S}_1$ a $\delta\mathcal{S}_2$, nazveme plochu

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \dotplus \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \delta\mathcal{S}_1 \cup \delta\mathcal{S}_2$$

orientovaným spojením regulárních orientovaných ploch $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$.

Podobně postupujeme u konečného počtu regulárních orientovaných ploch s hranicemi. Jestliže jsou $\mathcal{S}_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, navzájem disjunktní regulární orientované plochy s hranicemi $\delta\mathcal{S}_i$ a pro každé i, k takové, že $\delta\mathcal{S}_i \cap \delta\mathcal{S}_k \neq \emptyset$ jsou plochy $\mathcal{S}_i$ a $\mathcal{S}_k$ souhlasně orientované nazývá se plocha

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \dotplus \mathcal{S}_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathcal{S}_r = \bigcup_{i=1}^{r} \overline{\mathcal{S}}_i$$

orientovaným spojením ploch $\mathcal{S}_i$. Orientace této plochy je dána orientací libovolné regulární plochy $\mathcal{S}_i$.

Definice. Souvislá plocha $\mathcal{S}$ se nazývá *orientovatelná*, pokud ji lze zapsat jako spojení konečného počtu souhlasně orientovaných regulárních ploch s hranicí.

Intuitivně je snad jasné, co myslíme hranicí $\delta\mathcal{S}$ orientovatelné plochy $\mathcal{S}$, a proto nebudeme psát další nepřehlednou definici. Poznamenejme pouze, že pokud je $\delta\mathcal{S} = \emptyset$, nazývá se orientovatelná plocha $\mathcal{S}$ *uzavřená* a pokud je $\delta\mathcal{S}$ křivka, je souhlasně orientovaná s plochou $\mathcal{S}$.

`Poznámka.` Existují souvislé plochy, které nelze orientovat. Asi nejznámější příklad takové plochy je Möbiův list. Tuto plochu si lze představit jako proužek papíru, jehož jeden konec otočíme o 180° a slepíme s druhým koncem. Takové plochy mají vlastně pouze jednu stranu.

Plošný integrál druhého druhu

Definice. Nechť je $\mathcal{S}$ orientovaná regulární plocha v $\mathbb{R}^3$ s orientací $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ a $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ je vektorová funkce definovaná na $\mathcal{S}$. Pak integrál

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S = \iint_{\mathcal{S}} \big(f_x\mathbf{x})\nu_x(\mathbf{x}) + f_y(\mathbf{x})\nu_y(\mathbf{x}) + f_z(\mathbf{x})\nu_z(\mathbf{x})\big)\,\mathrm{d}S$$

nazýváme *plošný integrál druhého druhu* vektorové funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ přes regulární plochu $\mathcal{S}$.

Z důvodů, o kterých jsme se zmínili dříve, se pro plošný integrál druhého druhu používá také označení

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{S} &= \iint_{\mathcal{S}} \Big(f_x(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S_x + f_y(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S_y + f_z(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S_z \Big) = \\ &= \iint_{\mathcal{S}} \Big(f_x(\mathbf{x})\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + f_y(\mathbf{x})\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + f_z(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \Big).\end{aligned}$$

Pokud je regulární orientovaná plocha $\mathcal{S}$ dána parametrickými rovnicemi

$$x = x(u,v)\,, \quad y = y(u,v)\,, \quad z = z(u,v)\,, \qquad (u,v) \in \Omega\,,$$

postupujeme při výpočtu tak, že najdeme normálový vektor

$$\mathbf{n} = \mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{t}_u = \Big(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \Big), \quad \mathbf{t}_v = \Big(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \Big).$$

Pokud tento normálový vektor zadává orientaci shodnou s danou orientací $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$, tj. pokud

$$\boldsymbol{\nu}\big(\mathbf{x}(u,v)\big) = \frac{\mathbf{n}(u,v)}{\big\|\mathbf{n}(u,v)\big\|}\,,$$

je

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{S} &= \iint_{\Omega} \mathbf{f}\big(\mathbf{x}(u,v)\big) \cdot \mathbf{n}(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\ &= \iint_{\Omega} \det \begin{pmatrix} f_x\big(\mathbf{x}(u,v)\big), & f_y\big(\mathbf{x}(u,v)\big), & f_z\big(\mathbf{x}(u,v)\big) \\ \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u}, & \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial u}, & \dfrac{\partial z(u,v)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial v}, & \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial v}, & \dfrac{\partial z(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.\end{aligned} \tag{8}$$

Jestliže normálový vektor $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ zadává orientaci opačnou k orientace $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$, musíme na pravé straně (8) změnit u integrálů znaménko.

Definice. Nechť je $\mathcal{S}$ orientovatelná plocha v $\mathbb{R}^3$ s orientací $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ a $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ je vektorová funkce definovaná na $\mathcal{S}$. Pak integrál

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{r} \iint_{\mathcal{S}_i} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,,$$

kde $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \dotplus \mathcal{S}_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathcal{S}_r$ je spojení souhlasně orientovaných disjunktních regulárních ploch $\mathcal{S}_i$ a orientacemi $\boldsymbol{\nu}_i(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$, nazýváme *plošný integrál druhého druhu* vektorové funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ přes plochu $\mathcal{S}$.

`Poznámka.` Fyzikální význam plošného integrálu druhého druhu vektorové funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ přes plochu $\mathcal{S}$ je *tok vektoru* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ plochou $\mathcal{S}$. Tento integrál lze počítat pouze přes orientovatelné plochy a jeho hodnota závisí na orientaci plochy $\mathcal{S}$.

Příklad. Nechť $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os x, y a z. Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = -(x+y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ plochou $z = x^2 + y^2$, $z < 1$, která je orientovaná tak, že třetí složka její normály je záporná.

Řešení. Tok Φ vektoru $\mathbf{v}$ plochou $\mathcal{S}$ je dán plošným integrálem druhého druhu

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Jestliže za parametry zvolíme x a y, jsou parametrické rovnice plochy

$$x = x\,, \quad y = y\,, \quad z = x^2 + y^2\,, \qquad x^2 + y^2 < 1\,.$$

Při této parametrizaci je

$$\mathbf{t}_x = (1, 0, 2x)\,, \quad \mathbf{t}_y = (0, 1, 2y)\,, \quad \mathbf{t}_x \times \mathbf{t}_y = (-2x, -2y, 1)\,, \quad \mathbf{v} = (0, -x-y, x^2+y^2)\,.$$

Protože normálový vektor $\mathbf{t}_x \times \mathbf{t}_y$ má kladnou třetí složku, musíme za vektor normály zvolit $\mathbf{n} = (2x, 2y, -1)$. Pro tok vektoru $\mathbf{v}$ danou plochou $\mathcal{S}$ pak dostaneme

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{x^2+y^2<1} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{x^2+y^2<1} \big(-x^2 - 3y^2 - 2xy\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Když pro vypočet posledního integrálu zvolime polární souřadnice

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \qquad r > 0\,, \quad 0 < \varphi < 2\pi\,, \qquad J = r\,,$$

dostaneme

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\Omega} \big(-r^2\cos^2\varphi - 3r^2\sin^2\varphi - 2r^2\cos\varphi\sin\varphi\big) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je dána nerovnostmi $0 < r < 1$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Tedy to vektoru $\mathbf{v}$ plochou $\mathcal{S}$ je

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = -\pi\,.$$