Přednáška 9

Integrální (Stokesovy) věty a základy teorie pole

Osnova přednášky

1. Obecný tvar Stokesových vět.

2. Potenciálové vektorové pole a jeho práce po křivce.

3. Příklad $U(x,y,z) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

4. Nutné podmínky pro potenciálové vektorové pole.

5. Rotace vektorového pole v $\mathbb{R}^3$ a Stokesova věta.

6. Greenova věta, obsah rovinného obrazce omezeného křivkou $\mathcal{C}$.

7. Divergence vektorového pole v $\mathbb{R}^3$ a Gaussova věta.

8. Vyjádření operátorů grad, div a rot pomocí operátoru ∇.

9. Nezávislost křivkového integrálu druhého druhu na křivce.

10. Konzervativní a potenciálové vektorové pole.

11. Podmínka $\operatorname{rot}\mathbf{f} = 0$ a potenciál.

12. Jednoduše souvislá oblast.

Stokesovy věty

Stokesovy věty jsou věty, které udávají vztah mezi integrálem přes orientovanou množinu M a integrálem přes její souhlasně orientovanou hranici ∂M. Tyto věty se velmi často používají v různých oblastech fyziky jako je například pružnost, elektrostatika nebo obecněji teorie elektromagnetického pole.

V podstatě jste se už s jednou takovou větou seznámili v prvním semestru a neustále ji používáte k výpočtu určitých integrálů. Jde o větu, která tvrdí, že pokud má funkce $f(x)$ na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}$ spojité derivace a uzavřený interval $\langle a, b\rangle \subset \Omega$, platí rovnost

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}f(x) = f(b) - f(a)\,.$$

Všechny Stokesovy věty mají formálně tvar

$$\int_M \mathrm{d}\omega(\mathbf{x}) = \int_{\partial M} \omega(\mathbf{x})\,, \tag{1}$$

kde ∂M je souhlasně orientovaná hranice orientované množiny M. Jenom se musí náležitě interpretovat, co je ω a $\mathrm{d}\omega$.

V minulé přednášce jsme zapisovali plošný integrál druhého druhu jako

$$\iint_{\mathcal{S}} \big(f_x(\mathbf{x})\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + f_y(\mathbf{x})\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + f_z(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\big)\,.$$

Výraz za znakem integrálu označíme $\omega(\mathbf{x})$, tj.

$$\omega(\mathbf{x}) = f_x(\mathbf{x})\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + f_y(\mathbf{x})\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + f_z(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\,. \tag{2}$$

Takový výraz se v matematice nazývá *diferenciální forma*, v našem případě diferenciální dvou–forma. V prostoru $\mathbb{R}^3$ lze každou diferenciální dvou–formu zapsat ve tvaru

$$\omega(\mathbf{x}) = \omega_{xy}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \omega_{xz}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \omega_{yz}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\,.$$

Když srovnáme tento zápis s (2) a uvědomíme si, že $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z = -\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$, dostaneme vztahy

$$\begin{aligned} f_z(\mathbf{x}) &= \omega_{xy}(\mathbf{x}) = -\omega_{yx}(\mathbf{x})\,,\\ f_y(\mathbf{x}) &= -\omega_{xz}(\mathbf{x}) = \omega_{zx}(\mathbf{x})\,,\\ f_x(\mathbf{x}) &= \omega_{yz}(\mathbf{x}) = -\omega_{yz}(\mathbf{x})\,. \end{aligned}$$

Při takovém označení lze psát plošný integrál druhého druhu v $\mathbb{R}^3$ jako

$$\iint_{\mathcal{S}} \big(f_x(\mathbf{x})\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + f_y(\mathbf{x})\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + f_z(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\big) = \int_{\mathcal{S}} \omega(\mathbf{x})\,.$$

Obecně lze přes k–rozměrnou regulární nadplochu $\mathcal{S}$ v $\mathbb{R}^n$ integrovat výrazy

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \omega_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}\,, \tag{3}$$

kde $\omega_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(\mathbf{x})$ jsou funkce definované na nadploše $\mathcal{S}$, které se nazývají souřadnice k–formy. Takové výrazy se nazývají diferenciální k–formy a pro integrál k–formy $\omega(\mathbf{x})$ přes k–dimenzionání nadplochu $\mathcal{S}$ se používá znak $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} \omega(\mathbf{x})$.

Pokud je diferenciální k–forma $\omega(\mathbf{x})$ diferencovatelná, tj. její souřadnice $\omega_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(\mathbf{x})$ jsou diferencovatelné funkce, definujeme operaci d, tzv. *vnější derivaci*, která diferenciální k–formě $\omega(\mathbf{x})$ definované vztahem (3) přiřadí diferenciální $(k+1)$–formu předpisem

$$\mathrm{d}\omega(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \frac{\partial \omega_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(\mathbf{x})}{\partial x_r}\,\mathrm{d}x_r \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}\,. \tag{4}$$

Rovnost (1) je pak třeba chápat v tomto smyslu. My se v přednášce nebudeme zabývat obecnou Stokesovou větou, ale její jednoduššími speciálními případy.

Nejjednodušší případ obecného vztahu (1) je, když M je orientovaná křivka $\mathcal{C}$ v $\mathbb{R}^n$. Její hranice $\partial\mathcal{C}$ jsou pak její počáteční bod $\mathbf{x}^{(p)}$ a koncový bod $\mathbf{x}^{(k)}$. V tomto případě dává (1) následující větu.

Věta. Nechť je $U(\mathbf{x})$ funkce, která má na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ spojité parciální derivace, $\mathcal{C}$ orientovaná křivka, která leží v Ω, a $\mathbf{x}^{(p)}$, resp. $\mathbf{x}^{(k)}$ počáteční, resp. koncový bod křivky $\mathcal{C}$. Pak platí

$$\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}U = \int_{\mathcal{C}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i = U\big(\mathbf{x}^{(k)}\big) - U\big(\mathbf{x}^{(p)}\big)\,. \tag{5}$$

Dokážeme vztah (5) pro regulární křivku. Jestliže je $\boldsymbol{\varphi} : (a,b) \to \mathcal{C}$ parametrizace regulární křivky $\mathcal{C}$ a $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ její parametrické rovnice, je podle definice

$$\int_{\mathcal{C}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big)}{\partial x_i}\,\varphi_i'(t) \right) \mathrm{d}t\,.$$

Ale podle věty o derivaci složené funkce je

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big)}{\partial x_i}\, \varphi_i'(t) = \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}\,,$$

kde $F(t) = U\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big)$. Tedy

$$\int_{\mathcal{C}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i = \int_a^b \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = U\big(\boldsymbol{\varphi}(b)\big) - U\big(\boldsymbol{\varphi}(a)\big) = U\big(\mathbf{x}^{(k)}\big) - U\big(\mathbf{x}^{(p)}\big)$$

`Poznámka.` Tato věta vlastně říká, že pokud je výraz $f_x(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x + f_y(\mathbf{x})\,\mathrm{d}y + f_z(\mathbf{x})\,\mathrm{d}z$ na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ diferenciál funkce $U(\mathbf{x})$, pak je práce silového pole $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \big(f_x(\mathbf{x}), f_y(\mathbf{x}), f_z(\mathbf{x})\big)$ po křivce $\mathcal{C}$, která leží v množině Ω, rovna rozdílu hodnot funkce $U(\mathbf{x})$ v koncovém a počátečním bodě křivky $\mathcal{C}$ a nezávisí na tvaru křivky $\mathcal{C}$. Speciálně pro každou uzavřenou křivku je integrál (5) roven nule. K této větě se ještě vrátíme v druhé části přednášky.

Příklad. Funkce $U(x,y,z) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ má na množině $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \big\{[0;0;0;]\big\}$ spojité parciální derivace

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,.$$

Proto je pro každou křivku $\mathcal{C}$, která začíná v bodě $A = [0;0;1]$, končí v bodě $B = [3;-4;0]$ a neprochází bodem $[0;0;0]$,

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = U(3,-4,0) - U(0,0,1) = \frac{4}{5}\,.$$

V prostoru $\mathbb{R}^n$ znamená tvrzení této věty, že pokud pro spojité vektorové pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ se složkami $f_i(\mathbf{X})$ platí na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ vztah

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_i = \mathrm{d}U = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i\,,$$

tj.

$$f_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial U}{\partial x_i}\,, \quad \text{tj.} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} U(\mathbf{x})\,, \tag{6}$$

závisí křivkový integrál prvního druhu $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s}$, kde $\mathcal{C} \subset \Omega$, pouze na počátečním a koncovém bodě křivky $\mathcal{C}$ a ne na jejím tvaru.

Definice. Nechť je Ω otevřená podmnožina v $\mathbb{R}^n$. Spojité vektorové pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ definované na Ω, pro které existuje funkce $U(\mathbf{x})$ taková, že $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} U(\mathbf{x})$ pro každé $\mathbf{x} \in \Omega$, se nazývá *potenciálové* na množině Ω. Samotná funkce $U(\mathbf{x})$ se pak nazývá *potenciál* vektorového pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Věta. Nechť je $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ spojitě diferencovatelné potenciálové vektorové pole na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Pak pro jeho složky platí vztah

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\,. \tag{7}$$

Důkaz. Pro složky potenciálního vektorového pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ platí vztah (6), kde funkce $U(\mathbf{x})$ má na množině Ω spojité druhé parciální derivace. Pak je

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_i}\,, \qquad \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k}\,,$$

a protože je $U(\mathbf{x}) \in C_2(\Omega)$, jsou parciální derivace záměnné, a tedy platí vztah (7).

Další případ, kterým se budeme zabývat, je, když $M = \mathcal{S}$ je orientovaná plocha v $\mathbb{R}^3$. V tomto případě je hranice $\partial\mathcal{S} = \mathcal{C}$ uzavřená křivka, která je souhlasně orientována s plochou $\mathcal{S}$. Pak je na pravé straně rovnosti (1) křivkový integrál druhého druhu vektorového pole $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \big(f_x(\mathbf{x}), f_y(\mathbf{x}), f_z(\mathbf{x})\big)$ přes uzavřenou orientovanou křivku $\mathcal{C}$, tj.

$$\oint_{\mathcal{C}} \big(f_x(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x + f_y(\mathbf{x})\,\mathrm{d}y + f_z(\mathbf{x})\,\mathrm{d}z\big) = \oint_{\mathcal{C}} \omega(\mathbf{x})\,,$$

kde symbol $\oint_{\mathcal{C}}$ naznačuje, že se jedná o uzavřenou křivku a $\omega(\mathbf{x})$ je diferenciální forma

$$\omega(\mathbf{x}) = f_x(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x + f_y(\mathbf{x})\,\mathrm{d}y + f_z(\mathbf{x})\,\mathrm{d}z\,.$$

Pak je diferenciální dvou–forma $\mathrm{d}\omega(\mathbf{x})$ rovna

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega(\mathbf{x}) &= \mathrm{d}f_x(\mathbf{x}) \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}f_y(\mathbf{x}) \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}f_z(\mathbf{x}) \wedge \mathrm{d}z = \\
&= \left(\frac{\partial f_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f_x}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f_x}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}x + \\
&\quad + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f_y}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f_y}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}y + \\
&\quad + \left(\frac{\partial f_z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f_z}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f_z}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}z = \\
&= \frac{\partial f_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial f_x}{\partial y}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial f_x}{\partial z}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \\
&\quad + \frac{\partial f_y}{\partial x}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \frac{\partial f_y}{\partial y}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y + \frac{\partial f_y}{\partial z}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y + \\
&\quad + \frac{\partial f_z}{\partial x}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial f_z}{\partial y}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial f_z}{\partial z}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z = \\
&= \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z}\right) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\,,
\end{aligned}$$

kde jsme využili vlastností $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0$ a $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x$, atd.

Jestliže zavedeme vektorové pole $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \big(F_x(\mathbf{x}), F_y(\mathbf{x}), F_z(\mathbf{x})\big)$, kde

$$F_x(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\,, \quad F_y(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z}\,, \quad F_z(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\,,$$

je možné vztah (1) přepsat jako

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Vektorové pole $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ se nazývá *rotace* vektorového pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ a značí se $\operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Tedy rotace vektorového pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ je vektorové pole se složkami

$$\big(\operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x})\big)_x = \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\,, \quad \big(\operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x})\big)_y = \frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z}\,, \quad \big(\operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x})\big)_z = \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\,. \tag{8}$$

Obecná rovnost (1) vede v tomto případě k následující větě.

Věta (*Stokesova věta*). Nechť má vektorová funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ spojité první parciální derivace, $\mathcal{S}$ je orientovaná plocha se souhlasně orientovanou hranicí $\partial\mathcal{S}$ a nechť $\overline{\mathcal{S}} \subset \Omega$. Pak platí

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,. \tag{9}$$

Speciální případ Stokesovy věty, pro rovinné vektorové pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, tj. když $\mathbf{f}(x,y,z) = \big(f_x(x,y), f_y(x,y), 0\big)$ a plocha $\mathcal{S}$ leží v rovnině xy a je orientována normálou $\mathbf{n} = (0,0,1)$ vede k tzv. *Greenově větě*. V tomto případě je totiž

$$\operatorname{rot}\mathbf{f}(x,y,z) = \left(0, 0, \frac{\partial f_y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f_x(x,y)}{\partial y}\right)$$

a plošný integrál na pravé straně (9) dává

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial f_y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f_x(x,y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Věta. (*Greenova věta.*) Nechť mají funkce $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ spojité parciální derivace. Nechť je $\mathcal{S}$ oblast v $\mathbb{R}^2$, jejíž hranice je kladně orientovaná křivka $\partial\mathcal{S}$, tj. při jejím obíhání leží oblast $\mathcal{S}$ vlevo, a $\overline{\mathcal{S}} \subset \Omega$. Pak platí

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \big(P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y\big) = \iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{10}$$

`Poznámka.` Jestliže jsou funkce $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ takové, že $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 1$, plyne z (10), že

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \big(P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y\big) = \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = P(\mathcal{S})\,,$$

kde $P(\mathcal{S})$ je obsah oblasti $\mathcal{S}$. Při výpočtech se obvykle volí

$$P(\mathcal{S}) = \oint_{\partial\mathcal{S}} x\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}\oint_{\partial\mathcal{S}} \big(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x\big)\,, \tag{11}$$

kde $\partial\mathcal{S}$ je kladně orientovaná hranice oblasti $\mathcal{S}$.

Jako poslední případ obecného vztahu (1), který uvedeme, bude vztah mezi integrálem přes omezené těleso $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ a integrálem přes jeho hranici $\partial\mathcal{V}$. Poznamenejme, že hranici $\partial\mathcal{V}$ omezeného tělesa $\mathcal{V}$ považujeme za kladně orientovanou, jestliže je orientována normálou, která míří ven z tělesa $\mathcal{V}$.

V tomto případě je na pravé straně rovnosti (1) plošný integrál druhého druhu vektorové funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, tj.

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} \big(f_x(\mathbf{x})\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + f_y(\mathbf{x})\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + f_z(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\big)\,.$$

a diferenciální 2–forma $\omega(\mathbf{x})$ je

$$\omega(\mathbf{x}) = f_x(\mathbf{x})\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + f_y(\mathbf{x})\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + f_z(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\,.$$

Vnější derivace diferenciální 2–formy $\omega(\mathbf{x})$ je

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega(\mathbf{x}) &= \mathrm{d}f_x(\mathbf{x}) \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}f_y(\mathbf{x}) \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}f_z(\mathbf{x}) \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \\
&= \left(\frac{\partial f_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f_x}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f_x}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \\
&\quad + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f_y}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f_y}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \\
&\quad + \left(\frac{\partial f_z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f_z}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f_z}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \\
&= \frac{\partial f_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial f_y}{\partial y}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial f_z}{\partial z}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \\
&= \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\right)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\,.
\end{aligned}$$

Když vektorové funkci $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \big(f_x(\mathbf{x}), f_y(\mathbf{x}), f_z(\mathbf{x})\big)$ přiřadíme skalární funkci

$$\operatorname{div}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_x(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial f_y(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial f_z(\mathbf{x})}{\partial z}\,, \tag{12}$$

která se nazývá *divergence* vektorového pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, dostaneme z obecné relace (1) následující větu.

Věta (*Gaussova věta.*) Nechť je $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ vektorová funkce, která má na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ spojité parciální derivace prvního řádu a nechť je $\mathcal{V}$ omezená uzavřená podmnožina Ω taková, že její kladně orientovaná hranice $\partial\mathcal{V}$ je uzavřená plocha. Pak platí

$$\iint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,. \tag{13}$$

`Poznámka.` Vektorové funkce $\operatorname{grad} f(\mathbf{x})$, $\operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x})$ a skalární funkce $\operatorname{div}\mathbf{f}(\mathbf{x})$ lze symbolicky zapsat pomocí tzv. diferenciálního operátoru ∇ (čte se *operátor nabla*). Jestliže jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$, jednotkové vektory ve směrech souřadnicových os x, y, resp. z, definujeme

$$\nabla = \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Pomocí tohoto operátoru lze definovat:

1. pro skalární funkci $f(x, y, z)$, která má spojité první parciální derivace, vektorovou funkci *gradient* funkce $f(\mathbf{x})$ vztahem

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial z}\,\mathbf{k} = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial z}\right);$$

2. pro vektorovou funkci $\mathbf{f}(x, y, z)$, která má spojité první parciální derivace, vektorovou funkci *rotace* funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ jako vektorový součin operátoru ∇ s vektorovou funkcí $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, tj.

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i}, & \mathbf{j}, & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}, & \dfrac{\partial}{\partial y}, & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_x(\mathbf{x}), & f_y(\mathbf{x}), & f_z(\mathbf{x}) \end{pmatrix};$$

3. pro vektorovou funkci $\mathbf{f}(x, y, z)$, která má spojité první parciální derivace, skalární funkci *divergence* funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ jako skalární součin operátoru ∇ s vektorovou funkcí $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, tj.

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_x(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial f_y(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial f_z(\mathbf{x})}{\partial z}\,.$$

Nezávislost křivkového integrálu druhého druhu na křivce

Nyní se budeme zabývat otázkou, kdy křivkový integrál druhého druhu vektorové funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ přes orientovanou křivku $\mathcal{C}$ závisí pouze na počátečním a koncovém bodě křivky $\mathcal{C}$ a ne na samotné křivce, která tyto body spojuje.

Tvrzení, že integrál nezávisí na křivce, znamená, že když jsou $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ dvě libovolné orientované křivky s počátečním bodem $\mathbf{x}^{(p)}$ a koncovým bodem $\mathbf{x}^{(k)}$, je

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s}\,, \quad \text{neboli} \quad \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s} - \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s} = 0\,.$$

Jestliže označíme $-\mathcal{C}_2$ křivku $\mathcal{C}_2$ s opačnou orientací, lze přepsat tento vztah jako

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s} - \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s} + \int_{-\mathcal{C}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}_1 \dot{+} (-\mathcal{C}_2)} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s} = 0\,.$$

Protože je křivka $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \dot{+} (-\mathcal{C}_2)$ uzavřená, dostaneme následující jednoduchou větu.

Věta. Nechť je Ω otevřená podmnožina v $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ vektorová funkce definovaná na Ω. Křivkový integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s}$ nezávisí v Ω na křivce $\mathcal{C}$ právě tehdy, když pro každou uzavřenou křivku $\mathcal{C} \subset \Omega$ je $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s} = 0$.

`Poznámka:` Tvrzení, že pro každou uzavřenou křivku $\mathcal{C} \subset \Omega$ je $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s} = 0$, fyzikálně znamená, že když se systém při působení síly $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ vrátí do původního stavu, nevykoná síla žádnou práci. S tím souvisí další definice.

Definice. Je-li práce kterou vykoná silové pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ po každé uzavřené křivce $\mathcal{C} \subset \Omega$ rovna nule, nazývá se pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *konzervativní* v množině Ω.

Ze vztahu (5) plyne, že křivkový integrál $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{s}$ nezávisí na křivce $\mathcal{C}$ například tehdy, kdy je vektorové pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rovno gradientu skalární funkce $U(\mathbf{x})$, tj. když platí $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} U(\mathbf{x})$ neboli pomocí složek, když

$$f_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Podle (5) je pak pro každou orientovanou křivku $\mathcal{C}$, která leží v Ω a má počáteční bod $\mathbf{x}^{(p)}$ a koncový bod $\mathbf{x}^{(k)}$,

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{s} = U\big(\mathbf{x}^{(k)}\big) - U\big(\mathbf{x}^{(p)}\big).$$

Naopak předpokládejme, že křivkový integrál vektorové funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ nezávisí v otevřené a souvislé množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ na křivce $\mathcal{C}$. Nechť je $\mathbf{a} \in \Omega$ pevně zvolený bod. Pak lze pro každé $\mathbf{x} \in \Omega$ definovat funkci

$$U(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi})\, \mathrm{d}\mathbf{s}, \tag{15}$$

kde $\mathcal{C}$ je křivka v Ω s počátečním bodem $\mathbf{a}$ a koncovým bodem $\mathbf{x}$. Protože jsme před-pokládali, že křivkový integrál vektorové funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ nezávisí na křivce $\mathcal{C} \subset \Omega$, nezávisí funkce $U(\mathbf{x})$ na křivce $\mathcal{C}$, ale pouze na bodě $\mathbf{x}$.

Nyní se pokusíme najít diferenciál funkce $U(\mathbf{x})$ definované vztahem (15). Nechť je $\mathbf{x} \in \Omega$ a $\mathbf{h}$ je takový vektor, že úsečka, která spojuje body $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x} + t\mathbf{h}$ leží v Ω. Pak je

$$U(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - U(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi})\, \mathrm{d}\mathbf{s},$$

kde $\mathcal{C}$ je úsečka a počátečním bodem $\mathbf{x}$ a koncovým bodem $\mathbf{x} + \mathbf{h}$. Protože její parametrické rovnice jsou $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} + t\mathbf{h}$, kde $t \in \langle 0, 1\rangle$, je

$$U(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - U(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} = \int_0^1 \mathbf{f}\big(\mathbf{x} + t\mathbf{h}\big) \cdot \mathbf{h}\, \mathrm{d}t - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} = \int_0^1 \Big(\mathbf{f}\big(\mathbf{x} + t\mathbf{h}\big) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\Big) \cdot \mathbf{h}\, \mathrm{d}t.$$

Z této rovnosti plyne, že pro $\mathbf{h} \neq 0$ platí

$$\begin{aligned} \frac{|U(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - U(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}|}{\|\mathbf{h}\|} &= \left| \int_0^1 \Big(\mathbf{f}\big(\mathbf{x} + t\mathbf{h}\big) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\Big) \cdot \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\, \mathrm{d}t \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 \Big\|\mathbf{f}\big(\mathbf{x} + t\mathbf{h}\big) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\Big\|\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Pokud budeme předpokládat, že je vektorová funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ v oblasti Ω spojitá, dostaneme z této nerovnosti

$$\lim_{\mathbf{h} \to 0} \frac{|U(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - U(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}|}{\|\mathbf{h}\|} = 0,$$

což znamená, že funkce $U(\mathbf{x})$ je diferencovatelná a její diferenciál $\mathrm{d}U(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}$, tj.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} U(\mathbf{x}),$$

a vektorové pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ je potenciálové.

Předchozí úvahy lze shrnout do následující věty:

Věta. Nechť je Ω otevřená souvislá podmnožina v $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ spojitá vektorová funkce na Ω. Pak jsou ekvivalentní následující tvrzení:

1. Integrál vektorového pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ nezávisí na křivce $\mathcal{C} \subset \Omega$;
2. Vektorové pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ je v Ω konzervativní;
3. Vektorové pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ je v Ω potenciálové.

Již víme, že pokud je $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ spojitě diferencovatelné potenciálové vektorové pole na Ω, platí vztah (7), tj.

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_i} \,.$$

Obrácení věta ale obecně neplatí.

Příklad. Vektorová funkce $\mathbf{f}(x,y) = \left(\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{-x}{x^2+y^2}\right)$ má v celém prostoru $\mathbb{R}^2$ s výjimkou bodu $x = y = 0$ spojité parciální derivace všech řádů. Složky vektorové funkce $\mathbf{f}(x,y)$ jsou

$$f_x(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}\,, \qquad f_y(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

a platí pro ně

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,, \qquad \frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Tedy podmínka (7) je splněna. Ale pro integrál přes kružnici $\mathcal{C}$ danou rovnicemi $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, kde $R > 0$ a $0 \le \varphi \le 2\pi$, dostaneme

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{(R\sin\varphi\cdot(-R\sin\varphi) - R\cos\varphi\cdot R\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi}{R^2} = -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = -2\pi\,.$$

Tedy integrál přes uzavřenou křivku není nula a křivkový integrál vektorové funkce $\mathbf{f}(x,y)$ je závislý na křivce, přestože platí (7).

Vraťme se nyní od obecného případu $\mathbb{R}^n$ k prostoru $\mathbb{R}^3$. Tam lze podmínky (7) zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} = 0\,, \qquad \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} = 0\,, \qquad \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} = 0\,,$$

neboli $\operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Kdyby byla vektorová funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ a oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ taková, že bychom mohli použít Stokesovu větu pro každou uzavřenou křivku $\mathcal{C}$, která leží v Ω, dostali bychom ze vztahu $\operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ rovnost

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{S} = 0\,.$$

Tedy vektorové pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ by bylo konzervativní, tj. existovala by funkce $U(\mathbf{x})$ taková, že $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} U(\mathbf{x})$.

`Poznámka.` Předpoklad, který to zaručuje lze slovy formulovat tak, že oblast Ω musí mít tu vlastnost, že každou uzavřenou křivku $\mathcal{C}$, která leží v Ω, lze v Ω "spojitě deformovat na bod".

Co se tím myslí, je snad intuitivně jasné. Matematicky se toto tvrzení formuluje zhruba takto: Nechť je $\mathcal{C}$ uzavřená křivka v Ω, jejíž parametrické rovnice jsou $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$ a $\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{\varphi}(b)$. Řekneme, že křivku $\mathcal{C}$ lze spojitě deformovat na bod, jestliže existuje spojité zobrazení $\boldsymbol{\Phi}(t,u) : \langle a,b\rangle \times \langle 0,1\rangle \to \Omega$ takové, že pro každé $u_0 \in (0,1)$ je $\boldsymbol{\Phi}(t,u_0)$ uzavřená křivka, $\boldsymbol{\Phi}(t,0) = \boldsymbol{\varphi}(t)$, tj. původní křivka $\mathcal{C}$, a $\boldsymbol{\Phi}(t,1) = \boldsymbol{\varphi}(a)$, tj. bod.

Otevřené a souvislé podmnožiny $\mathbb{R}^n$, které mají tuto vlastnost se nazývají *jednoduše souvislé.*

Lze ukázat, že platí následující věta.

Věta. Nechť je $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ vektorová funkce třídy $C_1(\Omega)$, kde Ω je otevřená, souvislá, jednoduše souvislá podmnožina $\mathbb{R}^3$. Pak je vektorové pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ konzervativní na množině Ω právě tehdy, když $\operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

`Poznámka:` Lze ukázat, že když je Ω je otevřená, souvislá, jednoduše souvislá podmnožina $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ vektorová funkce třídy $C_1(\Omega)$, je $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ konzervativní na množině Ω právě tehdy, když pro každé i a k platí vztah (7).