Jednoduché integrály

Primitivní funkce

Každá funkce $F(x)$, pro kterou platí $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in M \subset \mathbb{R}$, nazývá primitivní funkce k funkci $f(x)$ na množině M.

Příklad 1. Ukažte, že funkce $F(x) = 2\sqrt{x}\,(\ln x - 2)$ je pro $x > 0$ primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Příklad 2. Ukažte, že funkce $F(x) = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr)$ je primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Příklad 3. Ukažte, že funkce $F(x) = -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ je pro $x > 0$ primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Neurčitý integrál funkce $f(x)$, $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, na množině $M \subset \mathbb{R}$ je množina všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na množině M.

Jestliže je množina M interval (a, b), je

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c\,,$$

kde $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu (a, b) a c je libovolné reálné číslo.

`Poznámka.` Konstantu c budu pro jednoduchost často vynechávat, ale musím si pamatovat, že tam je. Ale tato konstanta bude důležitá na konci semestru při řešení diferenciálních rovnic.

Příklad 1.r. Automobil, který jede rychlostí $30\,\mathrm{ms}^{-1}$, začne brzdit $200\,\mathrm{m}$ od překážky P. Jeho zpomalení je $4\,\mathrm{ms}^{-2}$. Najděte jeho vzdálenost od překážky P jako funkci času t od okamžiku, kdy začal brzdit.

Jestliže označíme $x(t)$ vzdálenost automobilu od překažky P v čase t, je to vlastně úloha najít funkci $x = x(t)$ takovou, že

$$x'(t) = -(30 - 4t) = 4t - 30\,, \qquad x(0) = 200\,.$$

Funkce $x(t)$ je pak primtivní funkce k funkci $4t - 30$ taková, že $x(0) = 200$. Proto je

$$x(t) = \int (4t - 30)\,\mathrm{d}t = 2t^2 - 30t + c\,.$$

Podminka $x(0) = 200$, která se v diferenciálních rovnicích nazývá počáteční podmínka, určuje hodnotu konstanty c. Protože musí platit $x(0) = c = 200$, je hledaná funkce je $x(t) = 2t^2 - 30t + 200$.

`Poznámka:` Když vynecháváme při integraci konstantu, máme rovnosti

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x\,, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = -\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,,$$

které platí pro $x > 0$. To ale neznamená, že pro $x > 0$ platí

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,,$$

ale pouze to, že existuje reálné číslo c takové, že pro každé $x > 0$ je

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + c\,.$$

Příklad 2.r. Najděte číslo A tak, aby $\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = Ax^{\alpha+1}$.

Řešení: Podle definice musí být

$$\big(Ax^{\alpha+1}\big)' = A(\alpha+1)x^\alpha = x^\alpha\,,\quad \text{tj.}\quad A(\alpha+1) = 1\,,\quad \text{neboli}\quad A = \frac{1}{\alpha+1}\,,\quad \alpha+1 \neq 0\,.$$

Případ $\alpha = -1$ je zvláštní, i když velmi častý případ. Pomocí derivace se snadno zjistí, že

$$\int x^{-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c\,.$$

Linearita neurčitého integrálu

Když existují integrály $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int g(x)\,\mathrm{d}x$ a a, b jsou reálná čísla existuje integrál funkce $af(x) + bg(x)$ a platí

$$\int \big(af(x) + bg(x)\big)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Příklad 3.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 3x^{-3/4}}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 3x^{-3/4}}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x = \int \big(x^{1/4} - 2x^{5/12} + 3x^{-1}\big)\,\mathrm{d}x = \tfrac{4}{5}\,x^{5/4} - 2\,\tfrac{17}{12}\,x^{17/12} + 3\ln|x| + c\,.$$

Lineární substutuce $y = ax + b$, $a \neq 0$

Příklad 4.r. Najděte číslo A tak, aby $\int (2-3x)^8\,\mathrm{d}x = A(2-3x)^9$.

Řešení: Podle definice musí být

$$\big(A(2-3x)^9\big)' = A\,9\,(2-3x)^8\,(-3) = -27A(2-3x)^8 = (2-3x)^8\,,\quad \text{tj.}\quad -27A = 1\,,$$

neboli $A = -\frac{1}{27}$.

Příklad 5.r. Nechť je $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$. Najděte konstantu A tak, aby

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = AF(ax+b)\,, \quad \text{kde} \quad a \neq 0\,.$$

Řešení: Podle předpokladu je $F'(x) = f(x)$. Musí tedy platit

$$\big(AF(ax+b)\big)' = AF'(ax+b)\,a = aAf(ax+b) = f(ax+b)\,, \quad \text{tj.} \quad aA = 1\,,$$

neboli $A = \frac{1}{a}$. To znamená,, že

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{a}\,F(ax+b)\,, \quad \text{kde} \quad F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{1}$$

Příklad 6.r. Najděte integrály

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(4x+3)^2}\,, \qquad \int \frac{3\,\mathrm{d}x}{5-2x}\,, \qquad \int \sqrt{1-\tfrac{1}{2}\,x}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(2-3x)^4}}\,.$$

Řešení:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(4x+3)^2} = \int (4x+3)^{-2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{-1}\,(4x+3)^{-1} = -\frac{1}{4(4x+3)}\,,$$

$$\int \frac{3\,\mathrm{d}x}{5-2x} = 3\int (5-2x){-1}\,\mathrm{d}x = 3\,\tfrac{1}{-2}\,\ln|5-2x| = -\tfrac{3}{2}\,\ln|2-5x|\,,$$

$$\int \sqrt{1-\tfrac{1}{2}\,x}\,\mathrm{d}x = \int \big(1-\tfrac{1}{2}\,x\big)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{\frac{3}{2}}\,(1-\tfrac{1}{2}\,x)^{3/2} = -\tfrac{4}{3}\,\big(1-\tfrac{1}{2}\,x\big)^{3/2}\,,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(2-3x)^4}} = \int (2-3x)^{-4/3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{-3}\,\frac{1}{-\frac{1}{3}}\,(2-3x)^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{2-3x}}\,.$$

Integrace jednoduchých zlomků

Příklad 7.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+4}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Když napíšeme (dělení polynomu polynomem)

$$\frac{x^2+3x+4}{x+1} = x+2+\frac{2}{x+1}\,,$$

dostaneme

$$\int \frac{x^2+3x+4}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int \left(x+2+\frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\,x^2+2x+2\ln|x+1|\,.$$

Příklad 8.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Pokud napíšeme $\displaystyle\frac{x^2-3}{x^2+1} = 1-\frac{4}{x^2+1}$, dostneme

$$\int \frac{x^2-3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \left(1-\frac{4}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = x-4\,\mathrm{arctg}\,x\,.$$

Příklad 9.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+13}$.

Řešení: Pokud napíšeme

$$x^2+4x+13=(x+2)^2+9=9\left(\frac{(x+2)^2}{9}+1\right)=9\left(\Big(\frac{x+2}{3}\Big)^2+1\right),$$

dostaneme integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+13}=\int \frac{\mathrm{d}x}{9\Big(\big(\frac{1}{3}\,x+\frac{2}{3}\big)^2+1\Big)}=\frac{1}{9}\,\frac{1}{\frac{1}{3}}\,\operatorname{arctg}\big(\tfrac{1}{3}\,x+\tfrac{2}{3}\big)=\frac{1}{3}\,\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}\,.$$

Příklad 10.r. Najděte čísla A a B taková, že

$$\frac{2x+3}{(x-2)(3x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{3x+1} \tag{2}$$

a pomocí toho spočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{(x-2)(3x+1)}$.

Řešení: Když vynásobíme rovnost (2) výrazem $(x-2)(3x+1)$, dostaneme rovnost

$$2x+3=A(3x+1)+B(x-2)\,, \tag{3}$$

která musí platit pro všechna x. Tedy pro všechna x musí platit

$$2x+3=(3A+B)x+(A-2B)\,,\quad \text{tj.}\quad 3A+B=2\,,\quad A-2B=3\,.$$

Tato soustava rovnic má řešení $A=1$ a $B=-1$. Tedy platí

$$\int \frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{(x-2)(3x+1)}=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{3x+1}\right)\mathrm{d}x=\ln|x-2|-\tfrac{1}{3}\,\ln|3x+1|\,.$$

`Poznámka:` Kdybychom věděli, že čísla A a B, pro které platí (2) existují, mohli bychom postupovat také tak, že do rovnice (3) dosadíme vhodná x. Například pro $x=2$, resp. $x=-\frac{1}{3}$, dostaneme

$$7=7A+0\,B\,,\quad \text{resp.}\quad \tfrac{7}{3}=0\,A-\tfrac{7}{3}\,B\,.$$

Příklad 4. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$. $\Big[-3x^{-1/3}-\frac{9}{2}\,x^{2/3}+\frac{9}{5}\,x^{5/3}-\frac{3}{8}\,x^{8/3}+c\,.\Big]$

Příklad 5. Najděte integrál $\displaystyle\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. $\Big[\frac{4}{5}\,x^{5/4}+\frac{4}{3}\,x^{-3/4}+c\,.\Big]$

Příklad 6. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^4+2+x^{-4}}}{x^3}\,\mathrm{d}x$. $\Big[\ln|x|-\frac{1}{4}\,x^{-4}+c\,.\Big]$

Příklad 7. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{(3-4x)^5}$. $\left[\dfrac{1}{8(3-4x)^4}+c\,.\right]$

Příklad 8. Najděte integrál $\int \sqrt[4]{(2x+1)^3}\,\mathrm{d}x$. $\left[\frac{2}{7}\,(2x+1)^{7/4} + c\,.\right]$

Příklad 9. Najděte integrál $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{(5-\frac{1}{4}\,x)^7}}$. $\left[\frac{16}{3}\left(5-\frac{1}{4}\,x\right)^{-3/4} + c\,.\right]$

Příklad 10. Najděte integrál $\int \dfrac{5-4x-3x^2}{2x-1}\,\mathrm{d}x$. $\left[-\frac{3}{4}\,x^2 - \frac{11}{4}\,x + \frac{9}{8}\,\ln|2x-1| + c\,.\right]$

Příklad 11. Najděte integrál $\int \dfrac{x^3-1}{x-1}\,\mathrm{d}x$. $\left[\frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^2 + x + c\,.\right]$

Příklad 12. Najděte integrál $\int \dfrac{x^5-x^4+2x^2+3x+1}{x+2}\,\mathrm{d}x$.
$\left[\frac{1}{5}\,x^5 - \frac{3}{4}\,x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 23x - 45\ln|x+2| + c\,.\right]$

Příklad 13. Najděte integrál $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+7}$. $\left[\frac{1}{\sqrt{7}}\,\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}} + c\,.\right]$

Příklad 14. Najděte integrál $\int \dfrac{(x^2+1)(x^2-3)}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$. $\left[\frac{1}{3}\,x^3 - 6x + \frac{21}{2}\,\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + c\,.\right]$

Příklad 15. Najděte integrál $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+4}$. $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + c\,.\right]$

Příklad 16. Najděte integrál $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-6x+9}$. $\left[\frac{-1}{x-3} + c\,.\right]$

Příklad 17. Najděte integrál $\int \dfrac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{x^2+4x+4}$. $\left[2\ln|x+2| + \frac{1}{x+2} + c\,.\right]$

Příklad 18. Najděte čísla A a B taková, že $\dfrac{x+5}{(x+2)(x-3)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x+2}$ a pomocí toho spočítejte integrál $\int \dfrac{(x+5)\,\mathrm{d}x}{(x+2)(x-3)}$. $\left[\frac{8}{5}\,\ln|x-3| - \frac{3}{5}\,\ln|x+2| + c\,.\right]$

Příklad 19. Najděte čísla A a B taková, že $\dfrac{3x-1}{(2x+1)(3x+2)} = \dfrac{A}{2x+1} + \dfrac{B}{3x+2}$ a pomocí toho spočítejte integrál $\int \dfrac{(3x-1)\,\mathrm{d}x}{(2x+1)(3x+2)}$. $\left[3\ln|3x+2| - \frac{5}{2}\,\ln|2x+1| + c\,.\right]$

Příklad 20. Najděte čísla A, B a C taková, že

$$\frac{2x^2+x+5}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

a pomocí toho spočítejte integrál $\int \dfrac{(2x^2+x+5)\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x-2)(x+3)}$.
$\left[-\ln|x+1| + \ln|x-2| + 2\ln|x+3| + c\,.\right]$

Příklad 21. Najděte čísla A, B a C taková, že

$$\frac{2x^2-9x-16}{(x-3)(x+2)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

a pomocí toho spočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{(2x^2 - 9x - 16)\,\mathrm{d}x}{(x-3)(x+2)^2}$.

$\left[-\ln|x-3| + 3\ln|x+2| + \frac{2}{x+2} + c\,.\right]$

Různé příklady výpočtu jednoduchých neurčitých integrálů

Při výpočtu neurčitých integrálů budeme používat několik známých primitivních funkcí, které jsou uvedeny v následující tabulce

$f(x)$	$F(x)$	**poznámka**
x^a	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$	a je konstantní, $a+1 \neq 0$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2}\pi$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \operatorname{argtgh} x\,,\quad \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = \operatorname{argcotgh} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\arcsin x = -\arccos x + \frac{1}{2}\pi$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$	$\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \operatorname{argsinh} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$	$\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \operatorname{argcosh} x$
e^x	e^x	
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$a > 0$, $a \neq 1$ je konstanta, $a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}$
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotg} x$	
$\sinh x$	$\cosh x$	$\sinh x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\cosh x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$
$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\operatorname{tgh} x$	$\operatorname{tgh} x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$
$\dfrac{1}{\sinh^2 x}$	$-\operatorname{cotgh} x$	$\operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$

Příklad 11.r. Najděte integrály

$$\int e^{3x+1}\,dx\,, \qquad \int 3^{1-2x}\,dx\,, \qquad \int \sin(\tfrac{1}{2}\,x+5)\,dx\,, \qquad \int \cos(\pi-2x)\,dx\,,$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2(4x-3)}\,, \qquad \int \frac{2\,dx}{\sin^2(3-2x)}\,.$$

Řešení: Podle základních vzorců a vztahu (1) je

$$\begin{aligned}
&\int e^{3x+1}\,dx = \tfrac{1}{3}\,e^{3x+1}\,, && \int 3^{1-2x}\,dx = -\frac{3^{1-2x}}{2\ln 3}\,,\\
&\int \sin(\tfrac{1}{2}\,x+5)\,dx = -2\cos(\tfrac{1}{2}\,x+5)\,, && \int \cos(\pi-2x)\,dx = -\tfrac{1}{2}\,\sin(\pi-2x)\\
&\int \frac{dx}{\cos^2(4x-3)} = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{tg}(4x-3)\,, && \int \frac{2\,dx}{\sin^2(3-2x)} = \mathrm{cotg}(3-2x)\,.
\end{aligned}$$

Příklad 12.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{2^{2x-1}-5^{x-2}}{10^{x-1}}\,dx.$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2^{2x-1}-5^{x-2}}{10^{x-1}}\,dx &= \int \left(\frac{2^{2x-1}}{10^{x-1}} - \frac{5^{x-2}}{10^{x-1}}\right) dx = \int \left(5\left(\tfrac{2}{5}\right)^x - \tfrac{2}{5}\left(\tfrac{1}{2}\right)^x\right) dx =\\
&= \frac{5\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\frac{2}{5}} - \frac{2}{5}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\ln 5-\ln 2}\,\frac{2^x}{5^{x-1}} + \frac{2^{1-x}}{5\ln 2}\,.
\end{aligned}$$

Příklad 13.r. Najděte čísla A, B a C tak, aby bylo $\displaystyle\int (x^2-3)e^{2x}\,dx = (Ax^2+Bx+C)e^{2x}$.

Řešení: Podle definice musí platit

$$\begin{aligned}
\Big((Ax^2+Bx+C)e^{2x}\Big)' &= (2Ax+B)e^{2x} + 2(Ax^2+Bx+C)e^{2x} =\\
&= \big(2Ax^2+(2A+2B)x+(B+2C)\big)e^{2x} = \big(x^2-3\big)e^{2x}.
\end{aligned}$$

Tedy stačí zvolit čísla A, B a C tak, aby platilo

$$2A=1\,, \quad 2A+2B=0\,, \quad B+2C=-3\,, \quad \text{tj.} \quad A=\tfrac{1}{2}\,, \quad B=-\tfrac{1}{2}\,, \quad C=-\tfrac{5}{4}\,.$$

Proto je

$$\int (x^2-3)e^{2x}\,dx = \big(\tfrac{1}{2}\,x^2 - \tfrac{1}{2}\,x - \tfrac{5}{4}\big)e^{2x}.$$

`Poznámka:` Všechny integrály typu $\displaystyle\int P_N(x)e^{\mu x}\,dx$, kde $\mu \neq 0$ a $P_N(x)$ je polynom stpně N, mají tvar $Q_N(x)e^{\mu x}$, kde $Q_N(x)$ je polynom stupně N s neznámými koeficienty, které najdeme podle definice primitivní funkce, tj. platí

$$\int P_N(x)e^{\mu x}\,dx = Q_N(x)e^{\mu x}\,, \quad \text{kde} \quad \Big(Q_N(x)e^{\mu x}\Big)' = P_N(x)e^{\mu x}. \tag{4}$$

Jiná možnost, jak najít integrály tohoto typu, je metoda integrace per partes.

Příklad 14.r. Najděte integrály

$$\int \cos 3x \cos x \,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \sin 3x \sin 2x \,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \sin 4x \cos x \,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení: Při hledání integrálů tohoto typu se se často používají následující vztahy

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,, \qquad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,, \qquad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\,.$$

Jestliže je sečteme, resp. odečteme, dostaneme vztahy

$$\begin{aligned} \cos\alpha\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)\,,\\ \sin\alpha\sin\beta &= \tfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)\,,\\ \sin\alpha\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

S použitím těchto vztahů je

$$\begin{aligned} \int \cos 3x\cos x\,\mathrm{d}x &= \int \tfrac{1}{2}\big(\cos 2x+\cos 4x\big)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\,\sin 2x + \tfrac{1}{8}\,\sin 4x\,,\\ \int \sin 3x\sin 2x\,\mathrm{d}x &= \int \tfrac{1}{2}\big(\cos x-\cos 5x\big)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\,\sin x - \tfrac{1}{10}\,\sin 5x\,,\\ \int \sin 4x\cos x\,\mathrm{d}x &= \int \tfrac{1}{2}\big(\sin 5x+\sin 3x\big) = -\tfrac{1}{10}\,\cos 5x - \tfrac{1}{6}\,\cos 3x\,. \end{aligned}$$

Příklad 15.r. Najděte integrály

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \sin^2 2x\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \sin 3x\cos 3x\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení: Protože $\cos 0 = 1$ a $\sin 0 = 0$, dostaneme z (5) pro $\alpha = \beta$ vztahy

$$\cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}\,(1+\cos 2\alpha)\,, \qquad \sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}\,(1-\cos 2\alpha)\,, \qquad \sin\alpha\cos\alpha = \tfrac{1}{2}\,\sin 2\alpha\,.$$

Z toho pak pro hledané integrály plyne

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x &= \int \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\,x + \tfrac{1}{4}\,\sin 2x\,,\\ \int \sin^2 2x\,\mathrm{d}x &= \int \tfrac{1}{2}\,(1-\cos 4x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\,x - \tfrac{1}{8}\,\sin 4x\,,\\ \int \sin 3x\cos 3x\,\mathrm{d}x &= \int \tfrac{1}{2}\,\sin 6x\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{12}\cos 6x\,. \end{aligned}$$

Příklad 16.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \cos(x-3)\sin(3x+2)\cos(5x+1)\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Jestliže použijeme vztahy (5) dostaneme postupně

$$\begin{aligned} &\int \cos(x-3)\sin(3x+2)\cos(5x+1)\,\mathrm{d}x =\\ &\quad= \int \tfrac{1}{2}\,\big(\sin(4x-1)+\sin(2x-5)\big)\cos(5x+1)\,\mathrm{d}x =\\ &\quad= \tfrac{1}{2}\int \Big(\tfrac{1}{2}\,\big(\sin 9x - \sin(x+2)\big) + \tfrac{1}{2}\,\big(\sin(7x-4)-\sin(3x+6)\big)\Big)\,\mathrm{d}x =\\ &\quad= -\tfrac{1}{36}\,\cos 9x + \tfrac{1}{4}\,\cos(x+2) - \tfrac{1}{28}\,\cos(7x-4) + \tfrac{1}{12}\,\cos(3x+6)\,. \end{aligned}$$

Příklad 17.r. Najděte čísla A a B tak, aby platilo

$$\int \mathrm{e}^{-2x}(4\cos 3x - \sin 3x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)\,.$$

Řešení: Podle definice primitivní funkce musí platit

$$\begin{aligned}
\Big(\mathrm{e}^{-2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)\Big)' &= \\
&= -2\mathrm{e}^{-2x}(A\cos 3x + B\sin 3x) + \mathrm{e}^{-2x}(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) = \\
&\quad = \mathrm{e}^{-2x}\big((-2A+3B)\cos 3x + (-3A-2B)\sin 3x\big) = \mathrm{e}^{-2x}(4\cos 3x - \sin 3x)\,.
\end{aligned}$$

Proto stačí zvolit čísla A a B tak, aby platilo

$$-2A + 3B = 4\,,\quad -3A - 2B = -1\,,\quad \text{tj.}\quad A = -\tfrac{5}{13}\,,\quad B = \tfrac{14}{13}\,.$$

Tedy hledaný integrál je

$$\int \mathrm{e}^{-2x}(4\cos 3x - \sin 3x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{13}\,\mathrm{e}^{-2x}(-5\cos 3x + 14\sin 3x)\,.$$

`Poznámka:` Podobně lze najít všechny integrály typu $\int \mathrm{e}^{\rho x}\big(P_{N_1}(x)\cos\omega x + Q_{N_2}(x)\sin\omega x\big)\,\mathrm{d}x$, kde $P_{N_1}(x)$, resp. $Q_{N_2}(x)$, je polynom stupně N_1, resp. stupně N_2, a ρ a ω nejsou současně rovna nule. Hledaný integrál má tvar

$$\int \mathrm{e}^{\rho x}\big(P_{N_1}(x)\cos\omega x + Q_{N_2}(x)\sin\omega x\big)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\rho x}\Big(R_N(x)\cos\omega x + S_N(x)\sin\omega x\Big)\,, \tag{6}$$

kde $R_N(x)$ a $S_N(x)$ jsou polynomy stupně $N = \max(N_1, N_2)$ s neznámými koeficienty, které najdeme derivací (6).

Příklad 18.r. Najděte integrál $\int \mathrm{e}^{-x}\big(3\cos 2x - (4x+1)\sin 2x\big)\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Podle (6) existují čísla A, B, C a D taková, že

$$\int \mathrm{e}^{-x}\big(3\cos 2x - (4x+1)\sin 2x\big)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-x}\big((Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x\big)\,.$$

Tato čísla najdeme z rovnosti

$$\begin{aligned}
&\Big(\mathrm{e}^{-x}\big((Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x\big)\Big)' = \\
&\quad = -\mathrm{e}^{-x}\big((Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x\big) + \mathrm{e}^{-x}\big(A\cos 2x + C\sin 2x\big) + \\
&\qquad + \mathrm{e}^{-x}\big(-2(Ax+B)\sin 2x + 2(Cx+D)\cos 2x\big) = \\
&= \mathrm{e}^{-x}\Big(\big((-A+2C)x + A - B + 2D\big)\cos 2x + \big((-2A-C)x + C - 2B - D\big)\sin 2x\Big) = \\
&= \mathrm{e}^{-x}\big(3\cos 2x - (4x+1)\sin 2x\big)\,.
\end{aligned}$$

Proto musí platit

$$\begin{aligned}
-A + 2C &= 0\,, & A - B + 2D &= 3\,, \\
-2A - C &= -4\,, & C - 2B - D &= -1\,,
\end{aligned}\qquad \text{tj.}\quad A = \tfrac{8}{5}\,,\quad C = \tfrac{4}{5}\,,\quad B = \tfrac{11}{25}\,,\quad D = \tfrac{23}{25}\,.$$

Hledaný integrál tedy je

$$\int \mathrm{e}^{-x}\big(3\cos 2x-(4x+1)\sin 2x\big)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-x}\Big(\big(\tfrac{8}{5}\,x+\tfrac{11}{25}\big)\cos 2x+\big(\tfrac{4}{5}\,x+\tfrac{23}{25}\big)\sin 2x\Big).$$

`Poznámka:` Integrály typu $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\rho x}\big(P_{N_1}(x)\cos\omega x+Q_{N_2}(x)\sin\omega x\big)\,\mathrm{d}x$, kde $P_{N_1}(x)$ a $Q_{N_2}(x)$ jsou reálné polynomy, lze najít také s použitím Eulerova vzorce

$$\mathrm{e}^{(\rho+\mathrm{i}\omega)x}\mathrm{e}^{\rho x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}=\mathrm{e}^{\rho x}\big(\cos\omega x+\mathrm{i}\sin\omega x\big)\,. \tag{7}$$

Z něho plynou vztahy

$$\mathrm{e}^{\rho x}\cos\omega x=\mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{(\rho+\mathrm{i}\omega)x}\big)\,,\qquad \mathrm{e}^{\rho x}\sin\omega x=\mathrm{Re}\big(-\mathrm{i}\mathrm{e}^{(\rho+\mathrm{i}\omega)x}\big)\,.$$

Pak je

$$\mathrm{e}^{\rho x}\big(P_{N_1}(x)\cos\omega x+Q_{N_2}(x)\sin\omega x\big)=\mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{(\rho+\mathrm{i}\omega)x}\widehat{P}_N(x)\Big),$$

kde $\widehat{P}_N(x)=P_{N_1}(x)-\mathrm{i}Q_{N_2}(x)$ je komplexní polynom stupně $N=\max(N_1,N_2)$. Pak je

$$\int \mathrm{e}^{\rho x}\big(P_{N_1}(x)\cos\omega x+Q_{N_2}(x)\sin\omega x\big)\,\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\left(\int \mathrm{e}^{(\rho+\mathrm{i}\omega)x}\widehat{P}_N(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Poslední integrál má pak tvar

$$\int \mathrm{e}^{(\rho+\mathrm{i}\omega)x}\widehat{P}_N(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{(\rho+\mathrm{i}\omega)x}\widehat{Q}_N(x)\,,$$

kde $\widehat{Q}_N(x)$ je polynom stupně N s neznámými komplexními koeficienty.

Aplikujeme tento postup na integrál z příkladu **18.r**. Platí

$$\mathrm{e}^{-x}\big(3\cos 2x-(4x+1)\sin 2x\big)=\mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}\big(3+(4x+1)\mathrm{i}\big)\Big)=\mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}\big(4\mathrm{i}x+3+\mathrm{i}\big)\Big).$$

Integrál

$$\int \mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}\big(4\mathrm{i}x+3+\mathrm{i}\big)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}(Ax+B)\,,$$

kde A a B jsou komplexní čísla. Po derivaci dostaneme

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}(Ax+B)\big)'&=(-1+2\mathrm{i})\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}(Ax+B)+\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}A=\\&=\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}\big((-1+2\mathrm{i})Ax+A+(-1+2\mathrm{i})B\big)=\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}\big(4\mathrm{i}x+3+\mathrm{i}\big)\,.\end{aligned}$$

Tedy pro komplexní čísla A a B musí platit

$$(-1+2\mathrm{i})A=4\mathrm{i}\,,\quad A+(-1+2\mathrm{i})B=3+\mathrm{i}\,,$$

neboli

$$A=\frac{4\mathrm{i}}{-1+2\mathrm{i}}=\frac{8-4\mathrm{i}}{5}\,,\quad B=\frac{-1-2\mathrm{i}}{5}\left(3+\mathrm{i}-\frac{8-4\mathrm{i}}{5}\right)=\frac{11-23\mathrm{i}}{25}\,.$$

Tedy

$$\int \mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}\big(4\mathrm{i}x+3+\mathrm{i}\big)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}\left(\frac{8-4\mathrm{i}}{5}\,x+\frac{11-23\mathrm{i}}{25}\right),$$

a hledaný integrál je

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{-x}\big(3\cos 2x-(4x+1)\sin 2x\big)\,\mathrm{d}x &= \operatorname{Re}\Big(\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}\big(\tfrac{8-4\mathrm{i}}{5}\,x+\tfrac{11-23\mathrm{i}}{25}\big)\Big)=\\ &=\operatorname{Re}\Big(\mathrm{e}^{-x}\big(\cos 2x+\mathrm{i}\sin 2x\big)\big(\tfrac{8-4\mathrm{i}}{5}\,x+\tfrac{11-23\mathrm{i}}{25}\big)\Big)=\\ &=\mathrm{e}^{-x}\Big(\big(\tfrac{8}{5}\,x+\tfrac{11}{25}\big)\cos 2x+\big(\tfrac{4}{5}\,x+\tfrac{23}{25}\big)\sin 2x\Big),\end{aligned}$$

jak jsme zjistili dříve.

Příklad 19.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$.

Řešení. Je-li $F(x)$ primitivní funkce k $f(x)$ a $a\neq 0$, je $\displaystyle\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\,F(ax+b)$. Protože $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x$, je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}=\tfrac12\,\arcsin(2x+3)\,.$$

Příklad 20.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(\frac12 x-1)^2+1}}$.

Řešení. Protože $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}=\ln\Big(x+\sqrt{x^2+1}\Big)$, je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(\frac12 x-1)^2+1}}=2\ln\Big(\tfrac12\,x-1+\sqrt{\big(\tfrac12\,x-1\big)^2+1}\Big).$$

Poslední výraz lze napsat ve tvaru

$$2\ln\frac{x-2+\sqrt{(x-2)^2+4}}{2}=2\ln\big(x-2+\sqrt{x^2-4x+8}\big)-2\ln 2\,.$$

A protože neurčitý integrál nezávisí na aditivní konstantě, lze také psát

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(\frac12 x-1)^2+1}}=2\ln\big(x-2+\sqrt{x^2-4x+8}\big)\,.$$

Příklad 21.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(3x-4)^2-1}}$.

Řešení. Protože $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}=\ln\Big(x+\sqrt{x^2-1}\Big)$, je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(3x-4)^2-1}}=\tfrac13\,\ln\Big(3x-4+\sqrt{(3x-4)^2-1}\Big).$$

Příklad 22.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Řešení: Platí
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,.$$
A protože $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$, je
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}}\arcsin\Bigl(\frac{x}{2}\Bigr) = \arcsin\Bigl(\frac{x}{2}\Bigr).$$

Příklad 23.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+x^2}}$.

Řešení: Platí
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}}\,.$$
A protože $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\bigl(x+\sqrt{1+x^2}\bigr)$, je
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+x^2}} = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{1+\Bigl(\frac{x}{\sqrt{3}}\Bigr)^2}\right).$$
Ale protože platí
$$\ln\left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{1+\Bigl(\frac{x}{\sqrt{3}}\Bigr)^2}\right) = \ln\frac{x+\sqrt{3+x^2}}{\sqrt{3}} = \ln\bigl(x+\sqrt{3+x^2}\bigr) - \ln\sqrt{3}\,.$$
a integrál je určen až na konstantu, lze také psát
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+x^2}} = \ln\bigl(x+\sqrt{3+x^2}\bigr)\,.$$

Příklad 24.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2-2}}$.

Řešení: Platí
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right)^2-1}}\,.$$
Protože $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\bigl(x+\sqrt{x^2-1}\bigr)$, je
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{3}}\ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x + \sqrt{\frac{3}{2}\,x^2-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}\,x+\sqrt{3x^2-2}}{\sqrt{2}}\,.$$
Ze stejného důvodu jako v předcházejícím příkladě lze také psát
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2-2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\bigl(\sqrt{3}\,x+\sqrt{3x^3-2}\bigr)\,.$$

Příklad 25.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+4x-4x^2}}$.

Řešení: Protože $4x^2-4x-1=(2x-1)^2-2$, je hledaný integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+4x-4x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-(2x-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\,\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\,.$$

Příklad 26.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+8}}$.

Řešení: Protože $x^2+4x+8=(x+2)^2+4$, je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+8}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+2)^2+4}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}} =$$

$$= \ln\left(\frac{x+2}{2} + \sqrt{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}\right) = \ln\Bigl(x+2+\sqrt{(x+2)^2+4}\Bigr) - \ln 2.$$

Proto lze také psát

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+8}} = \ln\Bigl(x+2+\sqrt{x^2+4x+8}\Bigr).$$

Příklad 27.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-3)}}$.

Řešení: Tento integrál můžeme najít podobně jako integrály v předchazejících příkladech. Napíšeme

$$x(x-3) = x^2-3x = \bigl(x-\tfrac{3}{2}\bigr)^2 - \tfrac{9}{4}\,.$$

Pak je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-3)}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\bigl(x-\frac{3}{2}\bigr)^2-\frac{9}{4}}} = \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\bigl(\frac{2}{3}\,x-1\bigr)^2-1}} =$$

$$= \ln\Bigl(\tfrac{2}{3}\,x-1+\sqrt{\bigl(\tfrac{2}{3}\,x-1\bigr)^2-1}\Bigr).$$

Podobně jako v předcházejících příkladech je možné také psát

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-3)}} = \ln\Bigl(x-\tfrac{3}{2}+\sqrt{x(x-3)}\Bigr).$$

Příklad 22. Najděte integrál $\displaystyle\int \bigl(\mathrm{e}^x+1\bigr)\bigl(\mathrm{e}^{-2x}-3\bigr)\sqrt{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

$$\left[-2\mathrm{e}^{-x/2} - \tfrac{2}{3}\,\mathrm{e}^{-3x/2} - 2\mathrm{e}^{3x/2} - 6\mathrm{e}^{x/2} + c\,.\right]$$

Příklad 23. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\left(3\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{1-2x}\right)\left(2\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{3+x}\right)}{\sqrt[3]{\mathrm{e}^{2x}}}\,\mathrm{d}x.$

$$\left[-9\mathrm{e}^{-2x/3} + \tfrac{9}{4}\,\mathrm{e}^{3+4x/3} + \tfrac{6}{11}\,\mathrm{e}^{1-11x/3} + \tfrac{3}{5}\,\mathrm{e}^{4-5x/3} + c\,.\right]$$

Příklad 24. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{x} - 2\right)\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-x} + 2\right)}{2^{x+3}}\,\mathrm{d}x.$

$$\left[\tfrac{1}{8}\,x + \tfrac{1}{4\ln(3/4)}\,\left(\tfrac{3}{4}\right)x - \tfrac{1}{4\ln(2/3)}\,\left(\tfrac{2}{3}\right)^{x} + \tfrac{1}{2\ln 2}\,\left(\tfrac{1}{2}\right)^{x} + c\,.\right]$$

Příklad 25. Najděte integrál $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2\, x\,\mathrm{d}x.$ Použijte vztah $\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$ $\left[\mathrm{tg}\, x - x + c\,.\right]$

Příklad 26. Najděte integrál $\displaystyle\int \mathrm{cotg}^2(2x-1)\,\mathrm{d}x.$ $\left[-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{cotg}(2x-1) - x + c\,.\right]$

Příklad 27. Pro $x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\,\pi)$ najděte integrál $\displaystyle\int \sqrt{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x.$ $\left[\sqrt{2}\,\sin x + c\,.\right]$

Příklad 28. Pro $x \in (-\pi, 0)$ najděte integrál $\displaystyle\int \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x.$ $\left[\sqrt{2}\,\cos x + c\,.\right]$

Příklad 29. Pro $x \in (-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\,\pi)$ najděte integrál $\displaystyle\int \sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x.$ $\left[\sin x + \cos x + c\,.\right]$

Příklad 30. Pro $x \in (\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\,\pi)$ najděte integrál $\displaystyle\int \sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x.$ $\left[-\cos x - \sin x + c\,.\right]$

Příklad 31. Najděte integrály

$$\textbf{a.}\quad \int \cos(3x-2)\,\cos(1-2x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \textbf{b.}\quad \int \cos(2x-3)\sin(4x-1)\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\textbf{c.}\quad \int \sin(2x+1)\,\sin(2x-1)\,\mathrm{d}x\,.$$

$$\left[\begin{array}{c}\textbf{a.}\ \ \tfrac{1}{2}\,\sin(x-1) + \tfrac{1}{10}\,\sin(5x-3) + c\,; \qquad \textbf{b.}\ \ -\tfrac{1}{12}\,\cos(6x-4) - \tfrac{1}{4}\,\cos(2x+2) + c\,;\\ \textbf{c.}\ \ \tfrac{\cos 2}{2}\,x - \tfrac{1}{8}\,\sin 4x + c\,.\end{array}\right]$$

Příklad 32. Najděte integrály

$$\textbf{a.}\quad \int \cos x\,\cos 2x\,\cos 4x\,\mathrm{d}x\,, \qquad \textbf{b.}\quad \int \cos x\,\cos 2x\,\sin 3x\,\mathrm{d}x\,.$$

$$\left[\begin{array}{l}\textbf{a.}\ \ \tfrac{1}{28}\,\sin 7x + \tfrac{1}{20}\,\sin 5x + \tfrac{1}{12}\,\sin 3x + \tfrac{1}{4}\,\sin x + c\,;\\ \textbf{b.}\ \ -\tfrac{1}{24}\,\cos 6x - \tfrac{1}{16}\cos 4x - \tfrac{1}{8}\,\cos 2x + c\,.\end{array}\right]$$

Příklad 33. Najděte integrály

$$\textbf{a.}\quad \int \cos^4 x\,\mathrm{d}x\,, \qquad \textbf{b.}\quad \int \sin^4 x\,\mathrm{d}x\,, \qquad \textbf{c.}\quad \int \cos^2 x \sin^2 x\,\mathrm{d}x\,.$$

$$\left[\begin{array}{l}\textbf{a.}\ \ \tfrac{3}{8}\,x + \tfrac{1}{8}\,\sin 2x + \tfrac{1}{32}\,\sin 4x + c\,;\\ \textbf{b.}\ \ \tfrac{3}{8}\,x - \tfrac{1}{8}\,\sin 2x + \tfrac{1}{32}\,\sin 4x + c\,;\\ \textbf{c.}\ \ \tfrac{1}{8}\,x = \tfrac{1}{32}\,\sin 4x + c\,.\end{array}\right]$$

Příklad 34. Najděte integrály

$$\text{a.}\quad \int (x+1)(x-2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{b.}\quad \int (x+3)(1-2x)\sqrt{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x\,.$$

$\Big[$**a.** $(-x^2-x+1)\mathrm{e}^{-x}+c\,;$ **b.** $(-4x^2+6x-6)\mathrm{e}^{x/2}+c\,.\Big]$

Příklad 35. Najděte integrál $\displaystyle\int \big((x-2)\sin 2x - 4\cos 2x\big)\,\mathrm{d}x.$

$\Big[-\frac{7}{4}\sin 2x - \big(\frac{1}{2}x-1\big)\cos 2x + c\,.\Big]$

Příklad 36. Najděte integrály

$$\text{a.}\quad \int \mathrm{e}^x(2\cos 3x - 3\sin 3x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{b.}\quad \int \mathrm{e}^{-2x}(3\sin 2x - 8\cos 2x)\,\mathrm{d}x\,.$$

$\Big[$**a.** $\frac{1}{10}\,\mathrm{e}^x(11\cos 3x + 3\sin 3x)+c\,;$ **b.** $\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2x}(5\cos 2x - 11\sin 2x)+c\,.\Big]$

Příklad 37. Najděte integrál $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-x}\big((2x-1)\cos x + (3-x)\sin x\big)\,\mathrm{d}x.$

$\Big[\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}\big((3x-2)\sin x - (x+1)\cos x\big)+c\,.\Big]$

Příklad 38. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x.$

$\Big[\arcsin x - \ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)+c\,.\Big]$

Příklad 39. Najděte integrály

$$\text{a.}\quad \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{\mathrm{d}x}{1-x}\,, \qquad \text{b.}\quad \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{\mathrm{d}x}{1+x}\,, \quad x>1\,.$$

$\Big[$**a.** $\arcsin x + c\,;$ **b.** $\ln\big(x+\sqrt{x^2-1}\big)+c\,.\Big]$

Příklad 40. Ukažte, že pro každé $a>0$ platí

$$\text{a.}\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c\,, \qquad \text{b.}\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c\,.$$

Příklad 41. Najděte integrály

$$\text{a.}\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{1+(3x+4)^2}\,, \qquad \text{b.}\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{8+(3x+4)^2}\,,$$

$$\text{c.}\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{1-(3x+4)^2}\,, \qquad \text{d.}\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{8-(3x+4)^2}\,.$$

$\Big[$**a.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3x+4)+c\,;$ **b.** $\frac{1}{6\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{3x+4}{2\sqrt{2}}+c\,;$

c. $\frac{1}{6}\ln\left|\dfrac{3x+5}{3x-3}\right|+c\,,$ **d.** $\frac{1}{12\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{3x+4+2\sqrt{2}}{3x+4-2\sqrt{2}}\right|+c\,.\Big]$

Příklad 42. Ukažte, že pro každé $a > 0$ platí

$$\textbf{a}.\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c\,, \qquad \textbf{b}.\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\Bigl(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\Bigr) + c\,.$$

Příklad 43. Najděte integrály

$$\textbf{a}.\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-2}{3}\right)^2}}\,, \qquad \textbf{b}.\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{x-2}{3}\right)^2}}\,.$$

$$\left[\textbf{a}.\ \ 3\arcsin\tfrac{x-2}{3} + c\,; \quad \textbf{b}.\ \ 3\arcsin\tfrac{2(x-2)}{3} + c\,.\right]$$

Příklad 44. Najděte integrály

$$\textbf{a}.\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{4}\right)^2 + 1}}\,, \qquad \textbf{b}.\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{4}\right)^2 - 1}}\,,$$

$$\textbf{c}.\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{4}\right)^2 + 2}}\,, \qquad \textbf{d}.\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}}}\,.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \textbf{a}.\ \ 2\ln\Bigl(\tfrac{2x+1}{4} + \sqrt{\left(\tfrac{2x+1}{4}\right)^2 + 1}\Bigr) + c\,; & \textbf{b}.\ \ 2\ln\Bigl(\tfrac{2x+1}{4} + \sqrt{\left(\tfrac{2x+1}{4}\right)^2 - 1}\Bigr) + c\,; \\ \textbf{c}.\ \ 2\ln\Bigl(\tfrac{2x+1}{4} + \sqrt{\left(\tfrac{2x+1}{4}\right)^2 + 2}\Bigr) + c\,; & \textbf{d}.\ \ 2\ln\Bigl(\tfrac{2x+1}{4} + \sqrt{\left(\tfrac{2x+1}{4}\right)^2 - \tfrac{1}{2}}\Bigr) + c\,. \end{array}\right]$$

Příklad 45. Najděte integrály

$$\textbf{a}.\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 3x + 3}\,, \qquad \textbf{b}.\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 3x + 3}}\,.$$

$$\left[\textbf{a}.\ \ \tfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+3}{\sqrt{3}} + c\,; \qquad \textbf{b}.\ \ \ln\Bigl(\tfrac{2x+3}{\sqrt{3}} + \sqrt{x^2 + 3x + 3}\Bigr) + c\,.\right]$$

Příklad 46. Najděte integrály

$$\textbf{a}.\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - x - 2}\,, \qquad \textbf{b}.\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - x - 2}}\,, \qquad \textbf{c}.\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2 + x - x^2}}\,.$$

$$\left[\textbf{a}.\ \ \tfrac{1}{3}\,\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + c\,; \quad \textbf{b}.\ \ \ln\Bigl(x - \tfrac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x - 2}\Bigr) + c\,; \quad \textbf{c}.\ \ \arcsin\tfrac{2x-1}{3} + c\,.\right]$$
