Křivkové a plošné integrály druhého druhu

Orientace regulární křivky

Křivka $\mathcal{C}$ se nazývá orientovaná, pokud je zadán směr pohybu bodu po křivce. Orientace je dána počátečním a koncovým bodem křivky $\mathcal{C}$ nebo nenulovým spojitým vektorovým polem $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ tečných vektorů ke křivce $\mathcal{C}$. Křivku opačně orientovanou ke křivce $\mathcal{C}$ budeme značit $-\mathcal{C}$.

Křivkový integrál prvního druhu

Nechť je $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektorové pole definované na orientované křivce $\mathcal{C}$ s orientací $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$. Pak se integrál

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(x)\ \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} \big(f_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + f_2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_2 + \ldots + f_n(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_n\big) = \int_{\mathcal{C}} f_{\|}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}s\,,$$

kde $f_{\|}(\mathbf{x})$ je kolmý průmět vektorového pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ do směru daného vektorem $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$, tj.

$$f_{\|}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})}{\big\|\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})\big\|}\,,$$

nazývá křivkový integrál druhého druhu vektorového pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ přes orientovanou křivky $\mathcal{C}$. Pokud změníme orientaci křivky $\mathcal{C}$ na opačnou, změní se u křivkového integrálu druhého druhu znaménko, tj. platí

$$\int_{-\mathcal{C}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s} = -\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s}\,.$$

Jestliže má regulární orientovaná křivka $\mathcal{C}$ parametrické rovnice $\mathbf{x}(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\big)$, kde $a < t < b$, a její tečný vektor $\mathbf{x}'(t)$ má stejný směr jako orientace $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ křivky $\mathcal{C}$ je

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(x)\ \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} \big(f_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + f_2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_2 + \ldots + f_n(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_n\big) =$$
$$= \int_a^b \mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t)\big) \cdot \mathbf{x}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \Big(f_1\big(\mathbf{x}(t)\big)x_1'(t) + f_2\big(\mathbf{x}(t)\big)x_2'(t) + \ldots + f_n\big(\mathbf{x}(t)\big)x_n'(t)\Big)\,\mathrm{d}t\,.$$

Jestliže má vektorové $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x, y, z) = \big(f_x(\mathbf{x}), f_y(\mathbf{x}), f_z(\mathbf{x})\big)$ v $\mathbb{R}^3$ význam sily, je fyzikální význam křivkového integrálu druhého druhu

$$A = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} \big(f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y + f_z\,\mathrm{d}z\big)$$

práce silového pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ po křivce $\mathcal{C}$.

Orientovaná regulární plocha v $\mathbb{R}^3$

Plocha $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ se nazývá orientovaná, jestliže je na ni zadáno spojité vektorové pole $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ normálových vektorů k ploše $\mathcal{S}$. Plochu opačně orientovanou k ploše $\mathcal{S}$ budeme značit $-\mathcal{S}$.

Plošný integrál druhého druhu

Nechť je $\mathcal{S}$ orientovaná plocha v $\mathbb{R}^3$ a $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x, y, z) = \big(f_x(\mathbf{x}), f_y(\mathbf{x}), f_z(\mathbf{x})\big)$ vektorová funkce definovaná na ploše $\mathcal{S}$, pak integrál

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} \big(f_x(\mathbf{x})\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + f_y(\mathbf{x})\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + f_z(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\big) = \iint_{\mathcal{S}} f_{\perp}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S\,,$$

kde $f_\perp(\mathbf{x})$ je kolmý průmět vektorového pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ do normály $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ k ploče $\mathcal{S}$, tj.

$$f_\perp(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})}{\big\|\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\big\|},$$

nazýváme plošný integrál druhého druhu vektorového pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ přes plochu $\mathcal{S}$.
Jestliže změníme orientaci plochy $\mathcal{S}$ na opačnou, změní se v plošném integrálu druhého druhu znaménko, tj. platí

$$\iint_{-\mathcal{S}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{S} = -\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Má-li orientovaná plocha $\mathcal{S}$ parametrické rovnice $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$, kde $(u,v) \in \Omega$, a normálový vektor

$$\mathbf{n}(u,v) = \boldsymbol{\tau}_u(u,v) \times \boldsymbol{\tau}_v(u,v)\,, \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{\tau}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right), \quad \boldsymbol{\tau}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

jsou tečné vektory k ploše $\mathcal{S}$, má stejný směr jako vektor $\boldsymbol{\nu}\big(\mathbf{x}(u,v)\big)$, je

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\Omega} \mathbf{f}\big(\mathbf{x}(u,v)\big) \cdot \mathbf{n}(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_{\Omega} \det \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Fyzikální význam integrálu druhého druhu vektorové funkce $\mathbf{f}(x,y,z)$ přes plochu $\mathcal{S}$ orientovanou normálnou $\boldsymbol{\nu}(x,y,z)$,

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}(x,y,z)\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,,$$

je tok vektoru $\mathbf{f}$ orientovanou plochou $\mathcal{S}$ ve směru normálového vektoru $\boldsymbol{\nu}(x,y,z)$.

Příklad 1.r. Najděte křivkový integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{s}$, kde $\mathbf{f}(x,y) = (y,-x)$ a křivka $\mathcal{C}$ je dána rovnicemi $x = t - \sin t$ a $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$, která je orientovaná ve směru růstu parametru t.

Řešení. Jiný zápis uvedeného křivkového integrálu druhého druhu je

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} (y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)\,.$$

Protože z parametrických rovnic křivky $\mathcal{C}$ plyne

$$\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t = (1-\cos t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad \mathrm{d}y = y'(t)\,\mathrm{d}t = \sin t\,\mathrm{d}t\,,$$

je daný integrál

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} (y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y) = \int_0^{2\pi} \Big((1-\cos t)^2 - (t-\sin t)\sin t\Big)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{2\pi} \big(2 - 2\cos t - t\sin t\big)\,\mathrm{d}t = \Big[2t - 2\sin t + t\cos t - \sin t\Big]_0^{2\pi} = 6\pi\,.$$

Příklad 2.r. Najděte křivkový integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$, kde $\mathcal{C}$ je elipsa $x^2 + 4y^2 = 4$, která je orientovaná tak, že její tečný vektor má v bodě $A = [0;1]$ kladnou první složku.

Řešení. Protože je křivka $\mathcal{C}$ dána jako řešení rovnice, musíme nejprve najít její parametrické rovnice.

Protože křivka $\mathcal{C}$ je elipsa se středem v počátku souřadnic, hlavní poloosou $a = 2$ ve směru osy x a vedlejší poloosou $b = 1$ ve směru osy y, jsou její parametrické rovnice například

$$x = 2\cos\varphi\,, \quad y = \sin\varphi\,, \qquad -\pi < \varphi < \pi\,.$$

Bodu elipsy $A = [0;1]$ odpovídá hodnota paremetru $\varphi = \frac{1}{2}\,\pi$. Tečný vektor k elipse v bodě, který odpovídá hodnotě parametru φ, je

$$\boldsymbol{\tau} = \big(x'(\varphi), y'(\varphi)\big) = \big(-2\sin\varphi, \cos\varphi\big)\,.$$

Speciálně v bodě A, tj. pro $\varphi = \frac{1}{2}\,\pi$ je $\boldsymbol{\tau} = (-2, 0)$. A protože je první složka tohoto vektoru záporná, odpovídá naše parametrizace orientaci elipsy, které je opačná k zadané orientaci.

Z parametrických rovnice dostaneme

$$\mathrm{d}x = x'(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = -2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,, \qquad \mathrm{d}y = y'(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Kvůli opačné orientaci naší parametrizace dostaneme pro hledaný integrál

$$\int_{\mathcal{C}} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = -\int_{-\pi}^{\pi} \big(2\cos^2\varphi - \sin\varphi(-2\sin\varphi)\big)\,\mathrm{d}\varphi = -\int_{-\pi}^{\pi} 2\,\mathrm{d}\varphi = -4\pi\,.$$

Příklad 3.r. Nechť jsou $\mathbf{i}$, resp. $\mathbf{j}$, jednotkové vektory ve směru osy x, resp. y. Najděte práci vektoru $\mathbf{f} = (x-y)\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j}$ po křivce $\mathcal{C}$, která je dána parametrickými rovnicemi $x = 2\cos t$ a $y = 3\sin t$, kde $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, a která je orientovaná ve směru růstu parametru t.

Řešení. Práci A vektoru $\mathbf{f}$ po orientované křivce $\mathcal{C}$ najdeme pomocí křivkového integrálu druhého druhu

$$A = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}\,\mathbf{ds} = \int_{\mathcal{C}} \big(f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y\big)\,, \quad \text{v našem případě} \quad A = \int_{\mathcal{C}} \big((x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y\big)\,.$$

V příkladě jsou již zadené paremetrické rovnice křivky $\mathcal{C}$ a její orientace. Protože

$$\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t = -2\sin t\,\mathrm{d}t\,, \quad \mathrm{d}y = y'(t)\,\mathrm{d}t = 3\cos t\,\mathrm{d}t\,,$$

je hledaná práce

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \big((2\cos t - 3\sin t)\cdot(-2\sin t) + (2\cos t + 3\sin t)\cdot(3\cos t)\big)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{2\pi} (6 + 5\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \big(6 + \tfrac{5}{2}\,\sin 2t\big)\,\mathrm{d}t = 12\pi\,. \end{aligned}$$

Příklad 4.r. Nechť jsou $\mathbf{i}$, resp. $\mathbf{j}$, jednotkové vektory ve směru osy x, resp. y. Najděte práci vektoru $\mathbf{f} = (x^2+y^2)\mathbf{i} + (x^2-y^2)\mathbf{j}$ po křivce $y = 1 - |1-x|$ od bodu $A = [0;0]$ do bodu $B = [2;0]$.

Řešení. Práci A vektoru $\mathbf{f}$ po orientované křivce $\mathcal{C}$ najdeme pomocí křivkového integrálu druhého druhu

$$A=\int_{\mathcal{C}}\mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s}=\int_{\mathcal{C}}\big(f_x\,\mathrm{d}x+f_y\,\mathrm{d}y\big)\,,\quad \text{v našem případě}\quad A=\int_{\mathcal{C}}\big((x^2+y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y\big)\,.$$

Daná křivka $\mathcal{C}$ je složená ze dvou orientovaných úseček $\mathcal{C}=\mathcal{C}_1\dotplus\mathcal{C}_2$, kde $\mathcal{C}_1$ je úsečka z bodu $A=[0;0]$ do bodu $C=[1;1]$ a $\mathcal{C}_2$ je úsečka z bodu $C=[1;1]$ do bodu $B=[2;0]$. Proto je práce rovna

$$A=\int_{\mathcal{C}_1}\big((x^2+y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y\big)+\int_{\mathcal{C}_2}\big((x^2+y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y\big)\,.$$

Jestliže zvolime za parametrické rovnice úsečky $\mathcal{C}_1$

$$x=t\,,\quad y=t\,,\qquad 0\le t\le 1\,,\implies \mathrm{d}x=\mathrm{d}y=\mathrm{d}t\,,$$

a za parametrické rovnice úsečky $\mathcal{C}_2$

$$x=1+t\,,\quad y=1-t\,,\qquad 0\le t\le 1\implies \mathrm{d}x=\mathrm{d}t\,,\quad \mathrm{d}y=-\,\mathrm{d}t\,,$$

dostaneme

$$A=\int_0^1 2t^2\,\mathrm{d}t+\int_0^1(2+2t^2-4t)\,\mathrm{d}t=2\int_0^1\big(t^2+(1-t)^2\big)\,\mathrm{d}t=2\Big[\tfrac{1}{3}\,t^3-\tfrac{1}{3}\,(1-t)^3\Big]_0^1=\tfrac{4}{3}\,.$$

Příklad 5.r. Najděte integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{C}}\mathbf{f}(x,y,z)\,\mathrm{d}\mathbf{s}$, kde vektorové pole $\mathbf{f}=(y,x,z)$ a $\mathcal{C}$ je křivka daná parametrickými rovnicemi $x=\mathrm{e}^{-t}\cos t$, $y=\mathrm{e}^{-t}\sin t$ a $z=t\mathrm{e}^{-t}$, kde $t>0$, kterou probíháme ve směru růstu parametru t.

Řešení. Jiný zápis uvedeného křivkového integrálu druhého druhu je

$$\int_{\mathcal{C}}\mathbf{f}(x,y,z)\,\mathrm{d}\mathbf{s}=\int_{\mathcal{C}}(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z)\,.$$

Protože z parametrických rovnic křivky $\mathcal{C}$ plyne

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x&=x'(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-t}(-\cos t-\sin t)\,\mathrm{d}t\,,\\ \mathrm{d}y&=y'(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-t}(-\sin t+\cos t)\,\mathrm{d}t\,,\\ \mathrm{d}z&=z'(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-t}(-t+1)\,\mathrm{d}t\,,\end{aligned}$$

je hledaný integrál

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}}\mathbf{f}(x,y,z)\,\mathrm{d}\mathbf{s}&=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t}\Big(-\sin t\cos t-\sin^2 t-\sin t\cos t+\cos^2 t-t^2+t\Big)\,\mathrm{d}t=\\ &=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t}\big(\cos 2t-\sin 2t+t-t^2\big)\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Primitivní funkce k funkcím $f(t)=\mathrm{e}^{-2t}(\cos 2t-\sin 2t)$ a $g(t)=\mathrm{e}^{-2t}(t-t^2)$ najde například odhadem, tj. budeme hledat funkce $F(t)=\mathrm{e}^{-2t}(A\cos 2t+B\sin 2t)$ a $G(t)=\mathrm{e}^{-2t}(at^2+bt+c)$ tak, aby $F'(t)=f(t)$ a $G'(t)=g(t)$. To nám dává rovnice

$$\begin{aligned}&-2A\cos 2t-2B\sin 2t-2A\sin 2t+2B\cos 2t=\\ &\qquad=(-2A+2B)\cos 2t+(-2A-2B)\sin 2t=\cos 2t-\sin 2t\,,\\ &-2at^2-2bt-2c+2at+b=-2at^2+(2a-2b)t+(b-2c)=-t^2+t\,,\end{aligned}$$

neboli soustavy rovnic

$$-2A+2B=1\,,\quad -2A-2B=-1\,,\qquad -2a=-1\,,\quad 2a-2b=1\,,\quad b-2c=0\,,$$

které mají řeěení $A=0$, $B=\frac{1}{2}$, $a=\frac{1}{2}$, $b=c=0$. A protože se jedná o nevlastní integrály, je

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(x,y,z)\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \lim_{y\to\infty}\Big[\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\sin 2t + \tfrac{1}{2}\,t^2\mathrm{e}^{-2t}\Big]_0^y = 0\,.$$

Příklad 6.r. Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$, jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci vektoru $\mathbf{f}=z\mathbf{j}+(x^2+y^2)\mathbf{k}$ po křivce $\mathcal{C}$ s paremetrickými rovnicemi $x=\cos t+t\sin t$, $y=\sin t-t\cos t$ a $z=t^{-1}$, kde $\frac{1}{2}\pi\le t\le\pi$, která je orientovaná ve směru růstu parametru t.

Řešení. Práci A vektoru $\mathbf{f}$ po orientované křivce $\mathcal{C}$ najdeme pomocí křivkového integrálu druhého druhu

$$A=\int_{\mathcal{C}}\mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s}\,,\quad \text{v našem případě}\quad A=\int_{\mathcal{C}}\big(z\,\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z\big)\,.$$

Z parametrických rovnic křivky $\mathcal{C}$ dostaneme

$$\mathrm{d}y=y'(t)\,\mathrm{d}t=t\sin t\,\mathrm{d}t\,,\qquad \mathrm{d}z=z'(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\,,$$
$$x^2+y^2=\cos^2 t+2t\sin t\cos t+t^2\sin^2 t+\sin^2 t-2t\sin t\cos t+t^2\cos^2 t=1+t^2\,.$$

Hledaná práce proto je

$$A=\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{t\sin t}{t}-\frac{1+t^2}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\Big[-\cos t+t^{-1}-t\Big]_{\pi/2}^{\pi}=1-\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{\pi}\,.$$

Příklad 7.r. Nechť jsou $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, resp. $\mathbf{e}_3$, jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci vektoru $\mathbf{f}=z\mathbf{e}_1+x\mathbf{e}_2+y\mathbf{e}_3$ po úsečce s počátečním bodem $A=[-1;0;1]$ a koncovým bodem $B=[3;1;-1]$.

Řešení. Práci A vektoru $\mathbf{f}$ po orientované křivce $\mathcal{C}$ najdeme pomocí křivkového integrálu druhého druhu

$$A=\int_{\mathcal{C}}\mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s}\,,\quad \text{v našem případě}\quad A=\int_{\mathcal{C}}\big(z\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}z\big)\,.$$

Parametrické rovnice orientované úsečky s počátečním bodem A a koncovým bodem B jsou obecně $\mathbf{x}(t)=A+(B-A)t$, kde $0\le t\le 1$. V našem případě dostamene parametrické rovnice

$$x=-1+4t\,,\quad y=t\,,\quad z=1-2t\,,\qquad 0\le t\le 1\,.$$

A protože $x'=-4$, $y'=1$ a $z'=-2$, je práce rovna

$$A=\int_0^1\big(-4(1-2t)+(-1+4t)-2t\big)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\big(-5+10t\big)\,\mathrm{d}t=0\,.$$

Příklad 8.r. Najděte křivkový integrál $\int_{\mathcal{C}}\big(x\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y-2y\,\mathrm{d}z\big)$ po křivce $\mathcal{C}$ dané rovnicemi $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2=y$, kde x, y, $z\ge 0$ a která začíná v bodě $A=[0;0;1]$.

Řešení. Nejprve musíme najít nějaké parametrické rovnice křivky $\mathcal{C}$. Protože se v rovnicích, které ji popisují, vyskytuje poměrně často výraz $x^2 + y^2$, zdá se rozumné použít cylindrické souřadnice

$$x = r\cos\varphi\,,\quad y = r\sin\varphi\,,\quad z = z\,,\qquad r > 0\,,\quad -\pi < \varphi < \pi\,,\quad -\infty < z < \infty\,.$$

V těchto souřadnicích jsou rovnice

$$r^2 + z^2 = 1\,,\quad r^2 = r\sin\varphi\,,\qquad r\cos\varphi > 0\,,\quad r\sin\varphi > 0\,,\quad z > 0\,.$$

Z toho plyne, že je

$$r = \sin\varphi\,,\quad z = \sqrt{1 - r^2} = \sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \cos\varphi\,,\qquad 0 < \varphi < \tfrac{1}{2}\pi\,,$$

a tedy parametrické rovnice křivky $\mathcal{C}$ jsou například

$$x = \sin\varphi\cos\varphi\,,\quad y = \sin^2\varphi\,,\quad z = \cos\varphi\,,\qquad 0 \le \varphi \le \tfrac{1}{2}\pi\,.$$

Protože počáteční bod křivky $A = [0;0;1]$ odpovídá hodnotě parametru $\varphi = 0$, je křivka orientována ve smeru růstu parametru φ.
Z parametrických rovnic křivky $\mathcal{C}$ postuupně dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= x'(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,,\\
\mathrm{d}y &= y'(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,,\\
\mathrm{d}z &= z'(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = -\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,,
\end{aligned}$$

a tedy hledaný křivkový integrál je

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{C}} \bigl(x\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y - 2y\,\mathrm{d}z\bigr) =\\
&\quad= \int_0^{\pi/2} \Bigl(\sin\varphi\cos\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \cos\varphi\,(2\sin\varphi\cos\varphi) - 2\sin^2\varphi\,(-\sin\varphi)\Bigr)\mathrm{d}\varphi =\\
&\quad= \int_0^{\pi/2} \Bigl(\cos^3\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi\cos\varphi + 2\sin\varphi\Bigr)\mathrm{d}\varphi =\\
&\quad= \Bigl[-\tfrac{1}{4}\,\cos^4\varphi - \tfrac{1}{4}\,\sin^4\varphi - 2\cos\varphi\Bigr]_0^{\pi/2} = 2\,.
\end{aligned}$$

Příklad 9.r. Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$, jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci vektoru $\mathbf{f} = z\mathbf{i} + y\mathbf{k}$ po křivce $\mathcal{C}$, která je dána rovnicemi $x^2 + 4y^2 = 4$ a $z = xy$, která je orientovaná tak, že její tečný vektor má v bodě $A = [0;1;0]$ zápornou první složku.
Řešení. Práci A vektoru $\mathbf{f}$ po orientované křivce $\mathcal{C}$ najdeme pomocí křivkového integrálu druhého druhu

$$A = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} \bigl(f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y + f_z\,\mathrm{d}z\bigr) \quad \text{v našem případě} \quad A = \int_{\mathcal{C}} \bigl(z\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}z\bigr)\,.$$

Nejprve ale musíme najít parametrické rovnice křivky $\mathcal{C}$. Ta je dána jako průnik eliptického válce $x^2 + 4y^2 = 4$ a plochy $z = xy$. Proto můžeme položit

$$x = 2\cos\varphi\,,\quad y = \sin\varphi\,,\quad z = 2\cos\varphi\sin\varphi\,,\qquad -\pi < \varphi < \pi\,.$$

Bodu $A = [0;1;0]$ pak odpovídá hodnota parametru $\varphi = \frac{1}{2}\,\pi$. Tečný vektor ke křivce $\mathcal{C}$ v bodě, který odpovídá hodnotě parametru φ je

$$\boldsymbol{\tau}(\varphi) = \mathbf{x}'(\varphi) = \bigl(-2\sin\varphi, \cos\varphi, 2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\bigr)\,.$$

Pro hodnotu parametru $\varphi = \frac{1}{2}\,\pi$, která odpovídá bodu A, je tento tečný vektor $\boldsymbol{\tau} = (-2, 0, -2)$. Tedy jeho první složka je záporná a orientace křivky $\mathcal{C}$ odpovídá růstu parametru φ. Pro hledanou práci pak dostaneme

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-\pi}^{\pi} \Bigl(2\cos\varphi\sin\varphi\cdot(-2\sin\varphi) + \sin\varphi\cdot\bigl(2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\bigr)\Bigr)\mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \Bigl(-4\sin^2\varphi\cos\varphi + 2\cos^2\varphi\sin\varphi - 2\sin^3\varphi\Bigr)\mathrm{d}\varphi = \\
&= \Bigl[-\tfrac{4}{3}\,\sin^3\varphi - \tfrac{2}{3}\,\cos^3\varphi + 2\bigl(\cos\varphi - \tfrac{1}{3}\,\cos^3\varphi\bigr)\Bigr]_{-\pi}^{\pi} = 0\,.
\end{aligned}$$

Příklad 10.r. Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$, jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci vektoru $\mathbf{f} = (2x - y - z)\mathbf{i} + (2y - x - z)\mathbf{j} + (2z - x - y)\mathbf{k}$ po obvodu trojúhelníka s vrcholy v bodech $A = [1;0;0]$, $B = [0;2;0]$ a $C = [0;0;3]$, který probíháme ve směru $A \to B \to C \to A$.

Řešení. Práci A vektoru $\mathbf{f}$ po orientované křivce $\mathcal{C}$ najdeme pomocí křivkového integrálu druhého druhu

$$A = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} \bigl(f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y + f_z\,\mathrm{d}z\bigr)\,,$$

což je v našem případě

$$A = \int_{\mathcal{C}} \bigl((2x - y - z)\,\mathrm{d}x + (2y - x - z)\,\mathrm{d}y + (2z - x - y)\,\mathrm{d}z\bigr)\,.$$

Orientovaná křivka $\mathcal{C}$ je v tomto příkladu složená ze tří orientovaných úseček $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \dotplus \mathcal{C}_2 \dotplus \mathcal{C}_3$, kde $\mathcal{C}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathcal{C}_2 = \overrightarrow{BC}$ a $\mathcal{C}_3 = \overrightarrow{CA}$. Proto je hledaná práce součet tří křivkových integrálů druhého druhu

$$A = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s} + \int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s}\,.$$

Pokud zvolíme za parametrizaci orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ rovnice $\mathbf{x}(t) = A + (B - A)t$, kde $0 \le t \le 1$, dostaneme

$$\mathcal{C}_1: \quad x = 1 - t\,, \quad y = 2t\,, \quad z = 0\,, \qquad 0 \le t \le 1\,,$$

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_0^1 \Bigl((2 - 2t - 2t)\cdot(-1) + (4t - 1 + t)\cdot 2\Bigr)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (14t - 4)\,\mathrm{d}t = 3\,,$$

$$\mathcal{C}_2: \quad x = 0\,, \quad y = 2 - 2t\,, \quad z = 3t\,, \qquad 0 \le t \le 1\,,$$

$$\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_0^1 \Bigl((4 - 4t - 3t)\cdot(-2) + (6t - 2 + 2t)\cdot 3\Bigr)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (38t - 14)\,\mathrm{d}t = 5\,,$$

$$\mathcal{C}_3: \quad x = t\,, \quad y = 0\,, \quad z = 3 - 3t\,, \qquad 0 \le t \le 1\,,$$

$$\int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_0^1 \Bigl((2t - 3 + 3t)\cdot 1 + (6 - 6t - t)\cdot(-3)\Bigr)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 (26t - 21)\,\mathrm{d}t = -8\,.$$

Tedy celková práce je

$$A = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s} + \int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = 3 + 5 - 8 = 0\,.$$

Příklad 11.r. Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S}$, kde $\mathbf{f} = (z, y, 1)$ a plocha $\mathcal{S}$ daná parametrickými rovnicemi $x = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$, $y = uv$ a $z = u + v$, kde $0 < u < v < 2$, je orientována tak, že třetí složka jejího normálového vektoru je záporná.

Řešení. Protože jsou dané parametrické rovnice plochy $\mathcal{S}$, najdeme normálové vektorové pole k ploše standardním postupem:

$$\boldsymbol{\tau}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) = \big(u, v, 1\big)\,, \qquad \boldsymbol{\tau}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \big(v, u, 1\big)\,,$$
$$\mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}_u \times \boldsymbol{\tau}_v = \big(v - u, v - u, u^2 - v^2\big)$$

Protože podle zadání je $0 < u < v$, je ttřetí složka normálového vektoru záporná, tj. vektorové pole $\mathbf{n}$ odpovídá zadané orientaci. Hledaný plošný interál jak je

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\Omega} \big(u + v, uv, 1) \cdot (v - u, v - u, u^2 - v^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_{\Omega} \big(uv^2 - u^2 v\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,$$

kde oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je dána nerovnostmi $0 < u < v < 2$. Podle Fubiniovy věty pak je

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_0^2 \mathrm{d}v \int_0^v \big(uv^2 - u^2 v\big)\,\mathrm{d}u = \int_0^2 \tfrac{1}{6}\, v^4\,\mathrm{d}v = \tfrac{16}{15}\,.$$

Příklad 12.r. Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} (x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$, kde plocha $\mathcal{S}$ daná parametrickými rovnicemi $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ a $z = \varphi$, $1 < r < 2$ a $0 < \varphi < 2\pi$ je orientována tak, že třetí složka jejího normálového vektoru je kladná.

Řešení. Jiný zápis uvedeného plošného integrálu druhého druhu je

$$\iint_{\mathcal{S}} (x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,,$$

kde vektorové pole $\mathbf{f} = (x, y, z)$. Protože je plocha $\mathcal{S}$ zadána parametricky, najdeme její normálový vektor $\mathbf{n}$ obvyklým způsobem:

$$\boldsymbol{\tau}_r = \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r}\right) = \big(\cos\varphi, \sin\varphi, 0\big), \qquad \boldsymbol{\tau}_\varphi = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) = \big(-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 1\big),$$
$$\mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}_r \times \boldsymbol{\tau}_\varphi = \big(\sin\varphi, -\cos\varphi, r\big)\,.$$

A protože třetí složka normálového vektoru je kladná, odpovídá tato tento normálový vektor dané orientaci plochy. Hledaný integrál pak je

$$\iint_{\mathcal{S}} (x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) = \iint_{\Omega} \big(r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi\big) \cdot \big(\sin\varphi, -\cos\varphi, r\big)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \iint_{\Omega} \big(r\cos\varphi\sin\varphi - r\sin\varphi\cos\varphi + r\varphi\big)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \iint_{\Omega} r\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

kde oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je dána nerovnostmi $1 < r < 2$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Podle Fubiniovy věty tedy je

$$\iint_{\mathcal{S}} (x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + y \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x + z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y) = \int_1^2 r \,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \varphi \,\mathrm{d}\varphi = \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2} 4\pi^2 = 3\pi^2 .$$

Příklad 13.r. Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} (x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + y \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x)$, kde plocha $\mathcal{S}$ definována vztahy $z = xy$, $x + y \leq 1$ a x, $y \geq 0$ je orientována tak, že třetí složka jejího normálového vektoru je kladná.

Řešení. Jiný zápis uvedeného plošného integrálu druhého druhu je

$$\iint_{\mathcal{S}} (x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + y \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x) = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f} \,\mathrm{d}\mathbf{S} ,$$

kde vektorové pole $\mathbf{f} = (x, y, 0)$.

Neprve musíme najít nějaké parametrické rovnice plochy $\mathcal{S}$. Protože je plocha zadána jako část grafu funkce $z = xy$, lze za parametry zvolit proměnné x a y. Parametrické rovnice pak jsou

$$x = x\,, \quad y = y\,, \quad z = xy\,, \qquad x + y \leq 1\,, \quad x \geq 0\,, \quad y \geq 0\,.$$

Obvyklým způsobem dostaneme z těchto parametrických rovnic normálový vektor $\mathbf{n}$

$$\boldsymbol{\tau}_x = (1, 0, y)\,, \qquad \boldsymbol{\tau}_y = (0, 1, x)\,, \qquad \mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}_x \times \boldsymbol{\tau}_y = (-y, -x, 1)\,.$$

Protože třetí složka tohoto normálového vektoru je kladná, odpovídá tento vektor zadané orientaci plochy $\mathcal{S}$. Pro hledaný integrál pak máme

$$\iint_{\mathcal{S}} (x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + y \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x) = \iint_{\Omega} (x, y, 0) \cdot (-y, -x, 1) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = -2 \iint_{\Omega} xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y\,,$$

kde oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je určena nerovnostmi

$$x + y \leq 1\,, \quad x \geq 0\,, \quad y \geq 0\,, \quad \text{neboli} \quad 0 \leq y \leq 1 - x\,, \quad 0 \leq x \leq 1\,.$$

Poslední zápis množiny Ω je vhodný pro použití Fubiniovy věty ve tvaru

$$\iint_{\mathcal{S}} (x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + y \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x) = -2 \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} xy \,\mathrm{d}y = -\int_0^1 x(1-x)^2 \,\mathrm{d}x =$$
$$= -\int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) \,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{12}\,.$$

Příklad 14.r. Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f} \,\mathrm{d}\mathbf{S}$, kde $\mathbf{f} = (y, x, z)$ a plocha $\mathcal{S}$ definována vztahy $z = 4 - x^2 - y^2$ a $z \geq 0$ je orientována tak, že třetí složka jejího normálového vektoru je záporná.

Řešení. Protože je plocha $\mathcal{S}$ zadána jako část grafu funkce $z = 4 - x^2 - y^2$, zvolíme za parametry proměnné x a y. Pak jsou parametrické rovnice plochy $\mathcal{S}$

$$x = x\,, \quad y = y\,, \quad z = 4 - x^2 - y^2\,, \qquad z = 4 - x^2 - y^2 \geq 0\,, \quad \text{tj.} \quad x^2 + y^2 \leq 4\,.$$

Pomocí těchto parametrických rovnic najdeme obvyklým způsobem normálový vektor $\mathbf{n}$:

$$\boldsymbol{\tau}_x = (1, 0, -2x)\,, \qquad \boldsymbol{\tau}_y = (0, 1, -2y)\,, \qquad \mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}_x \times \boldsymbol{\tau}_y = (2x, 2y, 1)\,.$$

Protože je třetí složka tohoto vektoru kladná, odpovídá zadané orientaci plochy normálový vektor $-\mathbf{n} = (-2x, -2y, -1)$. Hledaný plošný integrál druhého druhu pak je

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\Omega} (y, x, 4 - x^2 - y^2) \cdot (-2x, -2y, -1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} \bigl(-4xy - 4 + x^2 + y^2\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde Ω je kruh $x^2 + y^2 \le 4$.
Abychom našli poslední dvojný integrál, zavedeme polární souřadnice

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \qquad r > 0\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,, \qquad J = r\,.$$

V těchto souřadnicích přejde kruh $x^2 + y^2 \le 4$ na obdélník

$$\widehat{\Omega}: \quad 0 < r < 2\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,.$$

Podle věty o substituci je

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\widehat{\Omega}} \bigl(-4r^2\cos\varphi\sin\varphi - 4 + r^2\bigr) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Pomocí Fubiniovy věty pak dostaneme

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_0^2 \mathrm{d}r \int_{-\pi}^{\pi} \bigl(-4r^2\cos\varphi\sin\varphi - 4 + r^2\bigr) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_0^2 (-4 + r^2) r\,\mathrm{d}r = -8\pi\,.$$

Příklad 15.r. Najděte plošný integrál $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S}$, kde $\mathbf{f} = (yz, xz, xy)$ a plocha $\mathcal{S}$ definována vztahy $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 + z^2 \le 13$ a x, y, $z \ge 0$ je orientována tak, že první složka jejího normálového vektoru je záporná.

Řešení. Nejprve nejdeme prametrické rovnice plochy $\mathcal{S}$. Protože je plocha podmnožinou válce $x^2 + y^2 = 4$, lze zvolit parametrické rovnice

$$x = 2\cos\varphi\,, \quad y = 2\sin\varphi\,, \quad z = z\,, \qquad 4 + z^2 \le 13\,, \quad \cos\varphi > 0\,, \quad \sin\varphi > 0\,, \quad z > 0$$

neboli

$$x = 2\cos\varphi\,, \quad y = 2\sin\varphi\,, \quad z = z\,, \qquad 0 < \varphi < \tfrac{1}{2}\pi\,, \quad 0 < z < 3\,.$$

Z těchto parametrických rovnic najdeme obvyklým způsobem nornálový vektor $\mathbf{n}$:

$$\boldsymbol{\tau}_\varphi = (-2\sin\varphi, 2\cos\varphi, 0)\,, \qquad \boldsymbol{\tau}_z = (0, 0, 1)\,, \qquad \mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}_\varphi \times \boldsymbol{\tau}_z = (2\cos\varphi, 2\sin\varphi, 0)\,.$$

Protože je $\varphi \in (0, \frac{1}{2}\pi)$, je první složka tohoto normálového vektoru kladná, a tedy odpovídá opačné orientaci plochy $\mathcal{S}$ a k výpočtu musíme použít opačný normálový vektor, tj. $\mathbf{n} = (-2\cos\varphi, -2\sin\varphi, 0)$. Pro hledaný integrál pak dostaneme dvojný integrál

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S} &= \iint_{\Omega} \bigl(2z\sin\varphi, 2z\cos\varphi, 4\cos\varphi\sin\varphi\bigr) \cdot \bigl(-2\cos\varphi, -2\sin\varphi, 0\bigr)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \\ &= \iint_{\Omega} \bigl(-4z\sin\varphi\cos\varphi - 4z\cos\varphi\sin\varphi\bigr)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = -4 \iint_{\Omega} z\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\,,\end{aligned}$$

kde Ω je obdélník $0 < z < 3$ a $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$. Z Fubiniovy věty pak dostaneme

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = -4\int_0^3 z\,\mathrm{d}z \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -18\,.$$

Příklad 16.r. Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$, jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte tok vektoru $\mathbf{f} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ plochou $\mathcal{S}$ s parametrickými rovnicemi $\mathbf{x} = r\cos t\,\mathbf{i} + r\sin t\,\mathbf{j} + r^2\,\mathbf{k}$, kde $0 < r < 1$ a $0 < t < \pi$, která je orientovaná tak, že třetí složka jejího normálového vektoru je kladná.

Řešení. Tok Φ vektoru $\mathbf{f}$ orientovanou plochou $\mathcal{S}$ najdeme pomocí plošného integrálu druhého druhu

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Protože je plocha $\mathcal{S}$ zadána parametrickými rovnicemi

$$x = r\cos t\,,\quad y = r\sin t\,,\quad z = r^2\,,\qquad 0 < r < 1\,,\quad 0 < t < \pi\,,$$

najdeme pomocí nich obvyklým způsobem normálový vektor $\mathbf{n}$:

$$\boldsymbol{\tau}_r = (\cos t, \sin t, 2r)\,,\qquad \boldsymbol{\tau}_t = (-r\sin t, r\cos t, 0)\,,$$
$$\mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}_r \times \boldsymbol{\tau}_t = (-2r^2\cos t, -2r^2\sin t, r)\,.$$

Protože třetí složka tohoto vektoru je kladná, odpovídá tento normálový vektor zadané orientaci plochy. Tedy tok vektoru $\mathbf{f}$ orientovanou plochou $\mathcal{S}$ je dán dvojným integrálem

$$\Phi = \iint_{\Omega} (r\sin t, -r\cos t, r^4)\cdot(-2r^2\cos t, -2r^2\sin t, r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t = \iint_{\Omega} r^5\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,,$$

kde Ω je obdélník $0 < r < 1$ a $0 < t < \pi$. Podle Fubiniovy věty je

$$\Phi = \int_0^1 r^5\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi} \mathrm{d}t = \tfrac{1}{6}\,\pi\,.$$

Příklad 17.r. Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$, jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte tok vektoru $\mathbf{f} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ částí roviny $2x + 3y + 6z = 6$, x, y, $z \geq 0$ která je orientovaná tak, že druhá složka jejího normálového vektoru je záporná.

Řešení. Tok Φ vektoru $\mathbf{f}$ orientovanou plochou $\mathcal{S}$ najdeme pomocí plošného integrálu druhého druhu

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Abychom spočítali tento integrál, najdeme nejprve parametrické rovnice plochy $\mathcal{S}$. Protože je plocha část rovniny $2x + 3y + 6z = 6$, napíšeme její parametrické rovnice. To lze udělat různým způsobem. Například můžeme najít tři body roviny, které neleží na jedné přímce. Za tyto body lze vzít prsečíky roviny se souřadnicovými osami $A = [3; 0; 0]$, $B = [0; 2; 0]$ a $C = [0; 0; 1]$. Obecná rovnice roviny pak je $\mathbf{x}(s,t) = A + \mathbf{u}s + \mathbf{v}t$, kde vektory $\mathbf{u} = \overrightarrow{BA}$ a $\mathbf{v} = \overrightarrow{CA}$ leží v rovině. Protože $\mathbf{u} = B - A = (-3, 2, 0)$ a $\mathbf{v} = C - A = (-3, 0, 1)$ jsou parametrické rovnice dané roviny

$$x = 3 - 3s - 3t\,,\quad y = 2s\,,\quad z = t\,,\qquad s,\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Část této plochy, pro kterou je x, y, $z \geq 0$, dává omezení na možné hodnoty parametrů s a t. Tato omezení jsou

$$x = 3 - 3s - 3t \geq 0\,, \quad y = 2s \geq 0\,, \quad z = t \geq 0\,, \quad \text{neboli} \quad s \geq 0\,, \quad t \geq 0\,, \quad s + t \leq 1\,.$$

Takto jsme dostali pro plochu $\mathcal{S}$ parametrické rovnice

$$x = 3(1 - s - t)\,, \quad y = 2s\,, \quad z = t\,, \qquad s \geq 0\,, \quad t \geq 0\,, \quad s + t \leq 1\,.$$

Stadnardním způsobem najdeme z těchto parametrických rovnic vektor normály $\mathbf{n}$:

$$\boldsymbol{\tau}_s = (-3, 2, 0)\,, \qquad \boldsymbol{\tau}_t = (-3, 0, 1)\,, \qquad \mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}_s \times \boldsymbol{\tau}_t = (2, 3, 6)\,.$$

Protože třetí složka tohoto vektoru je kladná, určuje vektor $\mathbf{n}$ orientaci plochy, která je opačné k zadané orientaci. Proto musíme použít normálový vektor $-\mathbf{n} = (-2, -3, -6)$. Pak lze tok Φ vyjádřit pomocí dvojného integrálu

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_\Omega \big(6(1 - s - t)s, 2st, 3(1 - s - t)t\big) \cdot (-2, -3, -6)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t = \\ &= 6 \iint_\Omega \big(2s^2 + 4st + 3t^2 - 2s - 3t\big)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t\,,\end{aligned}$$

kde množina Ω je dána nerovnostmi

$$s \geq 0\,, \quad t \geq 0\,, \quad s + t \leq 1\,, \quad \text{neboli} \quad 0 \leq s \leq 1 - t\,, \quad 0 \leq t \leq 1\,.$$

Poslední vyjádření množiny Ω je vhodné pro použití Fubiniovy věty. Podle ní je

$$\Phi = 6 \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^{1-t} \big(2s^2 + 4st + 3t^2 - 2s - 3t\big)\, \mathrm{d}s = -\tfrac{3}{2}\,.$$

Příklad 18.r. Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$, jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte tok vektoru $\mathbf{f} = -(x + y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ plochou $z = x^2 + y^2$, $z \leq 1$, která je orientovaná tak, že třetí složka jejího normálového vektoru je kladná.

Řešení. Tok Φ vektoru $\mathbf{f}$ orientovanou plochou $\mathcal{S}$ najdeme pomocí plošného integrálu druhého druhu

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\, \mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Protože jde o rotační plochu s osou rotace z, použijeme pro její paremátrizaci cylindrické souřadnice

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = z\,, \qquad r > 0\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,, \quad z \in \mathbb{R}\,.$$

V těchto souřadnicích je plocha $\mathcal{S}$ popsána vztahy

$$z = r^2\,, \qquad r > 0\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,, \quad z = r^2 \leq 1\,, \quad \text{tj.} \quad 0 < r \leq 1\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,.$$

Takto jsme dostali parametrické rovnice plochy $\mathcal{S}$ ve tvaru

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = r^2\,, \qquad 0 < r \leq 1\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,.$$

Pomocí těchto rovnic najdeme standardním postupem normálový vektor $\mathbf{n}$:

$$\boldsymbol{\tau}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 2r)\,, \qquad \boldsymbol{\tau}_\varphi = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0)\,,$$
$$\mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}_r \times \boldsymbol{\tau}_\varphi = (-2r^2\cos\varphi, -2r^2\sin\varphi, r)\,.$$

A protože je třetí složka vektoru $\mathbf{n}$ kladná, odpovídá tento normálový vektor zadané orientaci.
Tok Φ pak můžeme vyjádřit pomocí dvojného integrálu

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_\Omega \big(0, -r(\cos\varphi + \sin\varphi), r^2\big)\cdot\big(-2r^2\cos\varphi, -2r^2\sin\varphi, r\big)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \iint_\Omega r^3\big(1 + 2\cos\varphi\sin\varphi + 2\sin^2\varphi\big)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,,\end{aligned}$$

kde Ω je obdélník $0 < r \le 1$ a $-\pi < \varphi < \pi$. Pomocí Fubiniovy věty pak dostaneme

$$\Phi = \int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r \int_{-\pi}^{\pi}\big(1 + 2\cos\varphi\sin\varphi + 2\sin^2\varphi\big)\,\mathrm{d}\varphi = \tfrac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\big(2 + \sin 2\varphi - \cos 2\varphi\big)\,\mathrm{d}\varphi = \pi\,.$$

Příklad 19.r. Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$, jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ plochou $x^2 + 4y^2 = z^2$, $0 \le z \le 2$, která je orientovaná tak, že třetí složka jejího normálového vektoru je kladná.

Řešení. Tok Φ vektoru $\mathbf{v}$ orientovanou plochou lze kromě plošného integrálu druhého druhu najít i pomocí plošného integrálu prvního druhu. Platí totiž

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} v_\perp\,\mathrm{d}S\,,$$

kde $v_\perp$ je kolmý průmět vektoru $\mathbf{v}$ do směru normály $\boldsymbol{\nu}$, kterou je dána orientace plochy $\mathcal{S}$, tj.

$$v_\perp = \|\mathbf{v}\|\cos\alpha = \frac{\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nu}}{\|\boldsymbol{\nu}\|}\,,$$

kde α je úhel který svírají vektory $\mathbf{v}$ a $\boldsymbol{\nu}$.
V našem případě má vektor $\mathbf{v} = (x, y, z)$ v bodě $\mathbf{x} = [x; y; z]$ směr spojnice počátku s bodem $\mathbf{x}$. Uvedená plocha $\mathcal{S}$ je geometricky eliptický kužel s vrcholem v počátku, tj. plocha, která je tvořena přímkami, které prochází počátkem a bodem elipsy $z = 1$, $x^2 + 4y^2 = 1$. Tyto přímky mají právě směr vektoru $\mathbf{v} = \mathbf{x}$, a proto je průmět vektoru $\mathbf{v}$ do směru normálového vektoru $\boldsymbol{\nu}$ roven nule. Z toho ale plyne, že tok vektoru $\mathbf{v}$ plochou $\mathcal{S}$ je roven nule, tj. $\Phi = 0$.
Pokud si vektor $\mathbf{v}$ představíme jako vektor toku kapaliny, znamená to, že kapalina teče po ploše $\mathcal{S}$, a tedy plochou $\mathcal{S}$ neprotéká.

Abychom to ukázali matematicky, nejdeme nejprve normálový vektor k ploše $\mathcal{S}$ v jejím bodě $\mathbf{x} = [x; y; z]$. Pokud napíšeme rovnici plochz ve tvaru

$$F(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - z^2 = 0\,,$$

je známo z diferenciálního počtu nebo geometrie, že normálový vektor $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ k takto zadané ploše je v bodě $\mathbf{x}$

$$\boldsymbol{\nu}(x, y, z) = \operatorname{grad} F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = \big(2x, 8y, -2z\big)\,.$$

Protože bod $\mathbf{x} = [x; y; z]$ leží na ploše $\mathcal{S}$, platí pro jeho souřadnice $x^2 + 4y^2 = z^2$. A protože pro normálový vektor $\boldsymbol{\nu}$ je

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = (x, y, z) \cdot (2x, 8y, -2z) = 2\big(x^2 + 4y^2 - z^2\big) = 0$$

je vektor $\mathbf{v}$ v každém bodě plochy $\mathcal{S}$ kolmý k normálovému vektoru, tj. $v_\perp = 0$. Proto je

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} v_\perp\,\mathrm{d}S = 0\,.$$

Příklad 1. Najděte křivkový integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)$, kde je křivka $\mathcal{C}$ popsána parametrickými rovnicemi $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $0 < t < 2\pi$, a orientována ve směru růstu parameru t. $\big[-\frac{3}{4}\,\pi\,.\big]$

Příklad 2. Najděte křivkový integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \big((x - y)\,\mathrm{d}x + (x + y)\,\mathrm{d}y\big)$, kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná hranice oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi $x^2 + y^2 \le 2$, $x + y \ge 0$ a $y - x \ge 0$. $\big[\pi\,.\big]$

Příklad 3. Najděte křivkový integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}z)$, kde je křivka $\mathcal{C}$ popsána parametrickými rovnicemi $x = t + \cos t$, $y = \cos t$, $z = t$, kde $0 < t < 2\pi$, kterou probíháme ve směru růstu parametru t. $\big[2\pi^2.\big]$

Příklad 4. Najděte křivkový integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s}$, kde $\mathbf{f} = (y, -x, z)$ a $\mathcal{C}$ je křivka s parametrickými rovnicemi $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$, kde $0 < t < \pi$, kterou probíháme ve směru růstu parametru t. $\big[\pi(2\pi - 1)\,.\big]$

Příklad 5. Najděte křivkový integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \left(\frac{\mathrm{d}x}{z - y} + \frac{\mathrm{d}y}{x - z} + \frac{\mathrm{d}z}{y - x}\right)$, kde $\mathcal{C}$ je úsečka z bodu $A = [1; -5; 4]$ do bodu $B = [-1; -2; 5]$. $\big[\ln 7 - \ln 18 - \frac{1}{5}\,\ln 6\,.\big]$

Příklad 6. Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$, jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci vektoru $\mathbf{f} = (y + z)\,\mathbf{i} - (x + z)\,\mathbf{j}$ po křivce $\mathcal{C}$, která je dána parametrickými rovnicemi $x = \mathrm{e}^{-t}\cos t$, $y = \mathrm{e}^{-t}\sin t$, $z = \mathrm{e}^{-t}$, kde $t > 0$ a kterou probíháme ve směru růstu parametru t. $\big[-\frac{13}{10}\,.\big]$

Příklad 7. Nechť jsou $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, resp. $\mathbf{e}_3$, jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci vektoru $\mathbf{f} = xz\,\mathbf{e}_1 - y\,\mathbf{e}_3$ po křivce $\mathcal{C}$, která je dána parametrickými rovnicemi $\mathbf{x}(t) = 2\mathbf{e}_1 + \mathrm{e}^t\mathbf{e}_2 + t^2\mathbf{e}_3$, kde $0 < t < 1$, a kterou probíháme ve směru růstu parametru t. $\big[-2\,.\big]$

Příklad 8. Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$, jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci vektoru $\mathbf{f} = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ po úsečce s počátečním bodem $A = [-1; 0; 1]$ a koncovým bodem $B = [3; 1; -1]$. $\big[1\,.\big]$

Příklad 9. Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$, jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci vektoru $\mathbf{f} = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ po křivce $x^2 + y^2 = 1$, $z = x^2 - y^2$, kde x, $y \ge 0$, od bodu $A = [1; 0; 1]$ do bodu $B = [0; 1; -1]$. $\big[-\frac{1}{2}\,\pi\,.\big]$

Příklad 10. Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$, jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci vektoru $\mathbf{f} = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ po hranici plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x, y, z \geq 0$, která je orientovaná tak, že tečný vektor má v bodě $A = [1; 1; 0]$ kladnou druhou složku.

$\left[-\frac{3}{2}\,\pi\,.\right]$

Příklad 11. Najděte plošný integrál $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S}$, kde vektorové pole $\mathbf{f} = (z, 0, x)$ a plocha $\mathcal{S}$ daná parametrickými rovnicemi $x = u^2v^{-1}$, $y = v^2u^{-1}$, $z = uv$, kde $1 < u < 2$ a $1 < v < 2$, je orientována tak, že třetí složka její normály je kladná. $\left[-\frac{45}{4} + 7\ln 2\,.\right]$

Příklad 12. Najděte plošný integrál $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \left(z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)$, kde je plocha $\mathcal{S}$ popsána parametrickými rovnicemi $x = uv^{-1}$, $y = vu^{-1}$, $z = uv$, $1 < u < 4$, $1 < v < 2$, je orientována tak, že první složka jejího normálového vektoru je záporná.

$\left[-20\,.\right]$

Příklad 13. Najděte plošný integrál $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \left(x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\right)$, kde $\mathcal{S}$ je plocha $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, je orientována tak, že třetí složka její normály je kladná. $\left[\frac{32}{3}\,\pi\,.\right]$

Příklad 14. Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$, jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte tok vektoru $\mathbf{f} = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ plochou $\mathcal{S}$, která je popsána parametrickými rovnicemi $x = r\cos^2 t$, $y = r\sin^2 t$, $z = r^2$, kde $0 < r < 1$ a $0 < t < \frac{1}{2}\pi$, a je orientována tak, že třetí složka její normály je kladná. $\left[-\frac{1}{4}\,.\right]$

Příklad 15. Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$, jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j}$ částí roviny $x + z = 1$, $x^2 + y^2 \leq 2y$, která je orientována tak, že první složka její normály je kladná. $\left[\pi\,.\right]$

Příklad 16. Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$, jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte tok vektoru $\mathbf{f} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ plochou $\mathcal{S}$, která je dána vztahy $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$ a která je orientovaná tak, že třetí složka její normály je záporná. $\left[\pi\,.\right]$

Příklad 17. Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$, jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ plochou $\mathcal{S}$, která je dána vztahy $z^2 = x^2 + 4y^2$, $0 \leq z \leq 2$ a která je orientovaná tak, že třetí složka její normály je kladná. $\left[-\frac{8}{3}\,\pi\,.\right]$

Příklad 18. Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$, jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ kladně orientovanou hranicí tělesa $0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$, tj. normálový vektor míří vně tělesa. $\left[\frac{1}{2}\,\pi\,.\right]$