Diferenciální rovnice prvního řádu

<u>Diferenciální rovnice prvního řádu</u> je rovnice

$$x' = f(t,x)\,, \quad \text{kde} \quad D_f \subset \mathbb{R}^2\,. \tag{1}$$

Obecné řešení diferenciální rovnice (1) závisí zpravidla na jedné reálné konstantě c.

<u>Počáteční podmínka</u> pro diferenciální rovnice prvního řádu (1) je podmínka $x(t_0) = x_0$, kde $[t_0, x_0] \in D_f$. Počáteční podmínka pravidla určuje hodnotu konstanty c.

<u>Cauchyova úloha</u> je úloha najít řešení diferenciální rovnice (1), které splňuje danou počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$.

<u>Prodloužení řešení a maximální řešení.</u> Nechť je $x_1(t)$ řešení diferenciální rovnice (1) definované na intervalu $\mathcal{I}_1$ a $x_2(t)$ její řešení na intervalu $\mathcal{I}_2 \supset \mathcal{I}_1$ takové, že pro každé $t \in \mathcal{I}_1$ platí $x_2(t) = x_1(t)$. Pak se řešení $x_2(t)$ nazývá prodloužení řešení $x_1(t)$.
Řešení $x(t)$ diferenciání rovnice (1), které nelze prodloužit, se nazývá maximální řešení.

1. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je diferenciální rovnice tvaru

$$x' = f(t) \cdot g(x)\,, \tag{2}$$

tj. rovnice, jejichž pravá strana je součin funkce proměnné t a funkce proměnné x.

Budeme předpokládat, že funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu $\mathcal{I}$ a funkce $g(x)$ je spojitá na intervalu $\mathcal{J}$. Řešení $x = x(t)$ diferenciální rovnice (2) s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$ budeme pak hledat na intervalu $\mathcal{I}$, který obsahuje bod t_0 a hodnoty funkce $x(t)$ budou z intervalu $\mathcal{J}$ takovém, že $x_0 \in \mathcal{J}$.

Implicitní tvar obecného řešení diferenciální rovnice se separovanými proměnnými (2) lze většinou najít následujícím postupem:

$$x' = f(t)\,g(x) \implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t)\,g(x) \implies \frac{dx}{g(x)} = f(t)\,\mathrm{d}t \implies \int \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = \int f(t)\,\mathrm{d}t + c\,,$$

kde c je reálná konstanta, která je určena počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$.

Jestliže je zadána počáteční podmínka $x(t_0) = x_0$, kde $g(x_0) \neq 0$, lze implicitní tvar řešení Cauchyovy úlohy zapsat pomocí určitých jako

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{g(\xi)} = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

`Poznámka.` Problém může nastat v bodech a, kde je $g(a) = 0$, protože vlastně dělíme nulou. V takovém případě má diferenciální rovnice (2) konstantní řešení $x(t) = a$, které bychom výše uvedeným postupem nemuseli dostat při žádné volbě konstanty c.
Jestliže je derivace $g'(x)$ omezená v okolí bodu a, pro který je $g(a) = 0$, je konstantní řešení $x(t) = a$ jediné řešení, které protíná přímku $x = a$. Ale pokud derivace $g'(x)$ není v žádném okolí bodě a omezená, tj. "$g'(a) = \infty$", může být řešení, které protínají přímku $x = a$, víc. Nekonstantní řešení $x = x(t)$ pak dostaneme výše uvedeným obecným postupem.

Příklad 1.1.r. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x' = \frac{1-t^2}{tx}\,, \quad x(1) = -2\,.$$

Řešení: Jedná se o diferenciální rovnici se separovanými proměnnými, kde $f(t) = \dfrac{1-t^2}{t}$ a $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Funkce $f(t)$ i $g(x)$ jsou spojité na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Protože je počáteční podmínka dána v intervalu $(0, \infty) \times (-\infty, 0)$, budeme hledat řešení, jehož definiční obor je podmnožina intervalu $(0, \infty)$, tj. $t > 0$ a obor hodnot je podmnožina intervalu $(-\infty, 0)$, tj. $x(t) < 0$. Protože $g(x) \neq 0$, nemá diferenciální rovnice konstantní řešení.
Standardním postupem dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1-t^2}{tx} \;\Rightarrow\; x\,\mathrm{d}x = \frac{1-t^2}{t}\,\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; \int x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-t^2}{t}\,\mathrm{d}t + c \;\Rightarrow\; \tfrac{1}{2}x^2 = \ln t - \tfrac{1}{2}\,t^2 + c\,,$$

kde c je konstanta. Tu určíme z počáteční podmínky $x(1) = -2$. Po dosazení $t = 1$ a $x = -2$ dostaneme

$$2 = -\tfrac{1}{2} + c\,, \quad \text{tj.} \quad c = \tfrac{5}{2}\,.$$

Po dosazení do obecného řešení dostaneme

$$x^2 = 2\ln t - t^2 + 5\,. \tag{3}$$

A protože $x(t) < 0$, plyne z toho

$$x = -\sqrt{5 + 2\ln t - t^2}\,.$$

Definiční obor tohoto řešení je množina $t > 0$ a $5 + 2\ln t \geq t^2$.

`Poznámka.` Vztah (3) jsme mohli také získat přímo pomocí určitých integrálů

$$\int_{-2}^{x} \xi\,\mathrm{d}\xi = \int_1^t \frac{1-\tau}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\,, \quad \text{tj.} \quad \tfrac{1}{2}\Big[\xi^2\Big]_{-2}^{x} = \Big[\ln\tau - \tfrac{1}{2}\,\tau\Big]_1^t, \quad \text{tj.} \quad \tfrac{1}{2}\left(x^2 - 4\right) = \ln t - \tfrac{1}{2}\,t^2 + \tfrac{1}{2}\,.$$

Příklad 1.2.r. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$tx' + x = x\ln x\,, \quad x(1) = 1\,. \tag{4}$$

Řešení: Diferenciálné rovnice (4) je nelineární. Jestliže pro $t \neq 0$ zapíšeme tuto diferenciální rovnici ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{x\ln x - x}{t}\,,$$

vidíme, že se jedná o diferenciální rovnici se separovanými proměnnými.

Protože rovnice $g(x) = x\ln x - x = 0$ má řešení $x = \mathrm{e}$, dostaneme konstantní řešení $x = \mathrm{e}$. A protože je $(x\ln x - x)' = \ln x$ a $\ln \mathrm{e} = 1$, je konstantní řešení $x = \mathrm{e}$ jediné řešení, pro které je $x(t_0) = \mathrm{e}$. Z počáteční podmínky $x(1) = 1 < \mathrm{e}$ pak plyne, že řešení diferenciální rovnice (4) leží v intervalu $(0, \mathrm{e})$.

Při hledání řešení $x(t)$ rovnice (4) se omezíme na řešení, která jsou definována na jednom z intervalů $\mathcal{I}_- = (-\infty, 0)$ nebo $\mathcal{I}_+ = (0, +\infty)$. Protože je počáteční podmínka dána v bodě $t = 1$, budeme pracovat na intervalu $\mathcal{I}_+$, tj. budeme předpoládat, že $t > 0$.
Standardním způsobem pak pro řešení $x(t)$ dostaneme rovnici

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x - 1)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} + C \implies \ln\bigl|\ln x - 1\bigr| = \ln|t| + C\,, \qquad \bigl(\text{substituce} \quad y = \ln x - 1\bigr)\,,$$

kde C je libovolná konstanta. Protože $x \in (0, \mathrm{e})$ a $t > 0$, plyne z tohoto vztahu ($c = \mathrm{e}^C$)

$$1 - \ln x = ct\,, \quad \text{tj.} \quad x(t) = \mathrm{e}^{1-ct}\,.$$

Z počáteční podmínky $x(1) = 1$ plyne z rovnice $1 - \ln x = ct$, že $c = 1$, a tedy řešení dané Cauchyovy úlohy je

$$x(t) = \mathrm{e}^{1-t}\,, \quad t > 0\,.$$

Příklad 1.3.r. Najděte řešení diferenciální rovnice

$$x' = \frac{2\sin x}{t(t-2)}\,. \tag{5}$$

Řešení: Jedná se o diferenciální rovnici se separovanými proměnnými, kde $f(t) = \dfrac{2}{t(t-2)}$ a $g(x) = \sin x$.
Funkce $f(t)$ je spojitá na intervalech $\mathcal{I}_1 = (-\infty, 0)$, $\mathcal{I}_2 = (0, 2)$ a $\mathcal{I}_3 = (2, +\infty)$. Proto bude mít řešení definiční obor, který je podmnožinou jednoho z těchto intervalů.

Funkce $g(x) = \sin x$ je spojitá v $\mathbb{R}$ a je rovna nule v bodech $x_k = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Proto má rovnice (5) konstantní řešení $x_k(t) = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Protože derivace $g'(x) = \cos x$ je omezená, jsou tato řešení jediná řešení, pro která je $x(t) = k\pi$.

Další řešení dostaneme standardním způsobem:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2\sin x}{t(t-2)} \implies \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t(t-2)} = \int \Bigl(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t}\Bigr)\,\mathrm{d}t = \ln\Bigl|\frac{t-2}{t}\Bigr| + \widehat{c},$$

kde $\widehat{c}$ je libovolná konstanta.
Pro výpočet prvního integrálu lze použít například substituci

$$y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\,, \qquad \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,.$$

Pak je totiž

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{1}{2}x\,\cos\frac{1}{2}x} = \int \frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{1}{2}x} =$$
$$= \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{1}{2}x} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln|y| = \ln\Bigl|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Bigr|.$$

Tedy pro nekonstantní řešení $x = x(t)$ diferenciální rovnice (5) platí

$$\ln\Bigl|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Bigr| = \ln\Bigl|\frac{t-2}{t}\Bigr| + \widehat{c}, \quad \text{neboli} \quad \Bigl|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Bigr| = \mathrm{e}^{\widehat{c}}\Bigl|\frac{t-2}{t}\Bigr|\,.$$

Protože $x(t) \in \big(k\pi, (k+1)\pi\big)$ nemění funkce $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x$ znaménko a můžeme vynechat absolutní hodnotu. Protože je definiční obor řešení podmnožina jednoho z intervalů $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ nebo $\mathcal{I}_3$, nemění znaménko ani funkce $\dfrac{t-2}{t}$ a můžeme absolutní hodnotu vynechat i na pravé straně. Jestliže ještě zavedeme konstantu $c = \mathrm{e}^{\widehat{c}}$, platí pro řešení

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = c\,\frac{t-2}{t} \implies \tfrac{1}{2}\,x = \operatorname{arctg}\Big(c\,\frac{t-2}{t}\Big) + k\pi \implies x(t) = 2\operatorname{arctg}\Big(c\,\frac{t-2}{t}\Big) + 2k\pi\,,$$

kde $k \in \mathbb{Z}$ a $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

Příklad 1.4.r. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x' + tx^2 = t\,, \quad x(0) = 0\,. \tag{6}$$

ŘEŠENÍ: Jestliže diferenciální rovnice (6) zapíšeme ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = t\big(1 - x^2\big)\,,$$

vidíme, že se jedná o diferenciální rovnici se separovanými proměnnými, kde $f(t) = t$ a $g(x) = 1 - x^2$.

Protože rovnice $g(x) = 1 - x^2 = 0$ má řešení $x = \pm 1$, dostaneme dvě konstantní řešení $x(t) = \pm 1$. A protože derivace funkce $g(x)$, $\big(1 - x^2\big)' = -2x$, je v okolí těchto bodů omezená, jsou konstantní řešení $x = \pm 1$ jediná řešení, pro která je $x(t_0) = \pm 1$. Z počáteční podmínky $x(0) = 0 \in (-1, 1)$ pak plyne, že řešení diferenciální rovnice (6) leží v intervalu $(-1, 1)$. Na nezávisle proměnnou t neplyne z diferenciální rovnice žádné omezení.

Standardní způsobem dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2} = \int t\,\mathrm{d}t + C\,,$$

kde C je libovolná konstanta. Integrál na levé straně najdeme pomocí rozkladu na parciální zlomky a dostaneme

$$\frac{1}{2}\,\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \frac{t^2}{2} + C\,.$$

Protože je $x \in (-1, 1)$ plyne z toho

$$\frac{1+x}{1-x} = c\mathrm{e}^{t^2}\,, \quad \text{kde} \quad c = \mathrm{e}^{2C}\,.$$

Počáteční podmínka $x(0) = 0$ dává $c = 1$, a tedy řešení Cauchyovy úlohy (6) je

$$x(t) = \frac{\mathrm{e}^{t^2} - 1}{\mathrm{e}^{t^2} + 1}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 1.5.r. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x' + tx^2 = t\,, \quad x(0) = 1\,. \tag{7}$$

Řešení: Jestliže diferenciální rovnice (7) zapíšeme ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = t\big(1 - x^2\big)\,,$$

vidíme, že se jedná o diferenciální rovnici se separovanými proměnnými, kde $f(t) = t$ a $g(x) = 1 - x^2$. Protože $g(x_0) = g(1) = 0$, má Cauchyova úloha (7) řešení $x(t) = 1$. A protože je $g'(x) = -2x$ v okolí bodu $x = 1$ omezená, je to jediné řešení.

Příklad 1.6.r. Najděte maximální řešení Chauchyovy úlohy

$$x' = \sqrt{1 - x^2}\,, \qquad x(0) = 0\,. \tag{8}$$

Řešení. Protože pro funkci $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ je $g(x_0) = g(0) = 1$, existuje v okolí bodu $t = 0$ jediné řešení diferenciální rovnice (8), pro které je $x(0) = 0$. Implicitní tvar rohoto řešení lze najít například pomocí určitých integrálů

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \int_0^t \mathrm{d}\tau\,, \quad \text{tj.} \quad \arcsin x = t\,.$$

Z toho plyne, že pro $-\frac{1}{2}\,\pi \le t \le \frac{1}{2}\,\pi$, má Cauchyova úloha jediné řešení $x(t) = \sin t$.
Ale v bodech $t_\pm = \pm\frac{1}{2}\,\pi$ je $x_\pm = \pm 1$. Pro tyto hodnoty x je $g(x_\pm) = 0$. Proto mohou těmito body procházet ještě konstantní řešení $x(t) = 1$ pro $t \ge \frac{1}{2}\,\pi$ a $x(t) = -1$ pro $t \le -1$ a řešení $x(t) = \sin t$ lze pomocí těchto řešení prodloužit. Tím dostaneme maximální řešení Cauchyovy úlohy (8)

$$x(t) = \begin{cases} -1 & \text{pro} \quad t \le -1\,, \\ \sin t & \text{pro} \quad -1 \le t \le 1\,, \\ 1 & \text{pro} \quad t \ge 1\,. \end{cases}$$

Příklad 1.7.r. Najděte všechna maximální řešení Cauchyovy úlohy

$$x' = 3x^{2/3}\,, \quad x(0) = 0\,. \tag{9}$$

Řešení: Jedná se o diferenciální rovnici se separovanými proměnnými, kde $f(t) = 1$ a $g(x) = 3x^{2/3}$. Tyto funkce jsou spojité na celém $\mathbb{R}$ a z rovnice $g(x) = 0$ plyne $x = 0$. Jedno řešení dané rovnice tedy je $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, a protože toto řešení vyhovuje počáteční podmínce, je řešení Cauchyovy úlohy (9).
Ale protože funkce $g'(x) = 2x^{-1/3}$ není omezená v okolí bodu $x = 0$, může existovat v okolí bodu $(0, 0)$ víc řešení. Ta dostaneme standardním způsobem:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3x^{2/3} \implies \tfrac{1}{3}\int x^{-2/3}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}t + c \implies x^{1/3} = t + c \implies x = (t + c)^3\,,$$

kde c je libovolná konstanta. Z počáteční podmínky plyne $c = 0$, a tedy v okolí bodu $(0, 0)$ je řešení také funkce $x(t) = t^3$, $t \in \mathbb{R}$.
Situace ale není tak jednoduchá. Jestliže uvažujeme řešení $x(t) = 0$ pro $t \in \langle t_-, t_+\rangle$, kde $t_- \le 0 \le t_+$, dostaneme se do bodů $(t_-, 0)$ a $(t_+, 0)$. Jestliže chceme tato řešení prodloužit musíme například v okolí bodu $(t_+, 0)$ řešit Cauchyovu úlohu

$$x' = 3x^{2/3}\,, \quad x(t_+) = 0\,.$$

Stejně jako dříve dostaneme dvě řešení $x(t) = 0$ pro $t > t_+$ a $x(t) = (t - t_+)^3$. Proto je pro každé $t_+ \ge 0$ řešením také funkce $x(t) = 0$ pro $t \in \langle t_-, t_+\rangle$ a $x(t) = (t - t_+)^3$ pro $t \ge t_+$. Podobně můžeme prodlužovat nulové řešení pro $t \le t_0 \le 0$. Když tyto úvahy shrneme, zjistíme, že všechna maximální řešení Cauchyovy úlohy (9) jsou

$$x_{(t_-, t_+)}(t) = \begin{cases} (t - t_-)^3 & \text{pro} \quad t \le t_- \le 0\,, \\ 0 & \text{pro} \quad t_- \le t \le t_+\,, \\ (t - t_+)^3 & \text{pro} \quad t \ge t_+ \ge 0\,. \end{cases}$$

2. Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu je diferenciální rovnice

$$x' + f(t)x = g(t)\,, \tag{10}$$

kde $f(t)$ a $g(t)$ jsou dané spojité funkce na intervalu $\mathcal{I} = (a, b)$.

Homogenní a nehomogenní rovnice

Diferenciální rovnice (10) se nazývá lineární, protože zobrazení $L(x) = x' + f(t)x$, kde $x(t)$ je funkce, která má na intervalu derivaci je lineární zobrazení v tom smyslu, že pro každé diferencovatelné funkce $x_1(t)$ a $x_2(t)$ a konstanty c_1 a c_2 platí

$$L(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1L(x_1) + c_2L(x_2)\,.$$

Obecné řešení $x(t)$ diferenciální rovnice (10) lze zapsat ve tvaru

$$x(t) = x_H(t) + x_N(t)\,,$$

kde $x_H(t)$ je obecné řešení homogenní rovnice

$$x' + f(t)x = 0 \tag{11}$$

a $x_N(t)$ je jedno řešení nehomogenní rovnice (10).

Řešení homogenní rovnice

Množina všech řešení homogenní rovnice (11) tvoří vektorový prostor $\mathcal{V}_H$, který má dimenzi jedna. Proto stačí najít jedno nenulové řešení homogenní rovnice $x_1(t)$ a její obecné řešení pak je

$$x_H(t) = cx_1(t)\,, \tag{12}$$

kde c je libovolné reálné číslo.
Homogenní diferenciální rovnice (11) je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými. Proto lze její řešení najít obvykým postupem:

$$x' + f(t)x = 0 \implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -f(t)x \implies \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\int f(t)\,\mathrm{d}t \implies \ln x = -\int f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

a v (12) stačí položit

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{-F(t)}\,, \quad \text{kde} \quad F(t) = \int f(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{13}$$

Řešení nehomogenní rovnice

Jestliže je $x_1(t)$ nenulové řešení homogenní rovnice (11), hledáme řešení nehomogenní rovnice (10) ve tvaru

$$x(t) = C(t)x_1(t)\,, \tag{14}$$

kde $C(t)$ je neznámá funkce proměnné t. Protože $x' = C'x_1 + Cx_1'$ dostaneme po dosazení do (10)

$$C'x_1 + Cx_1' + fCx_1 = g\,, \quad \text{tj.} \quad C'x_1 + C\big(x_1' + fx_1\big) = g\,.$$

A protože je x_1 řešení homogenní rovnice, tj. $x_1' + fx_1 = 0$, splňuje funkce $C(t)$ rovnice

$$C'x_1 = g\,, \quad \text{neboli} \quad C'(t) = \frac{g(t)}{x_1(t)}\,, \quad \text{neboli} \quad C(t) = \int \frac{g(t)}{x_1(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Jedno řešení nehomogenní rovnice $x_N(t)$ dostaneme tak, že tuto funkci $C(t)$ dosadíme do (14). Uvedená metoda řešení nehomogenní rovnice se nazývá metoda variace konstanty.

<u>Princip superpozice</u>

Jestliže jsou $x_1(t)$, resp. $x_2(t)$, řešení diferenciálních rovnic

$$x_1' + f(t)x_1 = g_1(t)\,, \quad \text{resp.} \quad x_2' + f(t)x_2 = g_2(t)\,,$$

a c_1, c_2 reálná čísla, je $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ řešení diferenciální rovnice

$$x' + f(t)x = c_1g_1(t) + c_2g_2(t)\,.$$

Příklad 2.1.r. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$x' = \frac{2x}{t^2-1} \tag{15}$$

a pomocí něj vyřešte Cauchyovy úlohy pro tuto rovnici pro: **a.** $x(\frac{1}{2}) = 1$; **b.** $x(2) = 3$.

Řešení: Abycom našli obecné řešení drenciální rovnici (15), stačí najít její jedno nenulové řešení. Protože se jedná rovnici se separovanými proměnnými, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2x}{t^2-1} \implies \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1} \implies \int\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1} = \int\Big(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$\ln|x| = \ln\Big|\frac{t-1}{t+1}\Big| \implies x_1 = \frac{t-1}{t+1}\,.$$

Obecné řešení diferenciální rovnice (15) tedy je

$$x(t) = c\,\frac{t-1}{t+1}\,, \tag{16}$$

kde c je libovolná konstanta.

Poznámka. Všimněte si toho, že definiční obor obecného řešení je $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ a že platí $x(1) = 0$. Tyto, v jistém smyslu zvláštní body, jsou body nespojitosti funkce $f(t) = \dfrac{2}{t^2-1}$. Jistější je tyto body z úvah vyloučit a uvažovat obecné řešení diferenciální rovnice na jednom z intervalů $\mathcal{I}_- = (-\infty,-1)$, $\mathcal{I}_0 = (-1,1)$ nebo $\mathcal{I}_+ = (1,+\infty)$.

Abychom našli řešení Cauchyovy úlohy, musíme ještě určit hodnotu konstanty c.

Protože v případě **a.** leží bod $t_0 = \frac{1}{2}$ v intervalu $\mathcal{I}_0 = (-1,1)$ budeme hledat řešení na tomto intervalu. Po dosazení $t = \frac{1}{2}$ a $x = 1$ do obecného řešení (16) dostaneme $1 = c\cdot(-\frac{1}{3})$, tj. $c = -3$. Tedy řešení Cauchyovy úlohy je

$$x = \frac{3(1-t)}{1+t}\,, \quad t \in (-1,1)\,.$$

V případě **b.** je $t_0 = 2 \in \mathcal{I}_+ = (1,+\infty)$. Po dosazení dostaneme $3 = \frac{1}{3}\,c$, tj. $c = 9$, a řešení dané Cauchyovy úlohy je

$$x = \frac{9(t-1)}{t+1}\,, \quad t \in (1,+\infty)\,.$$

Příklad 2.2.r. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $x' + 2tx = t^3$.

Řešení: Jedná se o nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu. Protože jsou funkce $f(t) = 2t$ a $g(t) = t^3$ spojité v celém $\mathbb{R}$, bude obecné řešení $x(t)$ této rovnice také definováno v $\mathbb{R}$.
Protože se jedná o lineární rovnici, budeme její řešení hledat ve tvaru $x(t) = x_H(t) + x_N(t)$, kde $x_H(t)$ je obecné řešení homogenní rovnice a $x_N(t)$ je jedno řešení nehomogenní rovnice. Abychom našli obecné řešení příslušné homogenní rovnice $x' + 2tx = 0$, stačí najít její jedno nenulové řešení. Standardním postupem dostaneme

$$x' = -2tx \implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2tx \implies \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\int 2t\,\mathrm{d}t \implies x_1(t) = \mathrm{e}^{-t^2}.$$

Tedy obecné řešení homogenní rovnice je

$$x_H(t) = c\mathrm{e}^{-t^2},$$

kde c je libovolná konstanta.
Řešení nehomogenní diferenciální rovnice budeme hledat metodou variace konstant, tj. položíme $x_N(t) = C(t)\,\mathrm{e}^{-t^2}$, kde $C(t)$ je neznámá funkce. Protože

$$x_N' = C'\mathrm{e}^{-t^2} - 2tC\mathrm{e}^{-t^2},$$

dostaneme po dosazení do původní rovnice pro funkci $C(t)$ vztah

$$C'\mathrm{e}^{-t^2} = t^3 \implies C' = t^3\mathrm{e}^{t^2} \implies C = \int t^3\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\,(t^2-1)\,\mathrm{e}^{t^2},$$

kde jsme integrál našli substitucí $t^2 = y$ a pak integrací per partes. Jedno řešení nehomogenní rovnice tedy je

$$x_N = C(t)\,\mathrm{e}^{-t^2} = \tfrac{1}{2}\,(t^2-1).$$

Obecné řešení dané diferenciální rovnice proto je

$$x(t) = x_H(t) + x_N(t) = c\mathrm{e}^{-t^2} + \tfrac{1}{2}\,(t^2-1),$$

kde c je libovolná konstanta.

Příklad 2.3.r. Nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$x' + \frac{x}{t} = \frac{1}{t^2-1}, \tag{17}$$

které splňuje počáteční podmínku: **a.** $x(\frac{1}{2}) = 1$; **b.** $x(2) = 4$.

Řešení: Nejprve nalezneme obecné řešení diferenciální rovnice (17). To se skládá z obecného řešení příslušné homogenní rovnice a partikulárního řešení nehomogenní rovnice. Příslušná homogenní rovnice je

$$x' + \frac{x}{t} = 0.$$

Abychom našli její obecné řešení stačí najít její jedno nenulové řešení. Pro to dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{x}{t} \implies \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{\mathrm{d}t}{t} \implies \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} \implies \ln|x| = -\ln|t|.$$

Proto lze zvolit jedno nenulové řešení homogenní rovnice $x_1 = \dfrac{1}{t}$. Obecné řešení homogenní rovnice pak je

$$x_H(t) = \frac{c}{t}\,, \tag{18}$$

kde c je libovolná konstanta.
Řešení nehomogenní rovnice budeme hledat variací konstanty, tj. ve tvaru

$$x(t) = \frac{C(t)}{t}\,, \tag{19}$$

kde $C(t)$ je, na rozdíl od (18), neznámá funkce.
Po dosazení do (17) dostaneme pro funkci $C(t)$ rovnici

$$\frac{C'}{t} = \frac{1}{t^2-1} \implies C' = \frac{t}{t^2-1} \implies C(t) = \int \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2-1} \implies C(t) = \tfrac{1}{2}\ln\left|t^2-1\right|,$$

kde jsme použili substiruci $y = t^2 - 1$.
Tedy partikulární řešení nehomogenní rovnice je podle (19)

$$x_N(t) = \frac{\ln\left|t^2-1\right|}{2t}$$

a pro obecné řešení nehomogenní rovnice dostaneme

$$x(t) = x_H(t) + x_N(t) = \frac{c}{t} + \frac{\ln\left|t^2-1\right|}{2t}\,, \tag{20}$$

kde c je libovolná konstanta.
Toto řešení je definováno na jednom z intervalů $\mathcal{I}_1 = (-\infty,-1)$, $\mathcal{I}_2 = (-1,0)$, $\mathcal{I}_3 = (0,1)$ nebo $\mathcal{I}_4 = (1,+\infty)$, ve kterých jsou spojité funkce $f(t) = -\dfrac{1}{t}$ a $g(t) = \dfrac{1}{t^2-1}$.
Abychom vyřešili Cauchyovu úlohu, musíme ještě najít hodnotu konstanty c.

V případě **a.** je počáteční podmínka zadána v bodě $t_0 = \frac{1}{2} \in (0,1)$. Proto budeme hledat řešení na tomto intervalu. Tam je $\left|t^2-1\right| = 1-t^2$. Po dosazení počáteční podmínky do (20) dostaneme pro c rovnici

$$1 = 2c + \ln\tfrac{3}{4} \implies c = \frac{1-\ln\frac{3}{4}}{2}\,.$$

Tedy řešení Cauchyovy úlohy je v prvním případě

$$x(t) = \frac{1-\ln\frac{3}{4}}{2t} + \frac{\ln(1-t^2)}{2t}\,, \quad t \in (0,1)\,.$$

V případě **b.** je počáteční podmínka zadána v bodě $t_0 = 2 \in (1,+\infty)$. Proto budeme hledat řešení na tomto intervalu, kde $\left|t^2-1\right| = t^2-1$. Po dosazení počátečních podmínky do obecného řešení (20) dostaneme

$$4 = \tfrac{1}{2}\,c + \tfrac{1}{4}\ln 3 \implies c = 8 - \ln\sqrt{3}\,.$$

Tedy řešení naší Cauchyovy úlohy je

$$x(t) = \frac{8 - \ln\sqrt{3}}{t} + \frac{\ln(t^2-1)}{2t}, \quad t \in (1, +\infty).$$

Příklad 2.4.r. Najděte řešení diferenciální rovnice $x' = x \operatorname{tg} t + t$, které splňuje podmínku $x\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 1$.

Řešení: Jedná se o nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu. Protože je funkce $f(t) = \operatorname{tg} t$ definovaná a spojitá na intervalech $\mathcal{I}_k = \left(-\frac{1}{2}\pi + k\pi, \frac{1}{2}\pi + k\pi\right)$, kde $k \in \mathbb{Z}$, a funkce $g(t) = t$ spojité v celém $\mathbb{R}$, bude obecné řešení $x(t)$ této rovnice definováno v jednom z intervalů $\mathcal{I}_k$. Protože počáteční podmínka je dána v bodě $t_0 = \frac{3}{4}\pi \in \mathcal{I}_1 = \left(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, bude maximální řešení $x(t)$ dané úlohy definováno v intervalu $\mathcal{I}_1$.
Nejprve nalezneme obecné řešení dané diferenciální rovnice. Protože se jedná o lineární rovnici, budeme její řešení hledat ve tvaru $x(t) = x_H(t) + x_N(t)$, kde $x_H(t)$ je obecné řešení homogenní rovnice a $x_N(t)$ je jedno řešení nehomogenní rovnice.
Abychom našli obecné řešení příslušné homogenní rovnice $x' = x \operatorname{tg} t$, stačí najít její jedno nenulové řešení. Standardním postupem dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x \operatorname{tg} t \implies \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \frac{\sin t}{\cos t}\,\mathrm{d}t \implies \ln|x| = -\ln|\cos t| \implies x_1(t) = \frac{1}{\cos t}.$$

Tedy obecné řešení příslušné homogenní rovnice je

$$x_H(t) = c x_1(t) = \frac{c}{\cos t},$$

kde c je libovolná konstanta.

Řešení nehomogenní diferenciální rovnice budeme hledat metodou variace konstanty, tj. ve tvaru $x_N(t) = C(t)x_1(t) = \dfrac{C(t)}{\cos t}$, kde $C(t)$ je neznámá funkce. Po dosazení do původní diferenciální rovnice dostaneme pro funkci $C(t)$ vztah

$$\frac{C'}{\cos t} = t \implies C' = t\cos t \implies C(t) = \int t\cos t\,\mathrm{d}t = t\sin t + \cos t,$$

kde jsme integrál našli integrací per partes. Takto jsme našli jedno řešení nehomogenní rovnice

$$x_N(t) = \frac{C(t)}{\cos t} = t \operatorname{tg} t + 1.$$

Obecné řešení dané diferenciální rovnice tedy je

$$x(t) = x_H(t) + x_N(t) = \frac{c}{\cos t} + t \operatorname{tg} t + 1,$$

kde c je libovolná konstanta.
Abychom našli řešení dané Cauchyovy úlohy musíme ještě najít konstantu c tak, aby platilo $x\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 1$. Po dosazení do obecného řešené dostaneme

$$1 = -c\sqrt{2} - \tfrac{3}{4}\pi + 1, \quad \text{tj.} \quad c = -\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi.$$

Řešení dané úlohy tedy je funkce

$$x(t) = 1 + t \operatorname{tg} t - \frac{3\sqrt{2}\,\pi}{8\cos t}\,, \quad \text{kde} \quad t \in \left(\tfrac{1}{2}\,\pi, \tfrac{3}{2}\,\pi\right).$$

Příklad 2.5.r. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x' = \frac{tx}{t^2-1} + \arcsin t\,, \qquad x(0) = 0\,. \tag{21}$$

Řešení. Protože společný definiční obof funkcí $f(t) = \dfrac{t}{t^2-1}$ a $g(t) = \arcsin t$ je interval $\mathcal{I} = (-1, 1)$, bude definiční obor řešení $x(t)$ také interval $\mathcal{I}$.
Nejprve najdeme obecné řešení homogenní rovnice, tj. diferenciální rovnice

$$x' = \frac{tx}{t^2-1}\,, \quad \text{neboli} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{tx}{t^2-1}\,.$$

K tomu stačí najít její jedno nenulové řešení. Standardním postupem dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{tx}{t^2-1} \implies \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2-1} \implies \ln x = \tfrac{1}{2}\ln|t^2-1| \implies x_1(t) = \sqrt{1-t^2}\,,$$

protože $-1 < t < 1$. Z toho plyne, že obecné řešení homogenní rovnice je

$$x_H(t) = c\sqrt{1-t^2}\,,$$

kde c je libovolné reálné číslo.
Řešení nehomogenní rovnice budeme hledat metodou variace konstanty. Položíme

$$x(t) = C(t)x_1(t) = C(t)\sqrt{1-t^2}\,,$$

kde $C(t)$ je neznámá funkce, Po dosazení do diferenciální rovnice (21) dostaneme

$$C'\sqrt{1-t^2} - \frac{Ct}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{Ct\sqrt{1-t^2}}{t^2-1} + \arcsin t \implies C'\sqrt{1-t^2} = \arcsin t \implies$$
$$\implies C(t) = \int \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} = \tfrac{1}{2}\arcsin^2 t\,,$$

kde jsme při výpočtu posledního integrálu použili substituci $y = \arcsin t$. Tedy jedno řešení nehomogenní rovnice (21) je

$$x_N(t) = \frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\arcsin^2 t\,.$$

Proto je její obecné řešení

$$x(t) = x_H(t) + x_N(t) = c\sqrt{1-t^2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\arcsin^2 t\,,$$

kde c je libovolné reálné číslo. Z počíteční podmínky plyne, že $c = 0$, a tedy řešení Cauchyovy úlohy (21) je

$$x(t) = \tfrac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\arcsin^2 t\,.$$

3. Lineární diferenciální rovnice prvního řádu s konstentními koeficienty

V této části se budeme zabývat diferenciálními rovnicemi prvního řádu tvaru

$$x' + ax = f(t)\,, \tag{22}$$

kde a je reálné číslo a funkce $f(t)$ je lineární kombinace funkcí

$$f_{\mathrm{r}}(t) = \mathrm{e}^{\mu t} P_n(t)\,, \qquad f_{\mathrm{c}}(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\big(P_{n_1}(t)\cos\omega t + P_{n_2}(t)\sin\omega t\big)\,, \tag{23}$$

kde μ, ρ a ω jsou reálná čísla a $P_n(t)$ je polynom stupně n.
Diferenciální rovnice tohoto typu se nazývají diferenciální rovnice s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou a jejich řešení lze najít bez použití integrace. Stejná metoda se pak používá i pro podobné diferenciální rovnice vyššího řádu.

Pro takové rovnice lze najít jedno nenulové řešení homogenní rovnice $x' + ax = 0$ ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, kde λ je číslo. Po dosazení do homogenní rovnice dostaneme pro λ vztah

$$P(\lambda) = \lambda + a = 0\,, \quad \text{tj.} \quad \lambda = -a\,.$$

Polynom $P(\lambda)$ se nazývá charakteristický polynom a rovnice $P(\lambda) = 0$ charakteristická rovnice. Je zřejmé, že jedno nenulové řešení homogenní diferenciální rovnice je $x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, kde λ je řešení charakteristické rovnice.

ODHAD ŘEŠENÍ NEHOMOGENNÍ ROVNICE

Z principu superpozice plyne, že řešení nehomogenní rovnice stačí najít pro funkce $f_{\mathrm{r}}(t)$ a $f_{\mathrm{c}}(t)$ tvaru (23).

Diferenciální rovnice

$$x' + ax = \mathrm{e}^{\mu t} P_n(t)$$

kde a je reálné číslo a $P_n(t)$ je polynom stupně n má jedno řešení tvaru

$$x(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\mu t} Q_n(t) & \text{pro} \quad \mu \neq -a\,, \\ \mathrm{e}^{\mu t} Q_n(t)\cdot t & \text{pro} \quad \mu = -a\,, \end{cases}$$

kde $Q_n(t)$ je obecný polynom stupně n. Toto řešení lze souhrnně zapsat ve tvaru

$$x(t) = \mathrm{e}^{\mu t} Q_n(t)\cdot t^r\,,$$

kde r je násobnost kořene μ v charakteristickém polynomu $P(\lambda) = \lambda + a$, tj. $r = 0$ pro $P(\mu) = \mu + a \neq 0$ a $r = 1$ pro $P(\mu) = \mu + a = 0$.

Diferenciální rovnice

$$x' + ax = \mathrm{e}^{\rho t}\big(P_{n_1}(t)\cos\omega t + P_{n_2}(t)\sin\omega t\big)\,,$$

kde a je reálné číslo a $P_{n_1}(t)$, resp. $P_{n_2}(t)$, jsou polynomy stupně n_1 a n_2 má jedno řešení tvaru

$$x(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\big(R_n\cos\omega t + S_n(t)\sin\omega t\big)\,,$$

kde $R_n(t)$ a $S_n(t)$ jsou obecné polynomy stupně $n = \max(n_1, n_2)$.

Příklad 3.1.r. Najděte jedno řešení diferenciální rovnice

$$x' + 2x = 3\mathrm{e}^t + (2t-1)\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t} + \frac{4\mathrm{e}^{-2t}}{1-2t}\,. \tag{24}$$

Řešení: Jestliže napíšeme rovnici (24) ve tvaru

$$x' + 2x = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + f_4(t)\,,$$

kde

$$f_1(t) = 3\mathrm{e}^t\,, \quad f_2(t) = (2t-1)\mathrm{e}^{2t}\,, \quad f_3(t) = -\mathrm{e}^{-2t} \quad \text{a} \quad f_4(t) = \frac{4\mathrm{e}^{-2t}}{1-2t}\,,$$

plyne z principu superpozice, že řešení diferenciální rovnice (24) lze zapsat ve tvaru $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t)$, kde $x_k(t)$ jsou řešením rovnic $x_k' + 2x_k = f_k(t)$.
Příslušná homogenní rovnice $x' + 2x = 0$ má konstantní koeficient. Proto lze její řešení najít ve tvaru $x_H(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, kde λ je konstanta. Pod dosazení dostaneme vztah $\lambda + 2 = 0$, tj. $\lambda = -2$. Tedy obecné řešení homogenní rovnice je $x_H(t) = c\mathrm{e}^{-2t}$, kde c je libovolná konstanta.

Řešení nehomogenních rovnic $x_k(t)$ lze najít jako vždy metodou variace konstanty. Ale protože má homogenní rovnice konstantní koeficient a pro $k = 1$, 2 a 3 mají pravé strany rovnice $x_k' + 2x_k = f_k$ speciální tvar, lze tato řešení najít odhadem.

Pravá strana rovnice $f_1(t)$ je součin exponenciály e^t a konstanty, tj. polynomu stupně nula. Protože exponenciála e^t není řešení homogenní rovnice, budeme hledat řešení příslušné nehomogenní rovnice $x_1' + 2x_1 = 3\mathrm{e}^t$ ve tvaru $x_1(t) = a\,\mathrm{e}^t$, kde a je zatím neznámá konstanta. Po dosazení do diferenciální rovnice dostaneme $3a\mathrm{e}^t = 3\mathrm{e}^t$, a tedy $a = 1$. Tedy řešení diferenciální rovnice pro pravou stranu $f_1(t) = 3\mathrm{e}^t$ je $x_1(t) = \mathrm{e}^t$.

Pravá strana rovnice $f_2(t)$ je součin exponenciály e^{2t} a polynomu stupně jedna. Protože exponenciála e^{2t} není řešení homogenní rovnice, budeme hledat řešení příslušné nehomogenní rovnice $x_2' + 2x_2 = (2t-1)\mathrm{e}^{2t}$ ve tvaru $x_2(t) = (at+b)\,\mathrm{e}^{2t}$, kde a a b jsou zatím neznámé konstanty. Po dosazení do diferenciální rovnice dostaneme

$$(4at + a + 4b)\mathrm{e}^{2t} = (2t-1)\mathrm{e}^{2t}\,.$$

Aby tento vztah platil pro každé $t \in \mathbb{R}$, musí být

$$4a = 2\,, \quad a + 4b = -1\,, \quad \text{tj.} \quad a = \tfrac{1}{2}\,, \quad b = -\tfrac{3}{8}\,.$$

Řešení diferenciální rovnice pro pravou stranu $f_2(t)$ tedy je $x_2(t) = \frac{1}{8}\,(4t-3)\mathrm{e}^{2t}$.

Pravá strana rovnice $f_3(t)$ je součin exponenciály e^{-2t} a konstanty, tj. polynomu stupně nula. Protože exponenciála e^{-2t} je řešení homogenní rovnice, budeme hledat řešení příslušné nehomogenní rovnice $x_3' + 2x_3 = -\mathrm{e}^{-2t}$ ve tvaru $x_3(t) = a\,\mathrm{e}^{-2t}\cdot t$, kde a je zatím neznámá konstanta. Po dosazení do diferenciální rovnice dostaneme $a\mathrm{e}^{-2t} = -\mathrm{e}^{-2t}$, a tedy $a = -1$. Tedy řešení diferenciální rovnice pro pravou stranu $f_3(t) = -\mathrm{e}^{-2t}$ je $x_3(t) = -t\mathrm{e}^{-2t}$.

Protože pro funkci $f_4(t) = \dfrac{4\mathrm{e}^{-2t}}{1-2t}$ není pravá strana diferenciální rovnice $x_4' + 2x_4 = f_4(t)$ součin exponenciální funkce a polynomu, neumíme řešení odhadnout. Proto k řešení nehomogenní rovnice použijeme metodu variace konstanty. Protože obecné řešení homogenní rovnice je $x_H = c\mathrm{e}^{-2t}$, kde c je konstanta, budeme hledat řešení nehomogenní rovnice ve tvaru $x_4 = C(t)\mathrm{e}^{-2t}$, kde $C(t)$ je neznámá funkce. Po dosazení do rovnice, dostaneme pro funkci $C(t)$ rovnici

$$C' = \frac{4}{1-2t} \implies C = \int \frac{4\,\mathrm{d}t}{1-2t} = -2\ln|1-2t|\,.$$

Tedy jedno řešení diferenciální rovnice $x_4' + 2x_4 = f_4(t)$ je $x_4 = -2\mathrm{e}^{-2t} \ln|1-2t|$.

Takto jsme dostali jedno řešení diferenciální rovnice (24)

$$x(t) = \mathrm{e}^t + \tfrac{1}{8}\,(4t-3)\mathrm{e}^{2t} - t\mathrm{e}^{-2t} - 2\mathrm{e}^{-2t}\ln|1-2t|\,.$$

Příklad 3.2.r. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x' - 2x = (t+1)\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2t}\,, \qquad x(0) = 3\,. \tag{25}$$

Řešení. Jedná se o lineární nehomogenní diferenciální rovnic prvního řádu se speciální pravou stranou.

Jedno řešení homogenní rovnice $x' - 2x = 0$ lze najít ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, kde λ je reálné číslo, pro které platí $P(\lambda) = \lambda - 2 = 0$, tj. $\lambda = 2$. Tedy obecné řešení homogenní rovnice je

$$x_H(t) = c\mathrm{e}^{2t}\,,$$

kde c je libovolné reálné číslo.
Pravá strana diferenciální rovnice (24) je součet dvou funkcí, $f_1(t) = (t+1)\mathrm{e}^{-1}$ a $f_2(t) = \mathrm{e}^{2t}$, a proto lze najít řešení nehomogenní rovnice odhadem.

Protože funkce $f_1(t)$ je součin exponenciální funkce e^{-t} a polynomu stupně jedna a $P(-1) \neq 0$, budeme hledat řešení příslušné nehomogenní rovnice ve tvaru

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{-t}Q_1(t) = \mathrm{e}^{-t}(at+b)\,,$$

kde a a b jsou reálná čísla. Protože $x_1'(t) = \mathrm{e}^{-t}(-at-b+a)$ dostaneme po dosazení vztah

$$\mathrm{e}^{-t}(-at-b+a) - 2\mathrm{e}^{-t}(at+b) = \mathrm{e}^{-t}(t+1)\,, \quad \text{neboli} \quad -3at + (a-3b) = t+1\,.$$

Tedy musí být $-3a = 1$ a $a - 3b = 1$, tj. $a = -\frac{1}{3}$, $b = -\frac{4}{9}$. Takto jsme dostali

$$x_1(t) = -\tfrac{1}{9}\,\mathrm{e}^{-t}(3t+4)\,.$$

Protože funkce $f_2(t)$ je součin exponenciální funkce e^{2t} a polynomu stupně nula a $P(2) = 0$, budeme hledat řešení příslušné nehomogenní rovnice ve tvaru

$$x_2(t) = \mathrm{e}^{2t}Q_0(t)\cdot t = at\mathrm{e}^{2t}\,.$$

Protože $x_2'(t) = a\mathrm{e}^{2t}(2t+1)$, dostaneme po dosazení

$$a\mathrm{e}^{2t}(2t+1) - 2at\mathrm{e}^{2t} = \mathrm{e}^{2t}\,, \quad \text{neboli} \quad a = 1\,.$$

Takto jsme zjistili řešení druhé části nehomogenní rovnice $x_2(t) = t\mathrm{e}^{2t}$.
Jedno řešení celé nehomogenní rovnice tedy je

$$x_N(t) = x_1(t) + x_2(t) = -\tfrac{1}{9}\,\mathrm{e}^{-t}(3t+4) + t\mathrm{e}^{2t},$$

a pro obecné řešení diferenciální rovnice (25) dostaneme

$$x(t) = x_H(t) + x_N(t) = c\mathrm{e}^{2t} - \tfrac{1}{9}\,\mathrm{e}^{-t}(3t+4) + t\mathrm{e}^{2t},$$

kde c je libovolné reálné číslo.
Počáteční podmínka vede ke vztahu

$$3 = c - \tfrac{4}{9}\,, \quad \text{tj.} \quad c = \tfrac{31}{9}\,.$$

Tedy řešení Cauchyovy úlohy (25 je

$$x(t) = \tfrac{31}{9}\,\mathrm{e}^{2t} - \tfrac{1}{9}\,\mathrm{e}^{-t}(3t+4) + t\mathrm{e}^{2t}.$$

Příklad 3.3.r. Najděte řešení diferenciální rovnice

$$x' + 3x = \mathrm{e}^{-t}\cos 2t\,, \tag{26}$$

které splňuje podmínku $x(0) = 1$.

Řešení. Diferenciální rovnice (26) je lineární nehomogenní diferenciální rovnice prvního řádu s konstantním koeficientem a speiální pravou stranou.
Jedno řešení homogenní diferenciální rovnice $x'+3x = 0$ lze hledat ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, kde λ je reálné číslo, pro které platí $P(\lambda) = \lambda + 3 = 0$, tj. $\lambda = -3$. Obecné řešení homogenní rovnice proto je

$$x_H(t) = c\mathrm{e}^{-3t},$$

kde c je libovolné reálné číslo.
Protože pravá strana diferenciální rovnice (26) má speciální tvar, můžeme najít jedno její řešení odhadem. Protože $f(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos 2t$, má odhad řešení nehomogenní rovnice tvar

$$x(t) = \mathrm{e}^{-t}\big(a\cos 2t + b\sin 2t\big)\,,$$

kde a a b jsou raálná čísla. Po dosazení do rovnice (26) a vykrácení e^{-t} dostaneme rovnost

$$\begin{aligned}-a\cos 2t - b\sin 2t - 2a\sin 2t + 2b\cos 2t + 3a\cos 2t + 3b\sin 2t =\\ = (2a+2b)\cos 2t + (-2a+2b)\sin 2t = \cos 2t\,.\end{aligned}$$

Tedy musí platit

$$2a + 2b = 1\,, \quad -2a + 2b = 0\,, \quad \text{tj.} \quad a = b = \tfrac{1}{4}\,.$$

Takto jsme dostali jedno řešení nehomogenní rovnice

$$x_N(t) = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-t}(\cos 2t + \sin 2t)\,.$$

Pomocí řešení homogenní a nehomogenní rovnice najdeme obecné řešení diferenciální rovnice (26)

$$x(t) = x_H(t) + x_N(t) = c\mathrm{e}^{-3t} + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-t}(\cos 2t + \sin 2t)\,,$$

kde c je libovolné reálné číslo.
Z počáteční podmínky plyne $1 = c + \frac{1}{4}$, neboli $c = \frac{3}{4}$. Hledané řešení tedy je

$$x(t) = \tfrac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-t} + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-t}(\cos 2t + \sin 2t)\,.$$

Příklad 3.4.r. Najděte jedno řešení diferenciální rovnice

$$x' - x = (3t-2)\mathrm{e}^{-t}\cos 3t + 4\mathrm{e}^{-t}\sin 3t\,. \tag{27}$$

Řešení: Obecné řešení homogenní rovnice je $x_H = c\mathrm{e}^t$, kde c je konstanta.
Pokud budeme hledat řešení nehomogenní rovnice metodou variace konstanty, tj. ve tvaru $x = C(t)\mathrm{e}^t$, kde $C(t)$ je neznámá funkce, dostaneme pro ni rovnici

$$C' = (3t-2)\mathrm{e}^{-2t}\cos 3t + 4\mathrm{e}^{-2t}\sin 3t \Longrightarrow C(t) = \int \Big((3t-2)\mathrm{e}^{-2t}\cos 3t + 4\mathrm{e}^{-2t}\sin 3t \Big)\,\mathrm{d}t\,.$$

Poslední integrál se přímo počítá poměrně složitě. Proto je jednodušší pokusit se najít jedno řešení nehomogenní rovnice (27) odhadem.
V našem případě má odhad řešení nehomogenní rovnice tvar

$$x(t) = \mathrm{e}^{-t}\big((at+b)\cos 3t + (ct+d)\sin 3t\big)\,,$$

kde a, b, c a d jsou zatím neznámé konstanty.
Pro derivaci funkce $x(t)$ dostaneme[1]

$$\begin{aligned} x' = & -\mathrm{e}^{-t}\big((at+b)\cos 3t + (ct+d)\sin 3t\big) + \mathrm{e}^{-t}\big(a\cos 3t + c\sin 3t\big) + \\ & +\mathrm{e}^{-t}\big(-3(at+b)\sin 3t + 3(ct+d)\cos 3t\big)\,, \end{aligned}$$

a tedy

$$x' - x = \mathrm{e}^{-t}\Big(\big((-2a+3c)t + a - 2b + 3d\big)\cos 3t + \big(-(3a+2c)t - 3b + c - 2d\big)\sin 3t \Big)\,.$$

Aby byla funkce $x(t)$ řešením diferenciální rovnice (27), musíme zvolit konstanty a, b, c a d tak, aby platilo

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{-t}\Big(\big((-2a+3c)t + a - 2b + 3d\big)\cos 3t + \big(-(3a+2c)t - 3b + c - 2d\big)\sin 3t \Big) = \\ &\qquad = (3t-2)\mathrm{e}^{-t}\cos 3t + 4\mathrm{e}^{-t}\sin 3t\,, \end{aligned}$$

neboli

$$-2a + 3c = 3\,, \quad -3a - 2c = 0\,, \quad a - 2b + 3d = -2\,, \quad -3b + c - 2d = 4\,.$$

Tato soustava má řešení

$$a = -\tfrac{6}{13}\,, \quad c = \tfrac{9}{13}\,, \quad b = -\tfrac{89}{169}\,, \quad d = -\tfrac{146}{169}\,,$$

a tedy jedno řešení diferenci8ln9 rovnice (27) je

$$x(t) = \mathrm{e}^{-t}\Big(-\big(\tfrac{6}{13}\,t + \tfrac{89}{169}\big)\cos 3t + \big(\tfrac{9}{13}\,t - \tfrac{146}{139}\big)\sin 3t \Big).$$

Příklad 3.5.r. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x' + 2x = \begin{cases} \sin t\,, & t \in \langle \pi, 2\pi \rangle\,, \\ 0\,, & t \notin \langle \pi, 2\pi \rangle\,, \end{cases} \qquad x(0) = 0\,. \tag{28}$$

Řešení: Vztah (28) znamená, že na intervalech $\mathcal{I}_1 = (-\infty, \pi\rangle$ a $\mathcal{I}_3 = \langle 2\pi, +\infty)$ máme najít řešení diferenciální rovnice $x' + 2x = 0$ a na intervalu $\mathcal{I}_2 = \langle \pi, 2\pi \rangle$ máme řešit rovnici $x' + 2x = \sin t$.

[1] Při derivování je výhodné použít vztah $(f_1 f_2 f_3)' = f_1' f_2 f_3 + f_1 f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3'$.

Na intervalech $\mathcal{I}_1$ a $\mathcal{I}_3$ se jedná o homogenní rovnici, jejích obecná řešení jsou

$$x_1(t) = c_1 \mathrm{e}^{-2t}\,, \quad t \in \mathcal{I}_1\,, \qquad x_3(t) = c_3 \mathrm{e}^{-2t}\,, \quad t \in I_3\,,$$

kde c_1 a c_3 jsou libovolné konstanty.
Na intervalu $\mathcal{I}_2$ se jedná o nehomogenní rovnici $x' + 2x = \sin t$, která má obecné řešení

$$x_2(t) = c_2 \mathrm{e}^{-2t} + \tfrac{1}{5}\big(2\sin t - \cos t\big)\,, \quad t \in \mathcal{I}_2\,,$$

kde c_2 je také libovolná konstanta.

Abychom našli řešení dané Cauchyovy úlohy, musíme ještě najít hodnotu konstant c_1, c_2 a c_3. Protože je počáteční podmínka zadána v bodě $t_0 = 0 \in \mathcal{I}_1$, musí být konstanta $c_1 = 0$. Tedy na intervalu $\mathcal{I}_1 = (-\infty, \pi\rangle$ je řešení Cauchyovy úlohy $x(t) = 0$.
V bodě $t_1 = \pi$ je $x(\pi) = 0$. To je počáteční podmínka pro řešení na intervalu $\mathcal{I}_2 = \langle \pi, 2\pi\rangle$. Pak ale musí být

$$c_2 \mathrm{e}^{-2\pi} + \tfrac{1}{5} = 0 \implies c_2 = -\tfrac{1}{5}\,\mathrm{e}^{2\pi}$$

a řešení $x(t)$ dané Cauchyovy úlohy na intervalu $\mathcal{I}_2 = \langle \pi, 2\pi\rangle$ je

$$x(t) = -\tfrac{1}{5}\,\mathrm{e}^{2\pi-2t} + \tfrac{1}{5}\big(2\sin t - \cos t\big)\,, \quad t \in \mathcal{I}_2\,.$$

Z toho ale plyne, že $x(2\pi) = -\frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{-2\pi} - \frac{1}{5}$. Proto dostaneme na intervalu $\mathcal{I}_3 = \langle 2\pi, +\infty)$ počáteční podmínku $x_3(2\pi) = -\frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{-2\pi} - \frac{1}{5}$, ze které plyne

$$c_3 \mathrm{e}^{-4\pi} = -\tfrac{1}{4}\big(\mathrm{e}^{-2\pi} + 1\big)\,, \quad \text{tj.} \quad c_3 = -\tfrac{1}{5}\,\mathrm{e}^{2\pi}\big(1 + \mathrm{e}^{2\pi}\big)$$

Proto je na intervalu $\mathcal{I}_3$ řešení dané Cauchyovy úlohy

$$x(t) = -\tfrac{1}{5}\,\mathrm{e}^{2\pi-2t}\big(1 + \mathrm{e}^{2\pi}\big)\,, \quad t \in \mathcal{I}_3\,.$$

Celkově lze řešení $x(t)$ Cauchyovy úlohy (28) zapsat jako

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad t \in (-\infty, \pi\rangle\,, \\ -\frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{2\pi-2t} + \frac{1}{5}\big(2\sin t - \cos t\big) & \text{pro} \quad t \in \langle \pi, 2\pi\rangle\,, \\ -\frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{2\pi-2t}\big(1 + \mathrm{e}^{2\pi}\big) & \text{pro} \quad t \in \langle 2\pi, +\infty)\,. \end{cases}$$

Příklad 1. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' = -\dfrac{2tx^2}{t^2-1}\,, \quad x(0) = 1.$

$$\left[x(t) = \frac{1}{1 + \ln(1-t^2)}\,, \quad -1 < t < 1\right]$$

Příklad 2. Najděte řešení diferenciální rovnice $x' = -\dfrac{x^2+1}{tx}$, které splňuje počáteční podmínku $x(-1) = -2$.

$$\left[x(t) = \frac{\sqrt{5-t^2}}{t}\,, \quad -\sqrt{5} < t < 0\,.\right]$$

Příklad 3. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' - x^2 = 1\,, \quad x\big(\frac{5}{4}\pi\big) = 1.$

$$\left[x(t) = \operatorname{tg}(t - \pi)\,, \quad \tfrac{1}{2}\,\pi < t < \tfrac{3}{2}\,\pi\,.\right]$$

Příklad 4. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' + x = \dfrac{1}{x}\,, \quad x(0) = 2.$

$$\left[x(t) = \sqrt{1 + 3\mathrm{e}^{-2t}}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.\right]$$

Příklad 5. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $tx' - \operatorname{tg} x = 0\,, \quad x(1) = \frac{1}{6}\,\pi.$

$$\left[x(t) = \arcsin \tfrac{t}{2}\,, \quad 0 < t < 2\,.\right]$$

Příklad 6. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' + \dfrac{2x}{t} = 3\ln t\,, \quad x(1) = 0.$

$$\left[x(t) = \tfrac{1}{3t^2} - \tfrac{1}{3}\,t + t\ln t\,, \quad t > 0\,.\right]$$

Příklad 7. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' - x\operatorname{cotg} t = 2t\sin t\,, \quad x\big(-\tfrac{1}{2}\,\pi\big) = 2.$

$$\left[x(t) = \big(t^2 - 2 - \tfrac{1}{4}\,\pi^2\big)\sin t\,, \quad -\pi < t < 0\,.\right]$$

Příklad 8. Najděte řešení diferenciální rovnice $x' = x\sin t + \sin 2t$, které splňuje počáteční podmínku $x(0) = 4$.

$$\left[x(t) = 4\mathrm{e}^{-\cos t} + 2(1 - \cos t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.\right]$$

Příklad 9. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' + x\operatorname{tg} t = (t-1)\mathrm{e}^{-t}\cos t\,, \quad x(0) = 1.$

$$\left[x(t) = \big(4 - t\mathrm{e}^{-t}\big)\cos t\,, \quad -\tfrac{1}{2}\pi < t < \tfrac{1}{2}\,\pi\,.\right]$$

Příklad 10. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' + \dfrac{2x}{t} = \dfrac{1}{t-2}\,, \quad x(1) = 3.$

$$\left[x(t) = \tfrac{1}{2t^2} + \tfrac{2}{t} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{4}{t^2}\,\ln(2-t)\,, \quad 0 < t < 2\,.\right]$$

Příklad 11. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' + 2tx = t + t^3\,, \quad x(0) = 4.$

$$\left[x(t) = 4\mathrm{e}^{-t^2} + \tfrac{1}{2}\,t^2, \quad t \in \mathbb{R}\,.\right]$$

Příklad 12. Najděte řešení diferenciální rovnice $x' + x = \dfrac{2}{\mathrm{e}^t(t^2-1)}$, které splňuje počáteční podmínku $x(0) = 0$.

$$\left[x(t) = \mathrm{e}^{-t}\ln\frac{1-t}{1+t}\,, \quad -1 < t < 1\,.\right]$$

Příklad 13. Najděte řešení diferenciální rovnice $x' + \dfrac{2x}{t} = \dfrac{4\ln t}{t}$, které splňuje počáteční podmínku $x(1) = 2$.

$$\left[x(t) = \tfrac{3}{t^2} - 1 + 2\ln t\,, \quad t > 0\,.\right]$$

Příklad 14. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' + \dfrac{x}{t} = \sin t\,, \quad x(\pi) = 0.$

$$\left[x(t) = \frac{\sin t - \pi}{t} - \cos t\,, \quad t > 0\right]$$

Příklad 15. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' + x = x^2\,, \quad x(0) = 2.$

$$\left[x(t) = \frac{2}{2 - \mathrm{e}^t}\,, \quad t \in \mathbb{R}\right]$$

Příklad 16. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' + x = t^2\,, \quad x(0) = 2.$

$$\left[x(t) = t^2 - 2t + 2\,, \quad t \in \mathbb{R}\right]$$

Příklad 17. Najděte řešení diferenciální rovnice $x' + x^2 = 2x$, které splňuje počáteční podmínku $x(1) = 2$.

$$\left[x(t) = \frac{2\mathrm{e}^t}{1 + \mathrm{e}^t}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.\right]$$

Příklad 18. Najděte řešení diferenciální rovnice $x' + t^2 = 2x$, které splňuje počáteční podmínku $x(1) = 2$.

$$\left[x(t) = \tfrac{3}{4}\,\mathrm{e}^{2t-2} + \tfrac{1}{2}\,t^2 + \tfrac{1}{2}\,t + \tfrac{1}{4}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.\right]$$

Příklad 19. Najděte řešení diferenciální rovnice $x' + 3x = (6t+1)\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-3t}$, které splňuje počáteční podmínku $x(0) = 2$. $\Big[x(t) = t\mathrm{e}^{3t} + (2-t)\mathrm{e}^{-3t}, \quad t \in \mathbb{R}\,.\Big]$

Příklad 20. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' - 2x = \mathrm{e}^{t}\big(1 + \mathrm{e}^{t}\big)\,, \quad x(0) = 0.$
$\Big[x(t) = (1+t)\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{t}, \quad t \in \mathbb{R}\,.\Big]$

Příklad 21. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' - x = \mathrm{e}^{-t} + \cos t\,, \quad x(0) = 0.$
$\Big[x(t) = \mathrm{e}^{t} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t} - \tfrac{1}{2}\cos t + \tfrac{1}{2}\,\sin t\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.\Big]$

Příklad 22. Najděte řešení diferenciální rovnice $x' - 3x = \mathrm{e}^{2t}\cos t$, které splňuje počáteční podmínku $x(0) = 1$. $\Big[x(t) = \tfrac{3}{2}\,\mathrm{e}^{3t} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2t}(\sin t - \cos t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.\Big]$

Příklad 23. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' + 3x = \mathrm{e}^{-t}\big(2\sin t - \cos t\big)\,, \quad x(0) = 1.$
$\Big[x(t) = \tfrac{9}{5}\,\mathrm{e}^{-3t} + \tfrac{1}{5}\,\mathrm{e}^{-t}(3\sin t - 4\cos t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.\Big]$