Integrální věty a základy teorie pole

Potenciálové vektorové pole

Vektorové pole $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \big(f_1(\mathbf{x}, f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})\big)$ se nazývá potenciálové na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, když existuje funkce $U(\mathbf{x}) = U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ taková, že na Ω platí

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} U(\mathbf{x}), \quad \text{tj.} \quad f_k(\mathbf{x}) = \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, , n.$$

Funkce $U(\mathbf{x})$ se nazývá potenciál vektorového pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

`Poznámka.` Funkce $U(\mathbf{x})$ je potenciál vektorového pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ pravě tehdy, když pro diferenciál funkce $U(\mathbf{x})$ platí

$$\mathrm{d}U(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + f_2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_2 + \ldots + f_n(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_n = \sum_{k=1}^{n} f_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k\,.$$

Je-li vektorové pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ potenciálové na množině Ω, jehož potenciál je $U(\mathbf{x})$ a $\mathcal{C}$ křivka s počátečním bodem $\mathbf{a}$ a koncovým bodem $\mathbf{b}$, která leží v Ω, platí

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} \big(f_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + f_2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_2 + \ldots + f_n(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_n\big) = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}U = U(\mathbf{b}) - U(\mathbf{a})\,. \tag{1}$$

Speciálně, je-li $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ potenciálové vektorové pole na množině Ω a $\mathcal{C}$ je uzavřená křivka v Ω, je $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s} = 0$.

Jestliže je vektorové pole $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \big(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})\big)$ potenciálové na množině Ω a má na Ω spojité parciální derivace, platí rovnost

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_i} \qquad \text{pro každé} \quad i,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n\,. \tag{2}$$

Pokud je oblast Ω jednoduše souvislá, je podmínka (2) pro existenci potenciálu vektorového pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ také postačující.

Vektorové pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ je potenciálové na množině Ω právě tehdy, když je v množině Ω konzervativní, tj. když je $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s} = 0$ pro každou uzavřenou křivku $\mathcal{C}$, která leží v Ω. Pro konzernativní vektorové pole $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ v množině Ω nezávisí křivkový integrál $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s}$ na křivce $\mathcal{C}$, která leží v Ω, ale pouze na počátečním a koncovém bodě křivky $\mathcal{C}$ a platí (1).

Greenova věta

Nechť je $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ prostá uzavřená po částech hladká křivka, která je hranicí omezené souvislé množiny $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$. Nechť je křivka $\mathcal{C}$ orientována tak, že při pohybu po křivce leží množina $\mathcal{S}$ vlevo. Nechť mají funkce $P(x, y)$ a $Q(x, y)$ spojité parcální derivace na otevřené množině $\Omega \supset \overline{\mathcal{S}}$. Pak platí

$$\oint_{\mathcal{C}} \Big(P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y\Big) = \iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{3}$$

`Poznámka.` Obsah P omezené oblasti $\mathcal{S}$, jejíž hranice je prostá po částech hladká kčivka $\mathcal{C}$ je roven

$$P = \oint_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}y = -\oint_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} \big(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x\big)\,,$$

kde křivka $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná, tj. při pohybu po křivce leží oblast $\mathcal{S}$ vlevo.

Stokesova věta

Nechť je $\mathbf{f}(x,y,z) = \big(f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)\big)$ spojitě diferencovatelné vektorové pole v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Nechť je $\mathcal{C}$ prostá uzavřená po částech hladká orientovaná křivka v Ω, která je hranice omezené po částech hladké plochy $\mathcal{S} \subset \Omega$ orientované normálou $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$. Nechť je křivka $\mathcal{C}$ orientována tak, že při pohledu ze směru $\boldsymbol{\nu}$ obíhá plochu $\mathcal{S}$ proti směru pohybu hodinových ručiček, tj. $\mathcal{C}$ je souhlasně orientovaná hranice plochy $\mathcal{S}$. Pak platí

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,, \tag{4}$$

kde $\operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x})$ je vektorové pole, které se nazývá rotace $\mathbf{f}$ a je definováno jako

$$\operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right). \tag{5}$$

Gaussova věta

Nechť je $\mathcal{S}$ po částech hladká plocha, která je hranicí omezeného tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$ a která je orientovaná tak, že její normála míří vně tělesa $\mathcal{T}$, tj. $\mathcal{S}$ je kladně orientovaná hranice tělesa $\mathcal{T}$. Nechť je vektorové pole $\mathbf{f}(x,y,z) = \big(f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)\big)$ spojitě diferencovatelné na otevřené množině $\Omega \supset \overline{\mathcal{T}}$. Pak platí

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{T}} \operatorname{div}\mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,, \tag{6}$$

kde $\operatorname{div}\mathbf{f}(\mathbf{x})$ je skalární pole, které se nazývá divergence $\mathbf{f}$ a je definováno jako

$$\operatorname{div}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\,. \tag{7}$$

Základní diferenciální operátory

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z.
Operátor nabla se nazývá vektorový diferenciální operátor

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Jestliže má funkce $U(x,y,z)$ spojité parciální derivace, je gradient $U(x,y,z)$ vektorové pole

$$\operatorname{grad}U(x,y,z) = \nabla U(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right).$$

Jestliže má vektorové pole $\mathbf{f}(x,y,z) = \big(f_x, f_y, f_z\big)$ spojité parciální derivace, je jeho rotace $\operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x})$ vektorové pole

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \det\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f_x & f_y & f_z\end{pmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}\,.\end{aligned}$$

Jestliže má vektorové pole $\mathbf{f}(x,y,z) = \big(f_x, f_y, f_z\big)$ spojité parciální derivace, je jeho divergence $\operatorname{div}\mathbf{f}(\mathbf{x})$ skalární pole

$$\operatorname{div}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\,.$$

Jestliže má funkce $U(x,y,z)$ spojité druhé parciální derivace, je

$$\operatorname{div}\big(\operatorname{grad} U(x,y,z)\big) = \Delta U(x,y,z) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\,,$$

kde se diferenciální operátor druhého řádu

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

nazývá Laplaceův operátor.

Příklad 1.r. Najděte funkci $z = z(x,y)$, pro kterou je

$$\mathrm{d}z = (x^2 + 2xy - y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 - 2xy - y^2)\,\mathrm{d}y\,.$$

Řešení. Z vedeného vztahu plyne, že musí být

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^2 + 2xy - y^2\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 2xy - y^2\,. \tag{8}$$

Pokud derivujeme první rovnost podle proměnné y a druhou podle proměnné x, dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2x - 2y = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

a tedy funkce $z = z(x,y)$ existuje (aspoň lokálně).
Integrací první rovnice v (8) podle x, dostaneme

$$z = z(x,y) = \tfrac{1}{3}\,x^3 + x^2 y - xy^2 + \psi(y)\,, \tag{9}$$

kde $\psi(y)$ je libovolná diferencovatelná funkce proměnné y. Pokud derivujeme toto vyjádření funkce $z(x,y)$ podle proměnné y, dostaneme pomocí druhého vztahu v (8)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 2xy + \psi'(y) = x^2 - 2xy - y^2\,, \quad \text{tedy} \quad \psi'(y) = -y^2\,.$$

Proto musí být $\psi(y) = -\frac{1}{3}\,y^2 + c$, kde c je libovolné reálné číslo. A když dosadíme tuto funkci $\psi(y)$ do (9), dostaneme nejobecnější tvar hledané funkce

$$z(x,y) = \tfrac{1}{3}\,x^3 + x^2 y - xy^2 - \tfrac{1}{3}\,y^3 + c\,,$$

kde c je libovolné reálné číslo.

Příklad 2.r. Najděte funkci $U(x,y,z)$, pro kterou je

$$\mathrm{d}U = \frac{z^2 + y + z}{z}\,\mathrm{d}x + \frac{xy^2 - z^2}{y^2 z}\,\mathrm{d}y + \frac{xyz^2 + z^2 - xy^2}{yz^2}\,\mathrm{d}z\,.$$

Řešení. Uvedená rovnost znamená, že pro funkci $U(x,y,z)$ platí

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{z^2 + y + z}{z}\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{xy^2 - z^2}{y^2 z}\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{xyz^2 + z^2 - xy^2}{yz^2}\,. \tag{10}$$

Aby taková funkce mohla existovat, musí být splněna podmínka (2). V našem případě jsou tyto rovnosti

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z^2+y+z}{z}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy^2-z^2}{y^2z}\right) = \frac{1}{z}\,,\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z^2+y+z}{z}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xyz^2+z^2-xy^2}{yz^2}\right) = \frac{z^2-y}{z^2}\,,\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xy^2-z^2}{y^2z}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xyz^2+z^2-xy^2}{yz^2}\right) = -\frac{xy^2+z^2}{y^2z^2}
\end{aligned}$$

splněny, a proto funkce $U(x,y,z)$ existuje (aspoň lokálně).

Funkci $U(x,y,z)$ najdeme postupnou integrací rovnic v (10). Když integrujeme první rovnici podle proměnné x, dostaneme

$$U(x,y,z) = \int \frac{z^2+y+z}{z}\,\mathrm{d}x = \int \left(z+\frac{y}{z}+1\right)\mathrm{d}x = zx + \frac{xy}{z} + x + \psi(y,z)\,, \qquad (11)$$

kde $\psi(y,z)$ je libovolná diferencovatelná funkce proměnných y a z. Pokud tento vztah dosadíme do druhé rovnice v (10), dostaneme

$$\frac{x}{z} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{xy^2-z^2}{y^2z}\,, \quad \text{neboli} \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{z}{y^2}\,.$$

Integrací získáme

$$\psi(y,z) = -\int \frac{z}{y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{z}{y} + \chi(z)$$

kde $\chi(z)$ je libovolná diferencovatelná funkce proměnné z. Pokud funkci $\psi(y,z)$ dosadíme do (11) zjistíme, že

$$U(x,y,z) = zx + \frac{xy}{z} + x + \frac{z}{y} + \chi(z)\,. \qquad (12)$$

A když dosadíme toto vyjádření funkce $U(x,y,z)$ do třetí rovnice v (10) dostaneme

$$x - \frac{xy}{z^2} + \frac{1}{y} + \chi'(z) = x + \frac{1}{y} - \frac{xy}{z^2}\,, \quad \text{neboli} \quad \chi'(z) = 0\,,$$

neboli funkce $\chi(z) = c$ je konstantn. Po dosazení do (12) pak zjistíme, že nejobecnější funkce $U(x,y,z)$ je

$$U(x,y,z) = zx + \frac{xy}{z} + x + \frac{z}{y} + c\,,$$

kde c je libovolné reálné číslo.

Příklad 3.r. Najděte potenciál vektorového pole $\mathbf{f}(x,y) = \big(y\mathrm{e}^{xy} - x + y, x\mathrm{e}^{xy} + x + 2y\big)$ a pomocí něj spočítejte integrál $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{s}$, kde křivka $\mathcal{C}$ začíná v bodě $A = [1;0]$ a končí v bodě $B = [0;2]$.

Řešení. Potenciál vektorového pole $\mathbf{f}(x,y)$, je funkce $U(x,y)$, pro kterou platí $\mathbf{f}(x,y) = \operatorname{grad} U(x,y)$, tj. v našem případě

$$\frac{\partial U}{\partial x} = f_x(x,y) = y\mathrm{e}^{xy} - x + y\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = f_y(x,y) = x\mathrm{e}^{xy} + x + 2y\,. \qquad (13)$$

Aby existoval potenciál vektorového pole $\mathbf{f} = (f_x, f_y)$ je nutné, aby platilo

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}\,.$$

Protože je tato podmínka v našem případě splněna, bude potenciál $U(x, y)$ daného vektorového pole existovat.
Integrací první rovnice v (13) podle proměnné x doostaneme

$$U(x, y) = \mathrm{e}^{xy} - \tfrac{1}{2}\,x^2 + xy + \psi(y)\,,$$

kde $\psi(y)$ je libovolná diferemcovatelná funkce proměnné y. Po dosazení do druhé rovnice v (13) dostaneme pro tuto funkci rovnici

$$x\mathrm{e}^{xy} + x + \psi'(y) = x\mathrm{e}^{xy} + x + 2y\,, \quad \text{neboli} \quad \psi'(y) = 2y\,,$$

ze které plyne $\psi(y) = y^2 + c$, kde c je libovolná konstanta, která určuje nulovou hladinu potenciálu a kterou v našem příkladě můžeme položit rovnou nule. Takto jsme získali potenciál vektorovéhopole $\mathbf{f}(x, y)$ jako

$$U(x, y) = \mathrm{e}^{xy} - \tfrac{1}{2}\,x^2 + xy + y^2\,.$$

Tato funkce má v $\mathbb{R}^2$ spojité parciální derivace všech řádů, a tedy podle (1) je křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(x, y)\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} \big(y\mathrm{e}^{xy} - x + y)\,\mathrm{d}x + (x\mathrm{e}^{xy} + x + 2y)\,\mathrm{d}y\big) = U(0, 2) - U(1, 0) = \tfrac{9}{2}\,.$$

Příklad 4.r. Ukažte, že křivkový integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \big(y^2 \sin xy\,\mathrm{d}x + (xy \sin xy - \cos xy)\,\mathrm{d}y\big)$ nezávisí na integrační cestě $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ a spočítejte jej po křivce $\mathcal{C}$, která začíná v bodě $A = [0; 0]$ a končí v bodě $B = [\pi; 1]$.

Řešení. Protože má vektorové pole $\mathbf{f}(x, y) = (f_x, f_y) = \big(y^2 \sin xy, xy \sin xy - \cos xy\big)$ spojité derivace všech řádů v celé množině $\mathbb{R}^2$, je nutná a postačující podmínka pro to, aby nezáviselo na integrační cestě $\mathcal{C}$

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}\,.$$

Protože v našem případě

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = 2y \sin xy + xy^2 \cos xy\,, \qquad \frac{\partial f_y}{\partial x} = y \sin xy + xy^2 \cos xy + y \sin xy$$

je tato podmínka splněna a integrál můžeme počítat pomocí potenciálu nebo integrací po libovolné křivce, která začíná v bodě $A = [0; 0]$ a končí v bodě $B = [\pi; 1]$.
Když za křivku $\mathcal{C}$ vybereme lomenou čáru $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \dotplus \mathcal{C}_2$, která se skládá z orientované úsečky $\mathcal{C}_1$ z bodu A a bodu $C = [0; 1]$, a orientované úsečky z bodu C do bodu B dostaneme

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(x, y)\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{f}(x, y)\,\mathrm{d}\mathbf{s} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{f}(x, y)\,\mathrm{d}\mathbf{s}.$$

Parametrické rovnice těchto úseček jsou

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1: &\quad x = 0\,, \quad & y = t\,, \quad && 0 \le t \le 1\,,\\
\mathcal{C}_2: &\quad x = t\,, \quad & y = 1\,, \quad && 0 \le t \le \pi\,.
\end{aligned}$$

Tedy hledaný integrál je

$$\int_{\mathcal{C}} \big(y^2 \sin xy \,\mathrm{d}x + (xy \sin xy - \cos xy)\,\mathrm{d}y\big) = \int_0^1 (-\cos 0)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \sin t \,\mathrm{d}t = 1\,.$$

Příklad 5.r. Najděte potenciál vektorového pole

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \Big((2x+y-z)(y+z), (x+2y+z)(x-z), (x-y-2z)(x+y)\Big)$$

a pomocí něj najděte práci vektorového pole $\mathbf{f}(x,y,z)$ po křivce $\mathcal{C}$ s počátečním bodem $A = [1;2;3]$ a koncovým bodem $B = [3;1;2]$.

Řešení. Potenciál $U(x,y,z)$ vektorového pole $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$ je funkce, pro tkerou platí $\operatorname{grad} U = \mathbf{f}$, což je v našem případě

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} &= f_x = (2x+y-z)(y+z)\,,\\
\frac{\partial U}{\partial y} &= f_y = (x+2y+z)(x-z)\,,\\
\frac{\partial U}{\partial z} &= f_z = (x-y-2z)(x+y)\,.
\end{aligned} \tag{14}$$

Aby potenciál existoval, musí platit podmínky (2), tj.

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y}\,.$$

Tyto podmínky jsou pro naše vektorové pole splněny, a proto potenciál $U(x,y,z)$ existuje (aspoň lokálně).
Najít jej lze například postupnou integrací rovnic (14). Jestliže první rovnici integrujeme podle proměnné x, dostaneme

$$U(x,y,z) = \int (2x+y-z)(y+z)\,\mathrm{d}x = x^2(y+z) + x(y^2-z^2) + \psi(y,z)\,, \tag{15}$$

kde $\psi(y,z)$ je libovolná diferencovatelná funkce proměnných y a z. Když totio vyjádření funkce $U(x,y,z)$ dosadíme do druhé rovnice v (14), dostaneme pro funkci $\psi(y,z)$ rovnici

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 2xy + \frac{\partial \psi}{\partial y} = (x+2y+z)(x-z)\,, \quad \text{neboli} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -2yz - z^2\,.$$

Integrace tohoto vztahu podle proměnné y dává

$$\psi(y,z) = -y^2 z - yz^2 + \chi(z)\,,$$

kde $\chi(z)$ je liovolná diferencovatelná funkce proměnné z. Po dosazení této funkce do (15) dostaneme

$$U(x,y,z) = x^2(y+z)+x(y^2-z^2)-y^2z-yz^2+\chi(z) = x^2(y+z)+y^2(x-z)-z^2(x+y)+\chi(z)\,. \tag{16}$$

Jestlie tuto funkci dosadíme do třetí rovnice v (14), získáme

$$\frac{\partial U}{\partial z} = x^2 - y^2 - 2z(x+y) + \chi'(z) = (x-y-2z)(x+y)\,, \quad \text{tj.} \quad \chi'(z) = 0\,.$$

Tedy funkce $\chi(z)$ je rovna konstantě, za kterou mužeme vzít nule. Pak je potenciál našeho vektorového pole v celém $\mathbb{R}^2$ roven

$$U(x,y,z) = x^2(y+z) + y^2(x-z) - z^2(x+y)\,.$$

Podle vztahu (1) je hledaný křivkový integrál roven

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(x,y,z)\,\mathrm{d}\mathbf{s} = U(3;1;2) - U(1,2,3) = 42\,.$$

Příklad 6.r. Ukažte, že křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{C}} \left((2x+yz)\,\mathrm{d}x + \left(xz + \frac{2y}{\sqrt{y^2-z}}\right)\mathrm{d}y + \left(xy - \frac{1}{\sqrt{y^2-z}}\right)\mathrm{d}z \right)$$

nezávisí na křivce $\mathcal{C}$, která leží v oblasti $y^2 > z$, a spočítejte jej po křívce $\mathcal{C}$, která leží v této oblasti a která začíná v bodě $A = [2;1;0]$ a končí v bodě $B = [1;3;5]$.

Řešení. Aby křivkový integrál druhého druhu diferencovatelné vektorové funkce $\mathbf{f}(x,y,z)$ nezávisel na integrační cestě $\mathcal{C}$, která leží v oblasti Ω, musí být integrál přes každou uzavřenou křivku, která leží v Ω, roven nule, tj. vektorové pole $\mathbf{f}$ musí být konzervativní v Ω, a z toho plyne, že musí být v Ω potenciálové.
Proto musí v oblasti $y^2 > z$ existovat funkce $U(x,y,z)$ taková, že $\operatorname{grad} U(x,y,z) = \mathbf{f}(x,y,z)$, tj.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} &= f_x = 2x + yz\,,\\
\frac{\partial U}{\partial y} &= f_y = xz + \frac{2y}{\sqrt{y^2-z}}\,,\\
\frac{\partial U}{\partial z} &= f_z = xy - \frac{1}{\sqrt{y^2-z}}\,.
\end{aligned} \tag{17}$$

Nutné podmínky pro existenci potenciálu, tj.

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y}\,,$$

jsou pro naše vektorové pole splněny. Abychom našli funkci $U(x,y,z)$, integrujeme nejprve první rovnost v (17) podle proměnné x. To nám dává vztah

$$U(x,y,z) = x^2 + xyz + \psi(y,z)\,,$$

kde $\psi(y,z)$ je libovolná diferencovatelná funkce proměnných y a z. Pokud dosadíme tento tvar funkce $U(x,y,z)$ do druhé rovnice v (17) dostaneme

$$xz + \frac{\partial\psi}{\partial y} = xz + \frac{2y}{\sqrt{y^2-z}}\,, \quad \text{neboli} \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt{y^2-z}}\,.$$

Jestliže poslední rovnost integrujeme podle proměnné y dostaneme

$$\psi(y,z) = 2\sqrt{y^2-z} + \chi(z)\,,$$

kde $\chi(z)$ je libovolná diferencovatelná fukce proměnné z. Tedy rpo funkci $U(x,y,z)$ máme

$$U(x,y,z) = x^2 + xyz + 2\sqrt{y^2-z} + \chi(z)\,.$$

A když dosadíme toto vyjádření do poslední rovnice v (17), dostaneme

$$xy - \frac{1}{\sqrt{y^2-z}} + \chi'(z) = xy - \frac{1}{\sqrt{y^2-z}}\,, \qquad \text{neboli} \quad \chi'(z) = 0\,,$$

tj. $\chi(z)$ je rovna konstantě, kterou můžeme zvolit rovnou nule.
Tak jsme zjistili, že dané vektorové pole $\mathbf{f}(x,y,z)$ má v oblasti $y^2 > z$ potenciál

$$U(x,y,z) = x^2 + xyz + 2\sqrt{y^2-z}$$

Proto naš křivkový integrál nezávisí na křivce $\mathcal{C}$, která leží v této oblasti a podle (1) je

$$\int_{\mathcal{C}} \left((2x+yz)\,\mathrm{d}x + \left(xz + \frac{2y}{\sqrt{y^2-z}}\right)\mathrm{d}y + \left(xy - \frac{1}{\sqrt{y^2-z}}\right)\mathrm{d}z \right) = \\ = U(1,3,5) - U(2,1,0) = 14\,.$$

Příklad 7.r. Ukažte, že vektorové pole $\mathbf{f}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ splňuje na množině $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{[0;0]\big\}$ podmínku (2), ale pro kladně orientovanou kružnici $x^2+y^2=1$ je $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{s} \neq 0$.

Řešení. Pro uvedené vektorové pole je

$$f_x(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,, \qquad f_y = \frac{x}{x^2+y^2}\,.$$

Protože v $\mathbb{R}^2 \setminus \{[0;0]\}$ je

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,, \qquad \frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

je splněna podmínka (2), a tedy lokálně (tj. v okolí každého bodu) existuje funkce $U(x,y)$ taková, že $\mathbf{f}(x,y) = \operatorname{grad} U(x,y)$.
Spočítáme křivkový integrál

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \oint_{\mathcal{C}} \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\,,$$

kde $\mathcal{C}$ je kružnice $x^2 + y^2 = 1$, po které se pohybujeme proti směru hodinových ručiček, podle definice. Parametrické rovnice této kružnice jsou

$$x = \cos\varphi\,, \quad y = \sin\varphi\,, \qquad 0 < \varphi < 2\pi\,.$$

Protože

$$\mathrm{d}x = -\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,, \qquad \mathrm{d}y = \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

je tento křivkový integrál

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin\varphi\cdot(-\sin\varphi) + \cos\varphi\cdot(\cos\varphi)}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \neq 0\,.$$

`Poznámka.` Najdeme funkci $U(x,y)$, pro kterou v okolí daného bodu $[x_0;y_0] \neq [0;0]$, platí $\operatorname{grad} U(x,y) = \mathbf{f}(x,y)$, neboli

$$\frac{\partial U}{\partial x} = f(x) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}\,. \tag{18}$$

Tuto soustavu rovnic je výhodné řešit pomocí polárních souřadnic

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \qquad r > 0\,.$$

Pro diferencovatelnou funkci $U(x,y)$ definujeme funkci $V(r,\varphi)$ vztahem

$$U(x,y) = U(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = V(r,\varphi)\,.$$

Podle věty o derivaci složené funkce je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial r} &= \frac{\partial U}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial x}\,\cos\varphi + \frac{\partial U}{\partial y}\,\sin\varphi\,,\\
\frac{\partial V}{\partial \varphi} &= \frac{\partial U}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial x}\,\big(-r\sin\varphi\big) + \frac{\partial U}{\partial y}\,r\cos\varphi\,.
\end{aligned}$$

Pokud použijeme vztahy (18), dostaneme

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{-r\sin\varphi}{r^2}\,\cos\varphi + \frac{r\cos\varphi}{r^2}\,\sin\varphi = 0\,, \qquad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{-r\sin\varphi}{r^2}\,\big(-r\sin\varphi\big) + \frac{r\cos\varphi}{r^2}\,r\cos\varphi = 1\,.$$

To znamená, že potenciál je až na konstantu v polárních souřadnicích roven funkci $V(r,\varphi) = \varphi$. Ale tuto funkci nelze definovat na celé množině $\mathbb{R}^2 \setminus \{[0;0]\}$.
Problém je v tom, že pokud máme dánu hodnotu funkce $U(x,y)$ v nějakém bodě $A = [x;y] \neq [0;0]$, dejme tomu, že v bodě $A = [1;0]$ je $U(1,0) = 0$, a začneme se pohybovat po křivce $\mathcal{C}$, která obíhá počátek souřadnic, například po kružnici $x^2+y^2 = 1$, tj. $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, kde je $U(x,y) = \varphi$, a dostaneme se po ní zpět do bodu $A = [x;y]$, nemusíme dostat původní hodnotu $U(x,y)$, v našem konkretním případě dostaneme $2\pi \neq U(1,0) = 0$.
To je způsobeno tím, že v množině $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0;0]\}$ jsou "díry", v našem případě je to počátek souřadnic. V rovině $\mathbb{R}^2$ se otevřené souvislé množiny "bez děr" nazývají jednoduše souvislé. Obecně je otevřená souvislá množina $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jednoduše souvislá právě tehdy, pokud lze každou spojitou uzavřenou křivku $\mathcal{C} \subset \Omega$ "spojitě deformovat v množině Ω do bodu".
Například pokud vyjmeme z roviny počátek souřadnic, tj. $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0;0]\}$, nelze kružnici, která obíhá počátek spojitě deformovat do bodu v Ω, protože bychom museli projít počátkem souřadnic, tj. bodem $[0;0]$, který nepatří do množiny Ω. Tedy množina $\mathbb{R}^2 \setminus \{[0;0]\}$ není jednoduše souvislá.
Naproti tomu třírozměrný prostor, se kterého vyjmeme počátek souřadnic, tj. množina $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{[0;0;0]\}$ jednoduše souvislá je.

Lze ukázat, že pro jednoduše souvislé množiny je podmínka (2) pro nezávislost křivkového integrálu druhého druhu na křivce podmínkou nutnou a postačující.

Příklad 8.r. Pomocí Greenovy věty najděte křivkový integrál

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{e}^{-x^2+y^2} \big(\cos 2xy\,\mathrm{d}x + \sin 2xy\,\mathrm{d}y\big)\,,$$

kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná kružnice $x^2+y^2=1$.

Řešení. Funkce

$$P(x,y) = f_x = \mathrm{e}^{-x^2+y^2}\cos 2xy\,, \qquad Q(x,y) = f_y = \mathrm{e}^{-x^2+y^2}\sin 2xy$$

mají spojité parciální derivace v celé rovině. Protože naše křivka $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná hranice kruhu $\mathcal{K}$, $x^2+y^2<1$, je podle Greenovy věty

$$\oint_{\mathcal{C}} \Big(P(x,y)\,\mathrm{d}x - Q(x,y)\,\mathrm{d}y\Big) = \iint_{\mathcal{K}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

A protože

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x} &= -2x\mathrm{e}^{-x^2+y^2}\sin 2xy + 2y\mathrm{e}^{-x^2+y^2}\cos 2xy\,,\\ \frac{\partial P}{\partial y} &= 2y\mathrm{e}^{-x^2+y^2}\cos 2xy - 2x\mathrm{e}^{-x^2+y^2}\sin 2xy\,,\end{aligned}$$

je

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{e}^{-x^2+y^2}\big(\cos 2xy\,\mathrm{d}x + \sin 2xy\,\mathrm{d}y\big) = 0\,.$$

Příklad 9.r. Pomocí Greenovy věty najděte křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{C}} \Big(\big(\mathrm{e}^x\sin y - y\big)\,\mathrm{d}x + \big(\mathrm{e}^x\cos y + x\big)\,\mathrm{d}y\Big)\,,$$

kde $\mathcal{C}$ je půlkružnice $x^2+y^2=2x$, $y\ge 0$, která začíná v bodě $A=[2;0]$ a končí v bodě $B=[0;0]$.

Řešení. Pokud půlkružnici $\mathcal{C}$ doplníme úsečkou $\mathcal{C}_1$ z bodu $B=[0;0]$ do bodu $A=[2;0]$, dostaneme uzavřenou křivku $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C} \dotplus \mathcal{C}_1$, která je kladná orientovaná hranice půlkruhu Ω, který je dán nerovnostmi $x^2+y^2\le 2x$, $y\ge 0$. Jestliže označíme

$$P(x,y) = \mathrm{e}^x\sin y - y\,,\quad Q(x,y) = \mathrm{e}^x\cos y + x \implies \frac{\partial P}{\partial y} = \mathrm{e}^x\cos y - 1\,,\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \mathrm{e}^x\cos y + 1\,,$$

je podle Greenovy věty

$$\oint_{\mathcal{C}_0} \Big(\big(\mathrm{e}^x\sin y - y\big)\,\mathrm{d}x + \big(\mathrm{e}^x\cos y + x\big)\,\mathrm{d}y\Big) = \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi\,,$$

Protože množina Ω je

$$x^2 - 2x + y^2 = (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0\,,\quad y\ge 0$$

neboli půlkruh s poloměrem $R=1$, jehož obsah je $\frac{1}{2}\pi$.

Ale podle definice křivkového intergálu, je pro náš integrál

$$\oint_{\mathcal{C}_0} \big(P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y\big) = \int_{\mathcal{C}} \big(P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y\big) + \int_{\mathcal{C}_1} \big(P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y\big) = \pi\,.$$

Proto platí

$$\int_{\mathcal{C}} \big(P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y\big) = \pi - \int_{\mathcal{C}_1} \big(P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y\big)\,.$$

A protože parametrické rovnice úsečky $\mathcal{C}_1$ jsou

$$x = t\,,\quad y = 0\,,\quad 0 \le t \le 2 \implies \mathrm{d}x = \mathrm{d}t\,,\quad \mathrm{d}y = 0\,,$$

je

$$\int_{\mathcal{C}_1} \Big(\big(\mathrm{e}^x \sin y - y\big)\,\mathrm{d}x + \big(\mathrm{e}^x \cos y + x\big)\,\mathrm{d}y\Big) = 0\,,$$

a tedy daný integrál je roven π.

Příklad 10.r. Jakou podmínku musí splňovat spojitě diferencovatelná funkce $F(x,y)$, aby křivkový integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} F(x,y)\big(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y\big)$ nezávisel na křivce $\mathcal{C}$?

Řešení. Aby křivkový integrál druhého druhu $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{s}$ nezávisel na křivce $\mathcal{C}$, musí pro každou uzavřenou křivku $\mathcal{C}$ platit $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{s} = 0$. V našem případě tedy musí pro každou uzavřenou křivku $\mathcal{C}$ platit

$$\oint_{\mathcal{C}} \Big(yF(x,y)\,\mathrm{d}x + xF(x,y)\,\mathrm{d}y\Big) = 0\,.$$

Nechť je $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ oblast, jejíž kladně orientovaná hranice je uzavřená křivka $\mathcal{C}$. Pak lze v tomto vztahu použít Greenovu větu, kde

$$P(x,y) = yF(x,y)\,,\quad Q(x,y) = xF(x,y) \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = F + x\,\frac{\partial F}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial P}{\partial y} = F + y\,\frac{\partial F}{\partial y}\,.$$

Ta vede ke vztahu

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} \left(x\,\frac{\partial F}{\partial x} - y\,\frac{\partial F}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

A protože $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je libovolná oblast, musí být integrovaná funkce rovna nule, tj. musí být

$$x\,\frac{\partial F}{\partial x} - y\,\frac{\partial F}{\partial y} = 0\,.$$

Lze ukázat, že tato rovnice má řešení $F(x,y) = \psi(xy)$, kde $\psi = \psi(t)$ je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné.

Příklad 11.r. Pomocí Greenovy věty najděte obsah P oblasti, která je omezená smyčkou Descartesova listu $x^3 + y^3 = 3xy$, $x,\ y \ge 0$.

Řešení. Z Greenovy věty plyne, že obsah P dané oblasti lze najít pomocí jednoho z křivkových integrálů druhého druhu

$$P = \oint_{\mathcal{C}} x \, \mathrm{d}y = -\oint_{\mathcal{C}} y \, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} \bigl(x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x\bigr) .$$

Abychom našli parametrické rovnice dané křivky, položíme nejprve $y = tx$. Pak dostaneme

$$x^3 + y^3 = 3xy \implies x^3\bigl(1 + t^3\bigr) = 3x^2 t , \quad \text{neboli} \quad x = \frac{3t}{1+t^3} , \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3} , \quad t > 0 .$$

Z uvedených vztahů pro obsah P vede většinou k nejjednoduššímu integrálu ten poslední. Protože

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \, \mathrm{d}t , & y \, \mathrm{d}x &= \frac{9t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3} \, \mathrm{d}t , \\ \mathrm{d}y &= \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2} \, \mathrm{d}t , & x \, \mathrm{d}y &= \frac{9t^2(2-t^3)}{(1+t^3)^3} \, \mathrm{d}t , \end{aligned}$$

dostaneme pro hledaný obsah vztah

$$P = \tfrac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} \bigl(x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x\bigr) = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty \frac{9t^2 \, \mathrm{d}t}{(1+t^3)^2} .$$

Poslední integrál celkem snadno najdeme pomocí substituce

$$z = 1 + t^3 \implies \mathrm{d}z = 3t^2 \, \mathrm{d}t , \qquad 0 \mapsto 1 , \quad \infty \mapsto \infty ,$$

po které dostaneme

$$P = \tfrac{3}{2} \int_0^\infty \frac{3t^2 \, \mathrm{d}t}{(1+t^3)^2} = \tfrac{3}{2} \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = \tfrac{3}{2} .$$

Příklad 12.r. Najděte rotaci a divergenci vektorového pole

$$\mathbf{f} = \left(\frac{y-z}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z-x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{x-y}{x^2+y^2+z^2} \right) .$$

Řešení. Rotaci a divergenci vektorového pole $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$ najdeme podle vztahu (5) a (7), tj.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{f} &= \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) , \\ \operatorname{div} \mathbf{f} &= \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} . \end{aligned}$$

V našem příkladě je

$$f_x = \frac{y-z}{x^2+y^2+z^2} , \qquad f_y = \frac{z-x}{x^2+y^2+z^2} , \qquad f_z = \frac{x-y}{x^2+y^2+z^2} .$$

A protože

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} = \frac{-2x(y-z)}{(x^2+y^2+y^2)^2}\,, \qquad \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{x^2-y^2+z^2+2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,, \qquad \frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{-x^2-y^2+z^2-2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,,$$
$$\frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{x^2-y^2-z^2-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,, \qquad \frac{\partial f_y}{\partial y} = \frac{-2y(z-x)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,, \qquad \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{x^2+y^2-z^2+2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,,$$
$$\frac{\partial f_z}{\partial x} = \frac{-x^2+y^2+z^2+2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,, \qquad \frac{\partial f_z}{\partial y} = \frac{-x^2+y^2-z^2-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,, \qquad \frac{\partial f_z}{\partial z} = \frac{-2z(x-y)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,,$$

je

$$\operatorname{rot}\mathbf{f} = \left(\frac{-2x(x+y+z)}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{-2y(x+y+z)}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{-2z(x+y+z)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right), \qquad \operatorname{div}\mathbf{f} = 0\,.$$

Příklad 13.r. Pomocí Stokesovy věty najděte integrál

$$\oint_{\mathcal{C}} \Big((y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z\Big)\,,$$

kde $\mathcal{C}$ je elipsa $x^2+y^2=4$, $3x+2z=6$, kterou probíháme proti směru pohybu hodinových ručiček, když se na ni podíváte z kladného směru osy z.

Řešení. Za plochu $\mathcal{S}$, jejíž hranice je uvedená elipsa, můžeme zvolit část roviny

$$3x+2z=6\,, \qquad x^2+y^2 \le 4\,,$$

která je orientována normálou, která míří v kladném směru osy z, tj. její třetí složka je kladná. Stokesova věta pak zní

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}\mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Protože dané vektorové pole je $\mathbf{f}(x,y,z) = \big(f_x, f_y, f_z\big)$, kde

$$f_x = y-z\,, \qquad f_y = z-x\,, \qquad f_z = x-y\,,$$

je podle (5)

$$\operatorname{rot}\mathbf{f} = (-2,-2,-2)\,.$$

Pokud zvolíme za parametry v parametrických rovnicích roviny proměnné x a y, zjistíme, že plocha $\mathcal{S}$ je popsána vztahy

$$x=x\,, \quad y=y\,, \quad z=\tfrac{3}{2}\,(2-x)\,, \qquad x^2+y^2\le 4\,.$$

Standardní postupem pak získáme

$$\boldsymbol{\tau}_x = \big(1,0,-\tfrac{3}{2}\big)\,, \quad \boldsymbol{\tau}_y = (0,1,0)\,, \quad \mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}_x \times \boldsymbol{\tau}_y = \big(\tfrac{3}{2},0,1\big)\,.$$

Protože je třetí složka tohoto vektoru kladná, jedná se o sparávnou orientaci. Z toho pak plyne

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}\mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\Omega} \operatorname{rot}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} -5\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde Ω je kruh $x^2 + y^2 \le 4$, který má ohsah 4π. Proto je

$$\oint_{\mathcal{C}} \Big((y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z \Big) = -20\pi\,.$$

Příklad 14.r. Pomocí Gaussovy věty najděte integrál $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \big(x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \big)$, kde $\mathcal{S}$ je kladně orientovaná hranice kvádru $\langle -1, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \langle 1, 2\rangle$.
Řešení. Podle Gaussovy věty je

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{f}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

kde $\mathcal{S}$ je kladně orientovaná hranice tělesa $\mathcal{T}$.
V našem případě je vektorové pole $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$, kde $f_x = x$, $f_y = y$ a $f_z = z$, a tedy

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = 3\,.$$

Proto je

$$\iint_{\mathcal{S}} \big(x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \big) = 3 \iint_{\mathcal{T}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 6\,,$$

protože objem kvadru $\mathcal{T}$ je roven 2.

Příklad 15.r. Pomocí Gaussovy věty najděte integrál $\iint_{\mathcal{S}} \big(-y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \big)$, kde $\mathcal{S}$ je plocha $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z > 0$, která je orientována tak, že její normála má kladnou třetí složku.
Řešení. Tento plošný integrál druhého druhu je možné zapsat jako

$$\iint_{\mathcal{S}} \big(-y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \big) = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,,$$

kde vektorové pole $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$ má složky $f_x = -y$, $f_y = x$ a $f_z = z$ a plocha $\mathcal{S}$ je část kuželové plochy s osou z a vrcholem v bodě $V = [0; 0; 2]$, která leží mezi rovinami $z = 0$ a $z = 2$. Abychom mohli použít Gaussovu větu, musíme mít uzavřenou plochu, která je hranice omezneného tělesa $\mathcal{T}$.
Pokud budeme uvažovat kužel $\mathcal{T}$ popsaný nerovnostmi $z \le 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \ge 0$, je jeho hranice plocha $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}_1$, kde $\mathcal{S}$ je plocha, přes kterou máme integrovat a $\mathcal{S}_1$ je část roviny $z = 0$, $0 \le 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$, tj. kruh $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$. Aby byla hranice kužele $\mathcal{T}$ kladně orientovaná, musí její normálový vektor mířit vně kužele. Tedy na ploše $\mathcal{S}$ musí mít normálový vektor mířit v kladném směru osy z, tj. musí mít kladnou třetí složku, což odpovídá zadané orientaci plochy $\mathcal{S}$. Na kruhu $\mathcal{S}_1$ musí mířit v záporném směru osy z a tedy musí mít zápornou třetí složku.
Gaussova věta pak dává

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S} + \int_{\mathcal{S}_1} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}_0} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{f}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

neboli

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{f}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \int_{\mathcal{S}_1} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,. \tag{19}$$

Protože plocha $\mathcal{S}_1$ je část roviny $z = 0$, je na této ploše vektorové pole rovno $\mathbf{f} = (-y, x, 0)$ a normálový vektor k ní je $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$. A protože $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 0$, je integrál přes plochu $\mathcal{S}_1$ v (19) roven nule. A protože

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = 1\,,$$

je

$$\iint_{\mathcal{S}} \big(-y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + x \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x + z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y\big) = \iiint_{\mathcal{T}} \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z\,,$$

neboli je roven objemu kužele $\mathcal{T}$. Ten můžeme najít například pomocí cylindrických souřadnic

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = z\,, \qquad r > 0\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,, \quad z \in \mathbb{R}\,, \qquad J = r\,.$$

Podle věty o substituci dostaneme

$$\iiint_{\mathcal{T}} \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \iiint_{\widehat{\mathcal{T}}} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z\,,$$

kde $\widehat{\mathcal{T}}$ je vzor množiny $\mathcal{T}$, tj. množina daná vztahy

$$z \le 2 - r\,, \quad z > 0\,, \quad r > 0\,, \quad -\pi < \varphi < r\,,$$

neboli

$$-\pi < \varphi < \pi\,, \quad 0 < z < 2 - r\,, \quad 0 < r < 2\,.$$

Pokud použijeme Fubiniovu větu, dostaneme

$$\iint_{\mathcal{S}} \big(-y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + x \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x + z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y\big) = \int_0^2 \mathrm{d}r \int_0^{2-r} \mathrm{d}z \int_{-\pi}^{\pi} r \,\mathrm{d}\varphi = \tfrac{8}{3}\,\pi\,.$$

Příklad 16.r. Nechť má funkce $U(x, y, z)$ na množině Ω spojité druhé parciální derivace. Ukažte, že platí $\operatorname{rot}\big(\operatorname{grad} U(x, y, z)\big) = 0$.

Řešení. Podle definice je rotace vektorového pole $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$ rovna

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right).$$

Vektorové pole $\operatorname{grad} U$ má složky

$$f_x = \frac{\partial U}{\partial x}\,, \qquad f_y = \frac{\partial U}{\partial y}\,, \qquad f_z = \frac{\partial U}{\partial z}\,.$$

Po dosazení pak dostaneme

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\right) = (0, 0, 0)\,,$$

protože podle předpokladu jsou druhé parciální derivace záměnné.

Příklad 17.r. Nechť mají funkce $f(x,y,z)$ a $g(x,y,z)$ v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ spojité parciální derivace druhého řádu. Nechť je $\mathcal{T}$ omezené těleso v $\mathbb{R}^3$ takové, že $\overline{\mathcal{T}} \subset \Omega$, a $\mathcal{S}$ kladně orientovaná hranice tělesa $\mathcal{T}$. Ukažte, že platí

$$\iiint_{\mathcal{T}} g\Delta f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\iiint_{\mathcal{T}} \bigl(\operatorname{grad} g\bigr)\cdot\bigl(\operatorname{grad} f\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint_{\mathcal{S}} g \operatorname{grad} f \,\mathrm{d}\mathbf{S}\,. \tag{20}$$

Řešení. Když použijeme Gaussovu větu na plošný integrál v (20), dostaneme

$$\iint_{\mathcal{S}} g \operatorname{grad} f\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{T}} \operatorname{div}\bigl(g \operatorname{grad} f\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Když budeme uvažovat spojitě difernecovatelnou funkci $g(x,y,z)$ a spojitě diferencovatelné vektorové pole $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$, je vektorové pole $g\mathbf{F} = \bigl(gF_x, gF_y, gF_z\bigr)$. Pro divergenci tohoto pole máme

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\bigl(g\mathbf{F}\bigr) &= \frac{\partial(gF_x)}{\partial x} + \frac{\partial(gF_y)}{\partial y} + \frac{\partial(gF_z)}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial g}{\partial x}F_x + \frac{\partial g}{\partial y}F_y + \frac{\partial g}{\partial z}F_z + g\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

A protože vektorové pole

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = \operatorname{grad} g\,,$$

lze tento vztah zapsat jako

$$\operatorname{div}\bigl(g\mathbf{F}\bigr) = \bigl(\operatorname{grad} g\bigr)\cdot\mathbf{F} + g\operatorname{div}\mathbf{F}\,,$$

který platí pro libovolnou diferencovatelnou funkci $g = g(x,y,z)$ a vektorové pole $\mathbf{F}$. Speciálně pro vektorové pole $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$, dostaneme

$$\operatorname{div}\bigl(g\operatorname{grad} f\bigr) = \bigl(\operatorname{grad} g\bigr)\cdot\bigl(\operatorname{grad} f\bigr) + g\operatorname{div}\bigl(\operatorname{grad} f\bigr) = \bigl(\operatorname{grad} g\bigr)\cdot\bigl(\operatorname{grad} f\bigr) + g\Delta f\,.$$

Proto platí

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} g\operatorname{grad} f\,\mathrm{d}\mathbf{S} &= \iiint_{\mathcal{T}} \operatorname{div}\bigl(g\operatorname{grad} f\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\ &= \iiint_{\mathcal{T}} \bigl(\operatorname{grad} g\bigr)\cdot\bigl(\operatorname{grad} f\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iiint_{\mathcal{T}} g\Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,\end{aligned}$$

což je pouze jiný zápis vztahu (20).

`Poznámka.` Vztah (20) se nazývá první Greenův vzorec a používá se v teorii řešení okrajových úloh pro jistý typ parciálních diferenciálních rovnic (tzv. eliptické rovnice matematické fyziky), které mají zásadní význam v teoretické fyzice.

Příklad 1. Najděte potenciál vektorového pole

$$\mathbf{f} = \Bigl(2x(1+y) - y^2 - 1, 2y(1-x) + x^2 + 1\Bigr)$$

a pomocí něj spočítejte integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s}$, kde $\mathcal{C}$ je křivka, která začíná v bodě $A = [2;0]$ a končí v bodě $B = [1;1]$. $\big[0\,.\big]$

Příklad 2. Ukažte, že křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{C}} \Big(\big(y(1+\cos xy)+2x+1\big)\,\mathrm{d}x + \big(x(1+\cos xy)+2y-1\big)\,\mathrm{d}y\Big)$$

nezávisí na volbě křivky $\mathcal{C}$ a spočítejte jej po křivce, která začíná v bodě $A = [0;1]$ a končí v bodě $B = [1;0]$. $\big[2\,.\big]$

Příklad 3. Ukažte, že křivkový integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s}$, kde vektorové pole

$$\mathbf{f} = \left(\frac{y + x\ln z}{x}, \frac{z + y\ln x}{y}, \frac{x + z\ln y}{z}\right),$$

nezávisí na křivce $\mathcal{C}$, která leží v množině x, y, $z > 0$, a najděte jej pro křivku $\mathcal{C}$, která začíná v bodě $A = [1;2;1]$ a končí v bodě $B = [4;1;2]$. $\big[5\ln 2\,.\big]$

Příklad 4. Najděte potenciál vekotorového pole

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \Big(y\big(\sin z - z\sin x\big), \big(x+2y\big)\sin z + z\big(1+\cos x\big), \big(xy+y^2-1\big)\cos z + y\big(1+\cos x\big)\Big)$$

a pomocí něj spočítejte křivkový integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s}$, kde $\mathcal{C}$ je křivka s počátečním bodem $A = [0;2;0]$ a koncovým bodem $B = [\pi;1;-\pi]$.

$\Big[U(x,y,z) = \big(xy+y^2-1\big)\sin z + yz\big(1+\cos x\big);\quad 0\,.\Big]$

Příklad 5. Pomocí Grenovy věty najděte křivkový integrál $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \Big(x^2y\,\mathrm{d}x - xy^2\,\mathrm{d}y\Big)$, kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná kružnice $x^2+y^2=3$. $\big[-\frac{9}{2}\pi\,.\big]$

Příklad 6. Pomocí Greenovy věty najděte obsah oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je ohraničena křivkou s parametrickými rovnicemi $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, kde $0 \le t \le 2\pi$. $\big[\frac{3}{8}\pi\,.\big]$

Příklad 7. Vypočtěte divergenci vektorového pole

$$\mathbf{f} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

$$\left[\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,.\right]$$

Příklad 8. Vypočtěte rotaci vektorového pole $\mathbf{f} = \left(\dfrac{y}{z}, \dfrac{z}{x}, \dfrac{x}{y}\right)$.

$$\left[\left(-\frac{x^2+y^2}{xy^2}, -\frac{y^2+z^2}{yz^2}, -\frac{x^2+z^2}{x^2z}\right).\right]$$

Příklad 9. Pomocí Stokesovy věty najděte křivkový integrál

$$\oint_{\mathcal{C}} \Big((z^2-y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-z^2)\,\mathrm{d}y + (y^2-x^2)\,\mathrm{d}z\Big),$$

kde $\mathcal{C}$ je řez povrchu krychle $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$ s rovinou $x + y + z = \frac{3}{2}$, kterou obíháme proti směru pohybu hodinových ručiček, když se díváme z kladného směru osy x. $\left[\frac{9}{4}\,.\right]$

Příklad 10. Pomocí Gaussovy věty najděte integrál

$$\iint_{\mathcal{S}} \Big(yz \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + xz \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x + xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \Big),$$

kde $\mathcal{S}$ je kladně orientovaná hranice elipsoidu $\frac{1}{4}\,x^2 + y^2 + 4z^2 \le 1$. $[0\,.]$

Příklad 11. Pomocí Gaussovy věty najděte integál $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S}$, kde $\mathcal{S}$ je kladně orientovaná hranice čtyřstěnu x, y, $z \ge 0$ a $x + y + z \le 1$ a vektorové pole

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \Big(x^2 + xy + y^2,\ y^2 + yz + z^2,\ x^2 + xz + z^2 \Big).$$

$\left[\frac{3}{8}\right]$

Příklad 12. Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$, jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Pomocí Gaussovy věty najděte tok vektoru $\mathbf{f} = xy\mathbf{i} + zy\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ kladně orientovaným povrchem tělesa $x^2 + y^2 \le z^2$, $0 \le z \le 1$. $\left[\frac{1}{4}\,\pi\,.\right]$

Příklad 13. Pomocí Gaussovy věty najděte plošný integrál

$$\iint_{\mathcal{S}} \Big(x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + y \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x + z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \Big),$$

kde plocha $\mathcal{S}$ je část kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x > 0$, $y < 0$ a $z < 0$, která je orientována tak, že její normálový vektor má kladnou třetí složku. $\left[-\frac{1}{2}\,\pi\,.\right]$

Příklad 14. Nechť má vektorové pole $\mathbf{f} = \big(f_x, f_y, f_z\big)$ spojité druhé parciální derivace. Ukažte, že $\operatorname{div}\big(\operatorname{rot} \mathbf{f}\big) = 0$.

Příklad 15. Ukažte, že divergence vektorového pole

$$\mathbf{f} = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},\ \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},\ \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

je rovna nule, ale plošný integrál $I = \displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S}$, kde $\mathcal{S}$ je kladně orientovaná hranice koule $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ je nenulový. $[I = 4\pi\,.]$