Lineární diferenciální rovnice n–tého řádu s konstantními koeficienty

<u>Lineární diferenciální rovnice n–tého řádu s konstantními koeficienty</u>
je rovnice
$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = f(t)\,, \tag{1}$$
kde a_0, a_1, …, a_{n-1} jsou reálné konstanty a $f(t)$ je speciální funkce, kterou budeme specifikovat později.

<u>Obecné řešení, počáteční podmínka a Cauchyova úloha</u>
pro diferenciální rovnici n–tého řádu (1) obsahuje n–konstant c_1, c_2, …, c_n. Tyto konstanty jsou určeny počáteční podmínkou
$$x(t_0) = x_0\,, \qquad x'(t_0) = x_1\,, \qquad \ldots, \qquad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}\,. \tag{2}$$
Úloha najít řešení diferenciální rovnice (1), které splňuje počáteční podmínku (2) se nazývá Cauchyova úloha.

<u>Důsledky linearity diferenciální rovnice (1)</u>
Protože je zobrazení
$$L(x) = x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x$$
lineární, tj. pro každé funkce x_1 a x_2 a konstanty c_1, c_2 platí
$$L(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1L(x_1) + c_2L(x_2)\,,$$
platí pro řešení diferenciální rovnice $L(x) = f(t)$, tj. rovnice (1), obecné věty, které platí pro řešení každé lineární rovnice.

<u>*Princip superpozice*</u>
Jestliže jsou $x_1(t)$, resp. $x_2(t)$, řešení $L(x_1) = f_1(t)$, resp. $L(x_2) = f_2(t)$, a c_1, c_2 jsou konstanty, je $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ řešení rovnice $L(x) = c_1f_1(t) + c_2f_2(t)$.

<u>*Homogenní a nehomogenní rovnice*</u>
Jestliže je $f(t) \neq 0$ nazývá se rovnice $L(x) = f(t)$, tj. rovnice (1), nehomogenní rovnice a je-li $f(t) = 0$, nazývá se rovnice $L(x) = 0$, tj. rovnice
$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = 0\,, \tag{3}$$
homogenní rovnice příslušná k rovnici (1).
Obecné řešení x nehomogenní rovnice $L(x) = f(t)$, tj. řešení s konstantami, lze zapsat ve tvaru
$$x(t) = x_H(t) + x_N(t)\,,$$
kde $x_H(t)$ je obecné řešení příslušné homogenní rovnice (3) a $x_N(t)$ je jedno řešení nehomogenní rovnice (1).

<u>Řešení homogenní rovnice</u>
Množina všech řešení homogenní rovnice (3) tvoří vektorový prostor $\mathcal{V}_H$, který má dimenzi n. Abychom našli obecné řešení homogenní rovnice, proto stačí najít její n lineárně nezávislých řešení $x_1(t)$, $x_2(t)$,…, $x_n(t)$, tzv. fundamentální systém řešení. Obecné řešení homogenní rovnice pak je
$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \ldots + c_nx_n(t)\,,$$

kde c_1, c_2, ..., c_n jsou (obecně komplexní) čísla.

Polynom
$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \tag{4}$$
se nazývá charakteristický polynom diferenciální rovnice (3) a rovnice $P(\lambda) = 0$, tj. rovnice
$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$
se nazývá charakteristická rovnice. Ke každému řešení λ_0 charakteristické rovnice, tj. když $P(\lambda_0) = 0$, je $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda_0 t}$ řešení diferenciální rovnice (3).

Jestliže je λ_0 kořen charakteristického polynomu násobnosti k, tj. platí
$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k P_1(\lambda)\,,$$
kde $P_1(\lambda)$ je polynom stupně $(n-k)$, který nemá kořen λ_0, tj. $P_1(\lambda_0) \neq 0$, existuje k lineárně nezávislých řešení rovnice (3), které mají tvar
$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\,, \quad x_2(t) = t\mathrm{e}^{\lambda_0 t}\,, \quad x_3(t) = t^2\mathrm{e}^{\lambda_0 t}\,, \quad \ldots\,, \quad x_k(t) = t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda_0 t}\,.$$

`Poznámka:` Podmínka, že λ_0 je kořen polynomu $P(\lambda)$ násobnosti k je ekvivalentní tomu, že platí
$$P(\lambda_0) = P'(\lambda_0) = \ldots = P^{(k-1)}(\lambda_0) = 0 \quad \text{a} \quad P^{(k)}(\lambda_0) \neq 0\,.$$

<u>Komplexní a reálná řešení</u>

Pro komplexní kořen $\lambda_0 = \alpha + \mathrm{i}\beta$, kde $\beta \neq 0$, dostaneme jako řešení komplexní funkci
$$z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_0 t} = \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}\,.$$
Pro každé reálné číslo φ je komplexní číslo $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ definováno jako
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\,.$$
Proto můžeme komplexní řešení zapsat jako
$$z(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\big(\cos\beta t + \mathrm{i}\sin\beta t\big)\,.$$
Protože předpokládáme, že charakteristický polynom $P(\lambda)$ má reálné koeficienty, je $\lambda_0 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ kořen charakteristického polynomu právě tehdy, když je jeho komplexně sdružené číslo $\overline{\lambda}_0 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ také kořen charakteristického polynomu.

Jestliže jsou $\lambda_0 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ a $\overline{\lambda}_0 = \alpha - \mathrm{i}\beta$, kde $\beta \neq 0$ komplexně sdružená řešení charakteristické rovnice, volíme za lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice místo dvou komplexních řešení
$$z_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_0 t} = \mathrm{e}^{\alpha t}\big(\cos\beta t + \mathrm{i}\sin\beta t\big)\,, \qquad z_2(t) = \overline{z}_1(t) = \mathrm{e}^{\overline{\lambda}_0 t} = \mathrm{e}^{\alpha t}\big(\cos\beta t - \mathrm{i}\sin\beta t\big)$$
dvě reálná řešení
$$x_1(t) = \frac{z_1(t) + \overline{z}_1(t)}{2} = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{\lambda_0 t}\big) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t\,, \qquad x_2(t) = \frac{z_1(t) - \overline{z}_1(t)}{2\mathrm{i}} = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{\lambda_0 t}\big) = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t\,.$$
Jestliže jsou $\lambda_0 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ a $\overline{\lambda}_0 = \alpha - \mathrm{i}\beta$, kde $\beta \neq 0$, komplexně sdružené kořeny charakteristického polynomu násobnosti k, odpovídá jim $2k$ reálných řešení homogenní rovnice
$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{\lambda_0 t}\big) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t\,, & x_2(t) &= \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{\lambda_0 t}\big) = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t\,,\\
x_3(t) &= \mathrm{Re}\big(t\mathrm{e}^{\lambda_0 t}\big) = t\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t\,, & x_4(t) &= \mathrm{Im}\big(t\mathrm{e}^{\lambda_0 t}\big) = t\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t\,,\\
&\ \vdots & &\ \vdots\\
x_{2k-1}(t) &= \mathrm{Re}\big(t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda_0 t}\big) = t^{k-1}\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t\,, & x_{2k}(t) &= \mathrm{Im}\big(t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda_0 t}\big) = t^{k-1}\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t\,.
\end{aligned}$$

Odhad řešení nehomogenní rovnice

Pro speciální pravou stranu, tj. funkci $f(t)$, nehomogenní diferenciální rovnice (1) lze jedno její řešení odhadnout. Jedná se o funkce $f(t)$, které jsou lineární kombinace funkcí

$$f(t) = P_N(t)\mathrm{e}^{\mu t} \qquad \text{a} \quad f(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\big(P_{N_1}(t)\cos\omega t + P_{N_2}(t)\sin\omega t\big)\,, \tag{5}$$

kde $P_N(t)$ jsou reálné polynomy stupně N. Z principu superpozice plyne, že stačí najít řešení nehomogenní diferenciální rovnice (1) pro funkce tvaru (5).

Odhad řešení pro funkce $f(t) = \mathrm{e}^{\mu t}P_N(t)$

Jestliže má pravá strana rovnice (1) tvar $f(t) = \mathrm{e}^{\mu t}P_N(t)$, kde μ je konstanta a $P_N(t)$ polynom stupně N (obecně mohou být μ i $P_N(t)$ komplexní), existuje řešení této rovnice tvaru

$$x(t) = \mathrm{e}^{\mu t}Q_N(t)\,t^r\,,$$

kde $Q_N(t)$ je obecný polynom stupně N, tj. polynom stupně N s neznámými koeficienty, které budeme hledat, a r je násobnost kořene μ v charakteristickém polynomu (4).

Odhad řešení pro funkce $f(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\big(P_{N_1}(t)\cos\omega t + Q_{N_2}(t)\sin\omega t\big)$

Jestliže má pravá strana rovnice (1) tvar $f(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\big(P_{N_1}(t)\cos\omega t + P_{N_2}(t)\sin\omega t\big)$, kde ρ a ω jsou reálná čísla (raději $\omega \neq 0$), $P_{N_1}(t)$, resp. $P_{N_2}(t)$, jsou reálné polynomy stupně N_1, resp. N_2, existuje řešení diferenciální rovnice (1), které má tvar

$$x(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\big(R_N(t)\cos\omega t + S_N(t)\sin\omega t\big)\,t^r\,,$$

kde $N = \max(N_1, N_2)$, $R_N(t)$ a $S_N(t)$ jsou reálné polynomy stupně N a r je násobnost kořene $\mu = \rho + \mathrm{i}\omega$, resp. $\overline{\mu} = \rho - \mathrm{i}\omega$, v charakteristickém polynomu[1].

Příklad 1.r. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x'' - 3x' - 4x = 0\,, \qquad x(0) = 3\,, \quad x'(0) = 2\,. \tag{6}$$

Řešení. Nejprve nalezneme obecné řešení diferenciální rovnice (6). Protože se jedná o homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu, stačí najít její dvě lineárně nezávislá řešení. Protože má diferenciální rovnice konstantní koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, kde λ je konstanta. Po dosazení do rovnice (6) dostaneme pro λ charakteristickou rovnici

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \quad \text{tj.} \quad \lambda_1 = -1 \quad \text{a} \quad \lambda_2 = 4\,.$$

Pro tyto hodnoty λ získáme dvě lineárně nezávislá řešení diferenciální rovnice $x_1(t) = \mathrm{e}^{-t}$ a $x_2(t) = \mathrm{e}^{4t}$. Tedy obecné řešení diferenciální rovnice (6) je

$$x(t) = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{4t}\,,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.

Ty určíme z počátečních podmínek. Protože $x'(t) = -c_1\mathrm{e}^{-t} + 4c_2\mathrm{e}^{4t}$, dávají počáteční podmínky soustavu rovnic

$$c_1 + c_2 = 3 \quad \text{a} \quad -c_1 + 4c_2 = 2\,, \quad \text{tj.} \quad c_1 = 2\,, \quad c_2 = 1\,.$$

[1]Odpovídající homogenní rovnice (3) má řešení $x_H(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\cos\omega t$ a $x_H(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\sin\omega t$ právě tehdy, když jsou $\mu = \rho + \mathrm{i}\omega$ a $\overline{\mu} = \rho - \mathrm{i}\omega$ kořeny charakteristické rovnice (4)

Tedy řešení Cauchyovy úlohy (6) je

$$x(t) = 2\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{4t}\,.$$

Příklad 2.r. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$x'' + 6x' + 9x = 0\,. \tag{7}$$

Řešení. Jedná se o lineární homogenní diferenciální rovnici druhého řádu. Proto je její fundamentlní systém řešení tvořen dvěmi lineárně nezávislými řešeními. Protože jde o diferenciální rovnici s konstantními koeficienty, lze aspoň jedno její řešení najít ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, kde λ je komplexní číslo to musí být řešením charakteristické rovnice

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0\,.$$

Protože tako kvadratická rovnice má pouze jeden dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = -3$, je její fundamentální systém řešení tvořen funkcemi $x_1(t) = \mathrm{e}^{-3t}$ a $x_2(t) = t\mathrm{e}^{-3t}$. Obecné řešení diferenciální rovnice (7) proto je

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1\mathrm{e}^{-3t} + c_2 t\mathrm{e}^{-3t}\,,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.

Příklad 3.r. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x'' + 4x' + 13x = 0\,, \qquad x(0) = 1\,, \quad x'(0) = 4\,. \tag{8}$$

Řešení. Nejprve nalezneme obecné řešení diferenciální rovnice (8). Protože se jedná o homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu, stačí najít její dvě lineárně nezávislá řešení. Protože má diferenciální rovnice konstantní koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, kde λ je konstanta. Po dosazení do rovnice (8) dostaneme pro λ charakteristickou rovnici

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0 \quad \text{tj.} \quad \lambda_1 = -2 + 3\mathrm{i} \quad \text{a} \quad \lambda_2 = -2 - 3\mathrm{i}\,.$$

Pro tyto hodnoty λ získáme dvě lineárně nezávislá komplexní řešení diferenciální rovnice (8), $x_1(t) = \mathrm{e}^{(-2+3\mathrm{i})t}$ a $x_2(t) = \mathrm{e}^{(-2-3\mathrm{i})t}$. Tedy obecné řešení diferenciální rovnice (8) je

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{(-2+3\mathrm{i})} + C_2\mathrm{e}^{(-2-3\mathrm{i})t}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou komplexní čísla. Ty určíme z počátečních podmínek. Protože

$$x'(t) = (-2 + 3\mathrm{i})C_1\mathrm{e}^{(-2+3\mathrm{i})t} + (-2 - 3\mathrm{i})C_2\mathrm{e}^{(-2-3\mathrm{i})t}\,,$$

dávají počáteční podmínky soustavu rovnic

$$C_1 + C_2 = 1 \quad \text{a} \quad (-2 + 3\mathrm{i})C_1 + (-2 - 3\mathrm{i})C_2 = 4\,, \quad \text{tj.} \quad C_1 = \tfrac{1}{2} - \mathrm{i}\,, \quad C_2 = \tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\,.$$

Tedy řešení Cauchyovy úlohy (8) je

$$x(t) = \left(\tfrac{1}{2} - \mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{(-2+3\mathrm{i})t} + \left(\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{(-2-3\mathrm{i})t} = \mathrm{e}^{-2t}\cos 3t + 2\mathrm{e}^{-2t}\sin 3t\,.$$

Jednodušší než hledat hodnoty komplexních čísel C_1 a C_2 je přejít ve vektorovém prostoru řešení homogenní rovnice k bázi tvořené reálnými funkcemi

$$x_1(t) = \frac{\mathrm{e}^{(-2+3\mathrm{i})t} + \mathrm{e}^{(-2-3\mathrm{i})t}}{2} = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{(-2+3\mathrm{i})t}\big) = \mathrm{e}^{-2t}\cos 3t\,,$$
$$x_2(t) = \frac{\mathrm{e}^{(-2+3\mathrm{i})t} - \mathrm{e}^{(-2-3\mathrm{i})t}}{2\mathrm{i}} = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{(-2+3\mathrm{i})t}\big) = \mathrm{e}^{-2t}\sin 3t\,.$$

Obecné řešení pak lze zapsat jako

$$x(t) = c_1\mathrm{e}^{-2t}\cos 3t + c_2\mathrm{e}^{-2t}\sin 3t\,,$$

kde c_1 a c_2 jsou opět konstanty, ale kvůli reálným počátečním podmínkám jsou reálné (pro komplexní konstanty C_1 a C_2 plynulo, že tyto konstanty jsou komplexně sdružené). Po dosazení počátečních podmínek dostaneme pro konstanty c_1 a c_2 soustavu rovnic

$$c_1 = 1\,,\quad -2c_1 + 3c_2 = 4\,,\quad \text{tj.}\quad c_1 = 1\,,\quad c_2 = 2\,.$$

Opět jsme tedy dostali řešení Cauchyovy úlohy (8)

$$x(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos 3t + 2\mathrm{e}^{-2t}\sin 3t\,.$$

Příklad 4.r. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$x^{(4)} + 6x''' + 17x'' + 28x' + 20x = 0\,, \tag{9}$$

jestliže víte, že jedno řešení této rovnice je $x(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin 2t$.

Řešení. Protože se jedná o homogenní lineární diferenciální rovnice čtvrtého řádu, stačí najít její čtyři lineárně nezávislá řešení. Protože má diferenciální rovnice konstantní koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, kde λ je konstanta. Po dosazení do rovnice (9 dostaneme pro λ charakteristickou rovnici

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 17\lambda^2 + 28\lambda + 20 = 0\,.$$

Protože je řešení $x(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin 2t$ odpovídá kořenům charakteristické rovnice $\lambda = -1 \pm 2\mathrm{i}$, musí být charakteristický polynom $P(\lambda)$ dělitelný polynomem

$$(\lambda + 1 - 2\mathrm{i})(\lambda + 1 + 2\mathrm{i}) = \lambda^2 + 2\lambda + 5\,,$$

ve skutečnosti je

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 17\lambda^2 + 28\lambda + 20 = (\lambda^2 + 2\lambda + 5)(\lambda^2 + 4\lambda + 4)\,.$$

Tedy charakteristická rovnice má dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = -2$ a dva jednoduché komplexně sdružené kořeny $\lambda_{3,4} = -1 \pm 2\mathrm{i}$.

Dvojnásobnému kořenu $\lambda_{1,2} = -2$ odpovídají dvě řešení diferenciální rovnice (9) $x_1(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ a $x_2(t) = t\mathrm{e}^{-2t}$. Dvojici jednoduchých komplexně sdružených kořenů $\lambda_{3,4} = -1 \pm 2\mathrm{i}$ pak odpovídají reálná řešení

$$x_3(t) = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})t}\big) = \mathrm{e}^{-t}\cos 2t\,,\qquad x_4(t) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})t}\big) = \mathrm{e}^{-t}\sin 2t\,.$$

Obecné řešení diferenciální rovnice (9) proto je

$$x(t) = c_1 \mathrm{e}^{-2t} + c_2 t \mathrm{e}^{-2t} + c_3 \mathrm{e}^{-t} \cos 2t + c_4 \mathrm{e}^{-t} \sin 2t \,,$$

kde c_1, c_2, c_3 a c_4 jsou libovolná reálná čísla.

Příklad 5.r. Najděte obecné řešení homogenní rovnice k diferenciální rovnici

$$x'' - x' - 2x = \mathrm{e}^{-t} \cos t + (t+2)\mathrm{e}^{t}$$

a uveďte, v jakém tvaru budete hledat řešení nehomogenní rovnice.

Řešení. Charakteristický polynom rovnice

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$$

má dva kořeny $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = 2$. Proto jsou dvě lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice $x_1(t) = \mathrm{e}^{-t}$ a $x_2(t) = \mathrm{e}^{2t}$ a její obecné řešení je

$$x_H(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1 \mathrm{e}^{-t} + c_2 \mathrm{e}^{2t} \,,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.

Pravá strana nehomogenní rovnice je součet dvou funkcí $f_1(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos t$ a $f_2(t) = (t{+}2)\mathrm{e}^{t}$, pro které umíme najít řešení nehomogenní rovnice odhadem.

Protože $\mu = -1 + \mathrm{i}$ není kořen charakteristické rovnice, budeme hledat odpovídající řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$x_{N,1}(t) = \mathrm{e}^{-t}\big(A_1 \cos t + B_1 \sin t\big) \,,$$

kde A_1 a B_1 jsou reálná čísla.

Funkce $f_2(t)$ je součin polynomu stupně 1 a exponenciální funkce e^{-t}. Protože $\mu = -1$ je kořen charakteristického polynomu násobnosti 1, budeme pro tuto část hledat řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$x_{N,2}(t) = \mathrm{e}^{-t}\big(A_2 t + B_2\big) \cdot t \,,$$

kde A_2 a B_2 jsou reálná čísla.

Řešení celé nehomogenní rovnice pak budeme hledat ve tvaru

$$x_N(t) = x_{N,1}(t) + x_{N,2}(t) = \mathrm{e}^{-t}\big(A_1 \cos t + B_1 \sin t\big) + \mathrm{e}^{-t}\big(A_2 t + B_2\big) \cdot t \,.$$

Příklad 6.r. Najděte obecné řešení homogenní rovnice k diferenciální rovnici

$$x'' + 3x' + 2x = \mathrm{e}^{t}(t-3) + \mathrm{e}^{-t}(2 + \cos 2t)$$

a uveďte, v jakém tvaru budete hledat řešení nehomogenní rovnice.

Řešení. Charakteristický polynom diferenciální rovnice

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

má dva kořeny $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = -2$. Proto jsou dvě lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice $x_1(t) = \mathrm{e}^{-t}$ a $x_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ a její obecné řešení je

$$x_H(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1 \mathrm{e}^{-t} + c_2 \mathrm{e}^{-2t}\,,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.
Pravá strana nehomogenní rovnice

$$f(t) = \mathrm{e}^t(t-3) + \mathrm{e}^{-t}(2+\cos 2t) = \mathrm{e}^t(t-3) + 2\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t}\cos 2t$$

je součet tří funkcí $f_1(t) = \mathrm{e}^t(t-3)$, $f_2(t) = 2\mathrm{e}^{-t}$ a $f_3(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos 2t$, pro které umíme najít řešení nehomogenní rovnice odhadem.
Protože $\mu_1 = 1$ a $\mu_3 = -1 + 2\mathrm{i}$ nejsou kořeny charakteristické rovnice a $\mu_2 = -1$ je kořen charakteristické rovnice násobnosti jedna, budeme hledat odpovídající řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$x_{N,1}(t) = \mathrm{e}^t(A_1 t + B_1)\,, \qquad x_{N,2}(t) = A_2\mathrm{e}^{-t}\cdot t\,, \qquad x_{N,3}(t) = \mathrm{e}^{-t}\big(A_3\cos 2t + B_3\sin 2t\big)\,,$$

kde A_k a B_k jsou reálná čísla. Řešení celé nehomogenní rovnice pak hledáme ve tvaru

$$x_N(t) = x_{N,1}(t) + x_{N,2}(t) + x_{N,3}(t) = \mathrm{e}^t(A_1 t + B_1) + A_2\mathrm{e}^{-t}\cdot t + \mathrm{e}^{-t}\big(A_3\cos 2t + B_3\sin 2t\big).$$

Příklad 7.r. Najděte obecné řešení homogenní rovnice k diferenciální rovnici

$$x'' + 4x' + 4x = t^2 + 2 - \mathrm{e}^{-2t}\sin t + \mathrm{e}^{-2t}$$

a uveďte, v jakém tvaru budete hledat řešení nehomogenní rovnice.
Řešení. Charakteristický polynom diferenciální rovnice

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$

má jeden dvojnásobný kořen $\lambda_1 = -2$. Proto jsou dvě lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice $x_1(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ a $x_2(t) = t\mathrm{e}^{-2t}$ a její obecné řešení je

$$x_H(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1 \mathrm{e}^{-2t} + c_2 t\mathrm{e}^{-2t}\,,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla
Pravá strana nehomogenní rovnice je součet tří funkcí $f_1(t) = t^2 + 2$, $f_2(t) = -\mathrm{e}^{-2t}\sin t$ a $f_3(t) = \mathrm{e}^{-2t}$, pro které umíme najít řešení nehomogenní rovnice odhadem.
Protože $\mu_1 = 0$ a $\mu_2 = -2 + \mathrm{i}$ nejsou kořeny charakteristického polynomu a $\mu_3 = -2$ je kořen charakteristického polynomu násobnosti 2, budeme hedat odpovídající řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$x_{N,1}(t) = A_1 t^2 + B_1 t + C_1\,, \quad x_{N,2}(t) = \mathrm{e}^{-2t}\big(A_2\cos t + B_2\sin t\big)\,, \quad x_{N,3}(t) = A_2\mathrm{e}^{-2t}\cdot t^2,$$

kde A_k B_k a C_1 jsou reálná čísla. Řešení celé nehomogenní rovnice pak hledáme ve tvaru

$$x_N(t) = x_{N,1}(t) + x_{N,2}(t) + x_{N,3}(t)\,.$$

Příklad 8.r. Najděte obecné řešení homogenní rovnice k diferenciální rovnici

$$x'' + 6x' + 9x = t\mathrm{e}^{-t}(\sin 2t + t\cos 2t - \mathrm{e}^{-2t})$$

a uveďte, v jakém tvaru budete hledat řešení nehomogenní rovnice.

Řešení. Charakteristický polynom diferenciální rovnice

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9$$

má jeden dvojnásobný kořen $\lambda_1 = -3$. Proto jsou dvě lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice $x_1(t) = \mathrm{e}^{-3t}$ a $x_2(t) = t\mathrm{e}^{-3t}$ a její obecné řešení je

$$x_H(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1 \mathrm{e}^{-3t} + c_2 t\mathrm{e}^{-3t},$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla

Pravá strana nehomogenní rovnice

$$f(t) = t\mathrm{e}^{-t}(\sin 2t + t\cos 2t - \mathrm{e}^{-2t}) = \mathrm{e}^{-t}\big(t\sin 2t + t^2\cos 2t\big) + t\mathrm{e}^{-3t}$$

je součet dvou funkcí $f_1(t) = \mathrm{e}^{-t}\big(t\sin 2t + t^2\cos 2t\big)$ a $f_2(t) = t\mathrm{e}^{-3t}$, pro které umíme najít řešení nehomogenní rovnice odhadem.

Protože $\mu_1 = -1 + 2\mathrm{i}$ není kořen charakteristického polynomu a $\mu_2 = -3$ je kořen charakteristického polynomu násobnosti 2, budeme hledat odpovídající řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} x_{N,1}(t) &= \mathrm{e}^{-t}\big((A_1t^2 + B_1t + C_1)\cos 2t + (D_1t^2 + E_1t + F_1)\sin 2t\big), \\ x_{N,2}(t) &= (A_2t + B_2)\mathrm{e}^{-3t} \cdot t^2. \end{aligned}$$

Řešení celé nehomogenní rovnice má pak tvar $x_N(t) = x_{N,1}(t) + x_{N,2}(t)$.

Příklad 9.r. Najděte obecné řešení homogenní rovnice k diferenciální rovnici

$$x'' - 2x' + 5x = \mathrm{e}^{-t}\sin 2t + (2t+1)\mathrm{e}^{t}\cos 2t$$

a uveďte, v jakém tvaru budete hledat řešení nehomogenní rovnice.

Řešení. Charakteristický polynom diferenciální rovnice

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

má dva komplexní kořeny $\lambda_1 = 1 \pm 2\mathrm{i}$. Proto jsou dvě reálná lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice $x_1(t) = \mathrm{e}^{t}\cos 2t$ a $x_2(t) = \mathrm{e}^{t}\sin 2t$ a její obecné řešení je

$$x_H(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1 \mathrm{e}^{t}\cos 2t + c_2 \mathrm{e}^{t}\sin 2t,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla

Pravá strana nehomogenní rovnice je součet dvou funkcí $f_1(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin 2t$ a $f_2(t) = (2t+1)\mathrm{e}^{t}\cos 2t$, pro které umíme najít řešení nehomogenní rovnice odhadem.

Protože $\mu_1 = -1+2\mathrm{i}$ není kořen charakteristického polynomu a $\mu_2 = 1+2\mathrm{i}$ je kořen charakteristického polynomu násobnosti jedna, budeme hledat odpovídající řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$x_{N,1}(t) = \mathrm{e}^{-t}\big(A_1\cos 2t + B_1\sin 2t\big), \quad x_{N,2}(t) = \mathrm{e}^{t}\big((A_2t + B_2)\cos 2t + (C_2t + D_2)\sin 2t\big)\cdot t,$$

kde A_k, B_k, C_2 a D_2 jsou reálná čísla. Řešení celé nemohogenní rovnice má pak tvar $x_N(t) = x_{N,1}(t) + x_{N,2}(t)$.

Příklad 10.r. Najděte obecné řešení homogenní rovnice k diferenciální rovnici

$$x'' + 4x' + 5x = \mathrm{e}^{-2t}(t + 2\mathrm{e}^t - \sin 2t + 2\cos t)$$

a uveďte, v jakém tvaru budete hledat řešení nehomogenní rovnice.
Řešení. Charakteristický polynom diferenciální rovnice

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5$$

má dva komplexní kořeny $\lambda_1 = -2 \pm \mathrm{i}$. Proto jsou dvě reálná lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice $x_1(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos t$ a $x_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}\sin t$ a její obecné řešení je

$$x_H(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1\mathrm{e}^{-2t}\cos t + c_2\mathrm{e}^{-2t}\sin t\,,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla
Pravá strana nehomogenní rovnice

$$f(t) = t\mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\sin 2t + 2\mathrm{e}^{-2t}\cos t$$

je součet čtyř funkcí $f_1(t) = t\mathrm{e}^{-2t}$, $f_2(t) = 2\mathrm{e}^{-t}$, $f_3(t) = -\mathrm{e}^{-2t}\sin 2t$ a $f_4(t) = 2\mathrm{e}^{-2t}\cos t$, pro které umíme najít řešení nehomogenní rovnice odhadem.
Protože $\mu_1 = -2$, $\mu_2 = -1$ a $\mu_3 = -2 + 2\mathrm{i}$ nejsou kořeny charakteristického polynomu a $\mu_4 = -2 + \mathrm{i}$ je kořen charakteristického polynomu násobnosti jedna, budeme hledat příslušná řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} x_{N,1}(t) &= \mathrm{e}^{-2t}(A_1 t + B_1)\,, & x_{N,2}(t) &= A_2\mathrm{e}^{-t}\,,\\ x_{N,3}(t) &= \mathrm{e}^{-2t}\big(A_3\cos 2t + B_3\sin 2t\big)\,, & x_{N,4}(t) &= \mathrm{e}^{-2t}\big(A_4\cos t + B_4\sin t\big)\cdot t\,, \end{aligned}$$

kde A_k a B_k jsou reálná čísla. Celé řešení nehomogenní rovnice pak bude mít tvar $x_N(t) = x_{N,1}(t) + x_{N,2}(t) + x_{N,3}(t) + x_{N,4}(t)$.

Příklad 11.r. Určete, v jakém tvaru budete hledat řešení diferenciální rovnice

$$x^{(5)} - x^{(4)} - x''' - 11x'' + 8x' + 20x = (t+2)\mathrm{e}^t + (t^2-3)\mathrm{e}^{2t} + t\mathrm{e}^{3t}\cos t - 3\mathrm{e}^{-t}\cos 2t + t^2\mathrm{e}^{-t}\sin 2t\,. \quad (10)$$

Řešení: Charakteristický polynom rovnice (10) je

$$P(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 - \lambda^3 - 11\lambda^2 + 8\lambda + 20\,.$$

Pravá strana rovnice je součet čtyř členů, které odpovídají různým hodnotám μ:

$$\begin{aligned} &f_1(t) = (t+2)\mathrm{e}^t\,, && \mu_1 = 1\,, && f_2(t) = (t^2-3)\mathrm{e}^{2t}\,, && \mu_2 = 2\,,\\ &f_3(t) = t\mathrm{e}^{3t}\cos t\,, && \mu_3 = 3 + \mathrm{i}\,, && f_4(t) = -3\mathrm{e}^{-t}\cos 2t + t^2\mathrm{e}^{-t}\sin 2t\,, && \mu_4 = -1 + 2\mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

Proto budeme řešení hledat jako součet čtyř členů $x_{N,k}(t)$, které odpovídají řešením diferenciální rovnice (10) s pravou stranou $f_k(t)$.
Pro $\mu_1 = 1$ je $P(1) = 16 \neq 0$. Proto budeme hledat odpovídající řešení ve tvaru

$$x_{N,1} = (A_1 t + B_1)\mathrm{e}^t\,.$$

Pro $\mu_2 = 2$ dostaneme $P(2) = 0$. Derivace charakteristického polynomu je

$$P'(\lambda) = 5\lambda^4 - 4\lambda^3 - 3\lambda^2 - 22\lambda + 8\,.$$

Protože $P'(2) = 0$, najdeme ještě druhou derivaci

$$P''(\lambda) = 20\lambda^3 - 12\lambda^2 - 6\lambda - 22\,.$$

A protože $P''(2) = 78 \neq 0$, je $\mu = 2$ kořen charaktristického polynomu násobnosti 2. Řešení pro druhou část budeme tedy hledat ve tvaru

$$x_{N,2}(t) = (A_2t^2 + B_2t + C_2)\mathrm{e}^{2t} \cdot t^2\,.$$

Protože $\mu = 2$ je kořen charakteristického polynomu $P(\lambda)$, je $P(\lambda)$ dělitelné polynomem $(\lambda - 2)^2$. Po vydělení dostaneme

$$P(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 7\lambda + 5)$$

Pro $\mu_3 = 3 + \mathrm{i}$ dostaneme $P(3 + \mathrm{i}) = (1 + \mathrm{i})^2(68 + 51\mathrm{i}) \neq 0$. Tedy μ_3 není kořen charakteristického polynomu a řešení pro pravou stranu $f_3(t)$ budeme hledat ve tvaru

$$x_{N,3}(t) = \mathrm{e}^{3t}\big((A_3t + B_3)\cos t + (C_3t + D_3)\sin t\big)\,.$$

Pro $\mu_4 = -1 + 2\mathrm{i}$ je $P(-1 + 2\mathrm{i}) = (-3 + 2\mathrm{i})^2 \cdot 0 = 0$. Proto je $\mu_4 = -1 + 2\mathrm{i}$ kořen charakteristického polynomu. A protože má $P(\lambda)$ reálné koeficienty, je i $\overline{\mu}_4 = -1 - 2\mathrm{i}$ kořen polynomu $P(\lambda)$. Proto musí být charakteristický polynom dělitelný polynomem $(\lambda - \mu_4)(\lambda - \overline{\mu}_4) = (\lambda^2 + 2\lambda + 5)$. Tedy

$$P(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda^2 + 2\lambda + 5)(\lambda + 1)$$

a $\mu_4 = -1 + 2\mathrm{i}$ je kořen chakteristického polynomu násobnosti jedna. O tom jsme se mohli přesvědčit také tak, že bychom zjistili, že $P'(-1 + 2\mathrm{i}) \neq 0$. Tedy pro $\mu_4 = -1 + 2\mathrm{i}$ je $r = 1$ a řešení pro čtvrtou část budeme hledat ve tvaru

$$x_{N,4}(t) = \mathrm{e}^{-t}\big((A_4t^2 + B_4t + C_4)\cos 2t + (D_4t^2 + E_4t + F_4)\sin 2t\big) \cdot t\,.$$

Příklad 12.r. Najděte obecné řešení rovnice $x'' - 3x' + 2x = 2t^2 - 3 + 5\cos t$.

Řešení. Charakteristický polynom

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

má dva jednoduché kořeny $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 2$. Proto je obecné řešení homogenní rovnice

$$x_H(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{2t},$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.

Pravá strana nehomogenní rovnice je součet dvou funkcí $f_1(t) = 2t^2 - 3$ a $f_2(t) = 5\cos t$, pro které umíme najít řešení nehomogenní rovnice odhadem.

Protože $\mu_1 = 0$ není kořen charakteristického polynomu, budeme hledat řešení, které odpovídá funkci $f_1(t)$, tj. diferenciální rovnice

$$x'' - 3x' + 2x = 2t^2 - 3\,, \tag{11}$$

ve tvaru $x(t) = At^2 + Bt + C$, kde A, B a C jsou reálná čísla. Po dosazení do (11) dostaneme

$$2A - 3(2At + B) + 2(At^2 + Bt + C) = 2At^2 + (-6A + 2B)t + (2A - 3B + 2C) = t^2 - 3\,.$$

Tedy pro čísla A, B a C musí platit

$$2A = 2\,, \quad -6A + 2B = 0\,, \quad 2A - 3B + 2C = -3\,, \quad \text{tj.} \quad A = 1\,, \quad B = 3\,, \quad C = 2\,.$$

Tedy řešení první části nehomogenní rovnice je

$$x_{N,1}(t) = t^2 + 3t + 2\,.$$

Protože $\mu_2 = \mathrm{i}$ není kořen charakteristického polynomu, budeme hledat řešení pro druhou čast nehomogenní rovnice, tj. pro rovnici

$$x'' - 3x' + 2x = 5\cos t\,, \tag{12}$$

ve tvaru $x(t) = A\cos t + B\sin t$, kde A a B jsou reálná čísla po dosazení do rovnice (12) dostaneme

$$\begin{aligned} -A\cos t - B\sin t - 3(-A\sin t + B\cos t) + 2(A\cos t + B\sin t) = \\ = (A - 3B)\cos t + (3A + B)\sin t = 5\cos t\,. \end{aligned}$$

Tedy konstanty A a B musí splňovat soustavu rovnic

$$A - 3B = 5\,, \quad 3A + B = 0\,, \quad \text{tj.} \quad A = \tfrac{1}{2}\,, \quad B = -\tfrac{3}{2}\,.$$

Tedy řešení druhé části nehomogenní rovnice je $x_{N,2}(t) = \frac{1}{2}\cos t - \frac{3}{2}\sin t$.
Celkově je řešení nehomogenní rovnice $x_N(t) = x_{N,1}(t) + x_{N,2}(t)$ a obecné řešení dané diferenciální rovnice je

$$x(t) = x_H(t) + x_N(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{2t} + t^2 + 3t + 2 + \tfrac{1}{2}\cos t - \tfrac{3}{2}\sin t\,,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.

Příklad 13.r. Najděte obecné řešení rovnice $x'' + 4x' + 4x = \mathrm{e}^{-2t} - 8t$.
Řešení. Charakteristický polynom diferenciální rovnice

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$

má jeden dvojnásobný kořen $\lambda = -2$. Proto je obecné řešení homogenní rovnice

$$x_N(t) = c_1\mathrm{e}^{-2t} + c_2t\mathrm{e}^{-2t},$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.
Pravá strana nehomogenní rovnice je součet dvou funkcí $f_1(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ a $f_2(t) = -8t$, pro které umíme najít řešení nehomogenní rovnice odhadem.
Protože $\mu_1 = -2$ je kořen charakteristického polynomu násobnosti dvě, budeme hledat řešení odpovídající nehomogenní rovnice, tj. rovnice

$$x'' + 4x' + 4x = \mathrm{e}^{-2t},$$

ve tvaru $x(t) = At^2\mathrm{e}^{-2t}$. Po dosazení a vykrácení výrazem e^{-2t} dostaneme

$$A(4t^2 - 8t + 2) + 4A(-2t^2 + 2t) + 4At^2 = 2A = 1\,, \quad \text{neboli} \quad A = \tfrac{1}{2}\,.$$

Proto je řešení první části nehomogenní rovnice $x_{N,1}(t) = \frac{1}{2}\,t^2\mathrm{e}^{-2t}$.
Protože $\mu_2 = 0$ není kořenem charakteristického polynomu, budeme hledat řešení odpovídající nehomogenní rovnice, tj. rovnice

$$x'' + 4x' + 4x = -8t\,,$$

ve tvaru $x(t) = At + B$. Po dosazení dostaneme

$$4A + 4(At + B) = 4At + (4A + 4B) = -8t\,, \quad \text{tj.} \quad 4A = -8\,, \quad 4A + 4B = 0\,,$$

neboli $A = -2$ a $B = 2$. Řešení druhé části nehomogenní rovnice tedy je $x_{N,2}(t) = 2 - 2t$.
Celkově je řešení nehomogenní rovnice $x_N(t) = x_{N,1}(t) + x_{N,2}(t)$ a obecné řešení celé diferenciální rovnice je

$$x(t) = x_H(t) + x_N(t) = c_1\mathrm{e}^{-2t} + c_2t\mathrm{e}^{-2t} + \tfrac{1}{2}\,t^2\mathrm{e}^{-2t} + 2 - 2t\,,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.

Příklad 14.r. Najděte obecné řešení rovnice $x'' + 4x' + 13x = 3\mathrm{e}^{-2t} + 20\sin t$.
Řešení. Charakteristický polynom diferenciální rovnice

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 13$$

má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda = -2 \pm 3\mathrm{i}$. Proto je obecné řešení homogenní rovnice

$$x_N(t) = c_1\mathrm{e}^{-2t}\cos 3t + c_2t\mathrm{e}^{-2t}\sin 3t,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.
Pravá strana nehomogenní rovnice je součet dvou funkcí $f_1(t) = 3\mathrm{e}^{-2t}$ a $f_2(t) = 20\sin t$, pro které umíme najít řešení nehomogenní rovnice odhadem.
Protože $\mu_1 = -2$ není kořen charakteristického polynomu, budeme hledat řešení první části nehomogenní rovnice, tj. rovnice

$$x'' + 4x' + 13x = 3\mathrm{e}^{-2t}$$

ve tvaru $x(t) = A\mathrm{e}^{-2t}$. Po dosazení dostaneme

$$4A - 8A + 13A = 9A = 3\,, \quad \text{tj.} \quad A = \tfrac{1}{3}\,.$$

Tedy řešení první části nehomogenní rovnice je $x_{N,1}(t) = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-2t}$.
Protože $\mu_2 = \mathrm{i}$ není kořen charakteristického polynomu, budeme hledat řešení druhé části nehomogenní rovnice, tj. rovnice

$$x'' + 4x' + 13x = 20\sin t\,,$$

ve tvaru $x(t) = A\cos t + B\sin t$ po dosazení do příslušné rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} -A\cos t - B\sin t + 4(-A\sin t + B\cos t) + 13(A\cos t + B\sin t) &= \\ = (12A + 4B)\cos t + (-4A + 12B)\sin t &= 20\sin t\,, \end{aligned}$$

neboli

$$12A + 4B = 0\,, \quad -4A + 12B = 20\,, \quad \text{tj.} \quad A = -\tfrac{1}{2}\,, \quad B = \tfrac{3}{2}\,.$$

Tedy řešení druhé části nehomogenní rovnice je $x_{n,2}(t) = -\frac{1}{2}\cos t + \frac{3}{2}\sin t$.
Jedno řešení celé nehomogenní rovnice je pak $x_N(t) = x_{N,1}(t) + x_{N,2}(t)$ a její obecné řešení

$$x(t) = x_H(t) + x_N(t) = c_1 \mathrm{e}^{-2t}\cos 3t + c_2 t \mathrm{e}^{-2t}\sin 3t + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-2t} - \tfrac{1}{2}\cos t + \tfrac{3}{2}\sin t\,,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.

Příklad 15.r. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x'' - 4x = 17\mathrm{e}^{2t}\cos t - 4\mathrm{e}^{-2t}\,, \qquad x(0) = 0\,, \quad x'(0) = 5\,.$$

Řešení. Charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2 - 4$ má dva jednoduché kořeny $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = -2$. Proto je obecné řešení homogenní rovnice

$$x_H(t) = c_1\mathrm{e}^{2t} + c_2\mathrm{e}^{-2t},$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.
Pravá strana nehomogenní rovnice je součet dvou funkcí $f_1(t) = 17\mathrm{e}^{2t}\cos t$ a $f_2(t) = -4\mathrm{e}^{-2t}$, pro které umíme najít řešení nehomogenní rovnice odhadem.
Protože $\mu_1 = 2 + \mathrm{i}$ není kořen charakteristického polynomu, budeme hledat řešení první části nehomogenní rovnice, tj. rovnice

$$x'' - 4x = 17\mathrm{e}^{2t}\cos t$$

ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{2t}(A\cos t + B\sin t)$. Protože

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \mathrm{e}^{2t}\big(2A\cos t + 2B\sin t - A\sin t + B\cos t\big) = \\
&= \mathrm{e}^{2t}\big((2A+B)\cos t + (-A+2B)\sin t\big)\,, \\
x''(t) &= \mathrm{e}^{2t}\big(2(2A+B)\cos t + 2(-A+2B)\sin t - (2A+B)\sin t + (-A+2B)\cos t\big) = \\
&= \mathrm{e}^{2t}\big((3A+4B)\cos t + (-4A+3B)\sin t\big)
\end{aligned}$$

dostaneme dosazení do rovnice a vykrácení výrazem e^{2t}

$$\begin{aligned}
(3A+4B)\cos t + (-4A+3B)\sin t - 4(A\cos t + B\sin t) &= \\
= (-A+4B)\cos t + (-4A-B)\sin t &= 17\cos t\,,
\end{aligned}$$

neboli

$$-A + 4B = 17\,, \quad -4A - B = 0\,, \quad \text{tj.} \quad A = -1\,, \quad B = 4\,.$$

Tedy řešení první části nehomogenní rovnice je $x_{N,1}(t) = \mathrm{e}^{2t}(4\sin t - \cos t)$
Protože $\mu_2 = -2$ je kořen charakteristického polynomu násobnosti jedna, budeme hledat řešení druhé části nehomogenní rovnice, tj. rovnice

$$x'' - 4x = -4\mathrm{e}^{-2t}$$

ve tvaru $x(t) = At\mathrm{e}^{-2t}$. Po dosazení a vykrácení výrazem e^{-2t} dostaneme

$$A(4t - 4) - 4At = -4A = -4\,, \quad \text{tj.} \quad A = 1\,.$$

Tedy druhá část nehomogenní rovnice má řešení $x_{N,2}(t) = -t\mathrm{e}^{-2t}$ a jedno řešení celé nehomogenní rovnice je $x_N(t) = x_{N,1}(t) + x_{N,2}(t)$. Z toho pak dostaneme obecné řešení dané diferenciální rovnice

$$x(t) = x_H(t) + x_N(t) = c_1\mathrm{e}^{2t} + c_2\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{2t}(4\sin t - \cos t) + t\mathrm{e}^{-2t}\,,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.
Tato čísla nejdeme tak, aby byly splněny počáteční podmínky. Protože

$$x'(t) = 2c_1\mathrm{e}^{2t} - 2c_2\mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{2t}(4\sin t - \cos t) + \mathrm{e}^{2t}(4\cos t + \sin t) + (1-2t)\mathrm{e}^{-2t}\,,$$

dávají počáteční podmínky

$$x(0) = 0 = c_1 + c_2 - 1\,, \qquad x'(0) = 5 = 2c_1 - 2c_2 + 3\,, \quad \text{tj} \quad c_1 = 1\,, \quad c_2 = 0\,.$$

Tedy řešení dané Chauchyovy úlohy je

$$x(t) = \mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{2t}(4\sin t - \cos t) + t\mathrm{e}^{-2t}\,.$$

Příklad 16.r. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x'' - 4x' + 4x = 2\mathrm{e}^{2t} + 4\sin 2t\,, \qquad x(0) = 1\,, \quad x'(0) = 2\,.$$

Řešení. Charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$ má jeden dvojnásobný kořen $\lambda = 2$. Proto je obecné řešení homogenní rovnice

$$x_H(t) = c_1\mathrm{e}^{2t} + c_2t\mathrm{e}^{2t}.$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.
Pravá strana nehomogenní rovnice je součet dvou funkcí $f_1(t) = 2\mathrm{e}^{2t}$ a $f_2(t) = 4\sin 2t$, pro které umíme najít řešení nehomogenní rovnice odhadem.
Protože $\mu_1 = 2$ je kořen charakteristického polynomu násobnosti 2, budeme hledat řešení příslušné nehomogenní rovnice, tj. rovnice $x'' - 4x' + 4x = 2\mathrm{e}^{2t}$, ve tvaru $x(t) = At^2\mathrm{e}^{2t}$, kde A je reálné číslo. Po dosazení a vykrácení výrazem e^{2t} dostaneme

$$A(4t^2 + 4t + 2) - 4A(2t^2 + 2t) + 4At^2 = 2A = 2\,, \quad \text{tj.} \quad A = 1\,.$$

Jedno řešení první části nehomogenní rovnice tedy je $x_{N,1}(t) = t^2\mathrm{e}^{2t}$.
Protože $\mu_2 = 2\mathrm{i}$ není kořen charakteristického polynomu, budeme hledat řešení diferenciální rovnice

$$x'' - 4x' + 4x = 4\sin 2t$$

ve tvaru $x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$, kde A a B jsou reálná čísla. Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned} -4A\cos 2t - 4B\sin 2t - 4(-2A\sin 2t + 2B\cos 2t) + 4(A\cos 2t + B\sin 2t) = \\ = 8A\sin 2t - 8B\cos 2t = 4\sin 2t\,. \end{aligned}$$

Tedy $A = \frac{1}{2}$ a $B = 0$ a řešení této části nehomogenní rovnice je $x_{N,2}(t) = \frac{1}{2}\cos 2t$.

Tak dostaneme jedno řešení nehomogenní rovnice $x_N(t) = t^2 \mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2} \cos 2t$ a obecné řešení celé diferenciální rovnice

$$x(t) = x_H(t) + x_N(t) = c_1 \mathrm{e}^{2t} + c_2 t \mathrm{e}^{2t} + t^2 \mathrm{e}^{2t} + \tfrac{1}{2} \cos 2t \,,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla. Protože

$$x'(t) = 2c_1 \mathrm{e}^{2t} + c_2(2t+1)\mathrm{e}^{2t} + (2t^2 + 2t)\mathrm{e}^{2t} - \sin 2t \,,$$

dostaneme pro ně z počátečních podmínek soustavu rovnic

$$c_1 + \tfrac{1}{2} = 1 \,, \quad 2c_1 + c_2 = 2 \,, \quad \text{tj.} \quad c_1 = \tfrac{1}{2} \,, \quad c_2 = 1 \,.$$

Tedy řešení dané Cauchyovy úlohy je

$$x(t) = \tfrac{1}{2} \mathrm{e}^{2t} + t \mathrm{e}^{2t} + t^2 \mathrm{e}^{2t} + \tfrac{1}{2} \cos 2t \,,$$

Příklad 17.r. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x'' + x = 2t^2 - t + 2 - 2t\mathrm{e}^{-t} \,, \qquad x(0) = 1 \,, \quad x'(0) = 0 \,.$$

Řešení. Charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$ má dva komplexné sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}$. Proto je obecné řešení homogenní rovnice

$$x_H(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \,,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.
Pravá strana nehomogenní rovnice je součet funkcí $f_1(t) = 2t^2 - t + 2$ a $f_2(t) = -2t\mathrm{e}^{-t}$, pro které umíme najít řešení nehomogenní rovnice odhadem.
Protože $\mu_1 = 0$ není kořenem charakteristického polynomu, budeme hledat řešení pro první část nehomogenní rovnice ve tvaru $x(t) = At^2 + Bt + C$, kde A, B a C jsou reálná čísla. Po dosazení dostaneme

$$2A + At^2 + Bt + C = 2t^2 - t + 2 \,, \quad \text{tj.} \quad A = 2 \,, \quad B = -1 \,, \quad C = -2 \,.$$

Tedy řešení první části nehomogenní rovnice je $x_{N,1}(t) = 2t^2 - t - 2$.
Protože ani $\mu_2 = -1$ není kořen charakteristického polynomu, budeme hledat řešení druhé části nehomogenní rovnice ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{-t}(At + B)$, kde A a B jsou reálná čísla. Po dosazení do příslušné diferenciální rovnice a vykrácení výrazem e^{-t} dostaneme

$$At + B - 2A + (At + B) = 2At + (-2A + 2B) = -2t \,, \quad \text{tj.} \quad A = -1 \,, \quad B = -1 \,.$$

Tedy řešení druhé části nehomogenní rovnice je $x_{N,2}(t) = -\mathrm{e}^{-t}(t+1)$.
Proto je jedno řešení nehomogenní rovnice

$$x_N(t) = x_{N,1}(t) + x_{N,2}(t) = 2t^2 - t - 2 - \mathrm{e}^{-t}(t+1)$$

a její obecné řešení

$$x(t) = x_H(t) + x_N(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 2t^2 - t - 2 - \mathrm{e}^{-t}(t+1) \,,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla, která najdeme z počátečních podmínek. Protože

$$x'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t + 4t - 1 + t\mathrm{e}^{-t} \,,$$

vedou počáteční podmínky k soustavě rovnic

$$c_1 - 3 = 1 \,, \quad c_2 - 1 = 0 \,, \quad \text{neboli} \quad c_1 = 4 \,, \quad c_2 = 1 \,.$$

Tedy řešení dané Cauchyovy úlohy je

$$x(t) = 4\cos t + \sin t + 2t^2 - t - 2 - \mathrm{e}^{-t}(t+1) \,.$$

Příklad 18.r. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x'' + 4x = 2\mathrm{e}^{-2t} + 5\cos 3t \,, \qquad x(0) = 1 \,, \quad x'(0) = -1 \,.$$

Řešení. Charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + 4$ má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 2\mathrm{i}$. Proto je obecné řešení homogenní rovnice

$$x_H(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \,,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.
Pravá strana nehomogenní rovnice je součet funkcí $f_1(t) = 2\mathrm{e}^{-2t}$ a $f_2(t) = 5\cos 3t$, pro které umíme najít řešení nehomogenní rovnice odhadem.
Protože $\mu_1 = -2$ není kořen charakteristického polynomu, budeme hledat řešení, které odpovídá funkci $f_1(t)$ ve tvaru $x(t) = A\mathrm{e}^{-2t}$, kde A je reálné číslo. Po dosazení do příslušné diferencální rovnice pro něj dostaneme $8A = 2$, neboli $A = \frac{1}{4}$. Tedy řešení první části nehomogenní rovnice je $x_{N,1}(t) = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2t}$.
Protože $\mu_2 = 3\mathrm{i}$ není kořen charakteristického polynomu, budeme hledat řešení, které odpovídá funkci $f_2(t)$ ve tvaru $x(t) = A\cos 3t + B\sin 3t$, kde A a B jsou reálná čísla. Po dosazení do příslušné diferencální rovnice pro ně dostaneme

$$-9A\cos 3t - 9B\sin 3t + 4A\cos 3t + 4B\sin 3t = 5\cos 3t \,, \quad \text{tj.} \quad A = -1 \,, \quad B = 0 \,.$$

Proto je řešení druhé části nehomogenní rovnice $x_{N,2}(t) = -\cos 3t$.
Jedno řešení celé nehomogenní rovnice pak je

$$x_N(t) = x_{N,1}(t) + x_{N,2}(t) = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2t} - \cos 3t$$

a pro obecné řešení nehomogenní rovnice dostaneme

$$x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2t} - \cos 3t \,,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla. Ty musíme zvolit tak, aby byly splněny počáteční podmínky. Protože

$$x'(t) = -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2t} + 3\sin 3t \,,$$

dávají počáteční podmínky

$$c_1 + \tfrac{1}{4} - 1 = 1 \,, \quad 2c_2 - \tfrac{1}{2} = -1 \,, \quad \text{tj.} \quad c_1 = \tfrac{7}{4} \,, \quad c_2 = -\tfrac{1}{4} \,.$$

Z toho dostaneme řešení dané Cauchyovy úlohy

$$x(t) = \tfrac{7}{4}\cos 2t - \tfrac{1}{4}\sin 2t + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2t} - \cos 3t\,.$$

Příklad 19.r. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x'' + x = t + \sin t\,, \qquad x(0) = 2\,, \quad x'(0) = 1\,.$$

Řešení. Charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$ má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}$. Proto je obecné řešení homogenní rovnice

$$x_H(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t\,,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.
Pravá strana nehomogenní rovnice je součet funkcí $f_1(t) = t$ a $f_2(t) = \sin t$, pro které umíme najít řešení nehomogenní rovnice odhadem.
Protože $\mu_1 = 0$ není kořen charakteristického polynomu, budeme hledat řešení, které odpovídá funkci $f_1(t) = t$ hledat ve tvaru $x(t) = At + B$, kde A a B jsou reálná čísla. Po dosazení do příslušné diferenciální rovnice dostaneme $A = 1$ a $B = 0$. Tedy řešení pro první část nehomohenní rovnice je $x_{N,1}(t) = t$.
Protože $\mu_2 = \mathrm{i}$ je kořen charakteristického polynomu násobnosti jedna, budeme hledat řešení nehomogenní diferenciální rovnice s pravou stranou $f_2(t)$ ve tvaru $x(t) = (A\cos t + B\sin t)\cdot t$. Protože

$$\begin{aligned} x'(t) &= A\cos t + B\sin t - At\sin t + Bt\cos t\,,\\ x''(t) &= -2A\sin t + 2B\cos t - At\cos t - Bt\sin t\,, \end{aligned}$$

dostaneme po dosazení do příslušné diferenciální rovnice

$$-2A\sin t + 2B\cos t - At\cos t - Bt\sin t + (A\cos t + B\sin t)t = -2A\sin t + 2B\cos t = \sin t\,,$$

neboli $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$. Tedy jedno řešení nehomogenní rovnice s pravou stranou $f_2(t) = \sin t$ je $x_{N,2}(t) = -\frac{1}{2}\,t\cos t$.
Pro jedno řešení celé nehomogenní rovnice tady máme

$$x_N(t) = x_{N,1}(t) + x_{N,2}(t) = t - \tfrac{1}{2}\,t\cos t$$

a její obecné řešení je

$$x(t) = x_H(t) + x_N(t) = c_1\cos t + c_2\sin t + t - \tfrac{1}{2}\,t\cos t\,,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla. Ty musíme zvolit tak, aby byly splněny počáteční podmínky. Protože

$$x'(t) = -c_1\sin t + c_2\cos t + 1 - \tfrac{1}{2}\cos t + \tfrac{1}{2}\,t\sin t\,,$$

musí platit

$$c_1 = 2\,, \quad c_2 + 1 - \tfrac{1}{2} = 1\,, \quad \text{tj.} \quad c_2 = \tfrac{1}{2}\,.$$

To nám dá řešení naší Cauchyovy úlohy

$$x(t) = 2\cos t + \tfrac{1}{2}\,\sin t + t - \tfrac{1}{2}\,t\cos t\,.$$

Příklad 20.r. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x'' + 4x = 8\sin^2 t\,, \qquad x(0) = -1\,, \quad x'(0) = 2\,.$$

Řešení. Charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + 4$ má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 2\mathrm{i}$. Proto je obecné řešení homogenní rovnice

$$x_H(t) = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t\,,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.
Pravá strana diferenciální rovnice, tj. funkce $f(t) = 8\sin^2 t$ nemá tvar, pro který umíme odhadnout řešení přímo. Ale protože

$$f(t) = 8\sin^2 t = 4(1-\cos 2t) = 4 - 4\cos 2t\,,$$

lze ji zapsat jako součet funkcí $f_1(t) = 4$ a $f_2(t) = -4\cos 2t$, pro které už řešení nehomogenní rovnice odhadnout umíme.
Protože $\mu_1 = 0$ není kořen charakteristického polynomu, budeme hledat řešení nehomogenní rovnice s pravou stranou $f_1(t) = 4$ ve tvaru $x(t) = A$, kde A je reálné číslo. Po dosazení dostaneme $4A = 4$, tj. $A = 1$. Tedy část řešení nehomogenní rovnice, které odpovídá funkci $f_1(t)$ je $x_{N,1}(t) = 1$.
Protože $\mu_2 = 2\mathrm{i}$ je kořen charakterístického polynomu násobnosti jedna, budeme hledat řešení nehomogenní rovnice s pravou stranou $f_2(t) = -4\cos 2t$ ve tvaru $x(t) = (A\cos 2t + B\sin 2t)\cdot t$. Po dosazení do opdovídající diferenciální dostaneme

$$\begin{aligned}-4At\cos 2t - 4Bt\sin 2t - 4A\sin 2t + 4B\cos 2t + 4(A\cos 2t + B\sin 2t)\cdot t &= \\ = -4A\sin 2t + 4B\cos 2t = -4\cos 2t\,.\end{aligned}$$

Tedy musí být $A = 0$ a $B = -1$ a jedno řešení nehomogenní rovnice s pravou stranou $f_2(t)$ je $x_{N,2}(t) = -t\sin 2t$.
Z toho dostaneme jedno řešení celé nehomogenní rovnice

$$x_N(t) = x_{N,1}(t) + x_{N,2}(t) = 1 - t\sin 2t$$

a její obecné řešení

$$x(t) = x_H(t) + x_N(t) = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t + 1 - t\sin 2t\,,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla. Ta musí najít tak, aby byly splněny počáteční podmínky. Protože

$$x'(t) = -2c_1\sin 2t + 2c_2\cos 2t - \sin 2t - 2t\cos 2t\,,$$

dostaneme pro ně soustavu rovnic

$$c_1 + 1 = -1\,, \quad 2c_2 = 2\,, \quad \text{tj.} \quad c_1 = -2\,, \quad c_2 = 1\,.$$

Tedy řešení dané Cauchyovy úlohy je

$$x(t) = -2\cos 2t + \sin 2t + 1 - t\sin 2t\,.$$

Příklad 1. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x'' + 5x' + 6x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.

$$\Big[x(t) = 2\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-3t}.\Big]$$

Příklad 2. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x'' + 8x' + 16x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

$$\Big[x(t) = t\mathrm{e}^{-4t}.\Big]$$

Příklad 3. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x'' + 2x' + 10x = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 1$.

$$\Big[x(t) = \mathrm{e}^{-t}\big(2\cos 3t + \sin 3t\big)\,.\Big]$$

Příklad 4. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$x^{(5)} + x^{(4)} - 7x''' - 3x'' + 24x' + 20x = 0\,,$$

jestliže víte, že jedno její řešení je $x(t) = \mathrm{e}^{2t}\cos t + 4\mathrm{e}^{-2t}$.

$$\Big[x(t) = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{-2t} + c_3t\mathrm{e}^{-2t} + c_4\mathrm{e}^{2t}\cos t + c_5\mathrm{e}^{2t}\sin t\,.\Big]$$

Příklad 5. Najděte obecné řešení homogenní rovnice k diferenciální rovnici

$$x'' + 4x' + 3x = (t+1)\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-3t} + \mathrm{e}^{-t}\cos 2t$$

a uveďte, v jakém tvaru budete hledat řešení nehomogenní rovnice.

$$\left[\begin{aligned} &x_H(t) = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{-3t};\\ &x_N(t) = (a_1t + b_1)\mathrm{e}^{t} + a_2\mathrm{e}^{-3t}\cdot t + \mathrm{e}^{-t}(a_3\cos 2t + b_3\sin 2t)\,.\end{aligned}\right]$$

Příklad 6. Najděte obecné řešení homogenní rovnice k diferenciální rovnici

$$x'' + x' - 6x = \mathrm{e}^{2t}\big(t + 2\cos 2t - t\sin 2t\big)$$

a uveďte, v jakém tvaru budete hledat řešení nehomogenní rovnice.

$$\left[\begin{aligned} &x_H(t) = c_1\mathrm{e}^{2t} + c_2\mathrm{e}^{-3t};\\ &x_N(t) = (a_1t + b_1)\mathrm{e}^{2t}\cdot t + \mathrm{e}^{2t}\big((a_2t + b_2)\cos 2t + (c_2t + d_2)\sin 2t\big)\,.\end{aligned}\right]$$

Příklad 7. Najděte obecné řešení homogenní rovnice k diferenciální rovnici

$$x'' + 2x' + x = t\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t}\sin t - \mathrm{e}^{-2t}\cos t$$

a uveďte, v jakém tvaru budete hledat řešení nehomogenní rovnice.

$$\left[\begin{aligned} &x_H(t) = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2t\mathrm{e}^{-t};\\ &x_N(t) = (a_1t + b_1)\mathrm{e}^{-t}\cdot t^2 + \mathrm{e}^{-t}(a_2\cos t + b_2\sin t) + \mathrm{e}^{-2t}(a_3\cos t + b_3\sin t)\,.\end{aligned}\right]$$

Příklad 8. Najděte obecné reálné řešení homogenní rovnice k rovnici

$$x'' + 2x' + 10x = (t+1)\mathrm{e}^{-t} + (\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t})\cos 3t$$

a uveďte, v jakém tvaru budete hledat řešení nehomogenní rovnice.

$$\left[\begin{array}{l} x_H(t) = c_1\mathrm{e}^{-t}\cos 3t + c_2\mathrm{e}^{-t}\sin 3t\,; \\ x_N(t) = (a_1t+b_1)\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{t}(a_2\cos 3t + b_2\sin 3t) + \mathrm{e}^{-t}(a_3\cos 3t + b_3\sin 3t)\cdot t\,. \end{array}\right]$$

Příklad 9. Najděte obecné reálné řešení homogenní rovnice k rovnici

$$x'' - 4x' + 8x = \mathrm{e}^{2t}\big(t - \sin 2t + 2\cos t\big)$$

a uveďte, v jakém tvaru budete hledat řešení nehomogenní rovnice.

$$\left[\begin{array}{l} x_H(t) = c_1\mathrm{e}^{2t}\cos 2t + c_2\mathrm{e}^{2t}\sin 2t\,; \\ x_N(t) = (a_1t+b_1)\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{2t}(a_2\cos 2t + b_2\sin 2t)\cdot t + \mathrm{e}^{2t}(a_3\cos t + b_3\sin t)\,. \end{array}\right]$$

Příklad 10. Uveďte, v jakém tvaru budete hledat partikulární řešení diferenciální rovnice

$$x''' - 3x'' + 4x = (t-2)\mathrm{e}^{t} + 4\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^{-t}\sin 2t + 2t\mathrm{e}^{-t}\cos 2t\,.$$

$$\Big[x_N(t) = (a_1t+b_1)\mathrm{e}^{t} + a_2\mathrm{e}^{2t}\cdot t^2 + \mathrm{e}^{-t}\big((a_3t+b_3)\cos 2t + (c_3t+d_3)\sin 2t\,.\Big]$$

Příklad 11. Uveďte, v jakém tvaru budete hledat partikulární řešení diferenciální rovnice

$$x''' + x'' + 3x' - 5x = t\mathrm{e}^{-t} + 4\mathrm{e}^{-2t}\cos t - 3\mathrm{e}^{-t}\sin 2t\,.$$

$$\Big[x_N(t) = (a_1t+b_1)\mathrm{e}{-t} + \mathrm{e}^{-2t}(a_2\cos t + b_2\sin t) + \mathrm{e}^{-t}(a_3\cos 2t + b_3\sin 2t)\cdot t\,.\Big]$$

Příklad 12. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $x'' + x' - 2x = 5\cos 2t + 6\mathrm{e}^{-2t}$.

$$\Big[x(t) = c_1\mathrm{e}^{t} + c_2\mathrm{e}^{-2t} - \tfrac{3}{4}\cos 2t + \tfrac{1}{4}\sin 2t - 2t\mathrm{e}^{-2t}.\Big]$$

Příklad 13. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $x'' - 4x' + 4x = 3\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-t}$.

$$\Big[x(t) = c_1\mathrm{e}^{2t} + c_2t\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{3}{2}t^2\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{1}{9}\mathrm{e}^{-t}.\Big]$$

Příklad 14. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $x'' + x = \sin t + \cos 2t$.

$$\Big[x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t - \tfrac{1}{2}t\cos t - \tfrac{1}{3}\cos 2t\,.\Big]$$

Příklad 15. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$x'' - 2x' + 5x = (t+2)\mathrm{e}^{t}\cos 2t - 3\mathrm{e}^{t}\sin 2t\,.$$

$$\Big[x(t) = c_1\mathrm{e}^{t}\cos 2t + c_2\mathrm{e}^{t}\sin 2t + \tfrac{1}{16}\mathrm{e}^{t}\big((2t+4)\sin 2t + 13\cos 2t\big)\cdot t\,.\Big]$$

Příklad 16. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x'' + x' - 6x = 4(t+1)\mathrm{e}^{-2t} - 5\mathrm{e}^{-3t}\,, \qquad x(0) = 1\,, \quad x'(0) = 0\,.$$

$$\Big[x(t) = \tfrac{13}{20}\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{3}{5}\mathrm{e}^{-3t} - \tfrac{1}{4}(4t+1)\mathrm{e}^{-2t} + t\mathrm{e}^{-3t}\Big]$$

Příklad 17. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x'' - 2x' - 3x = 10\mathrm{e}^{-t}\sin 2t\,, \qquad x(0) = 2\,, \quad x'(0) = 3\,.$$

$$\Big[x(t) = -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} + \tfrac{3}{2}\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{-t}\cos 2t - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\sin 2t\,.\Big]$$

Příklad 18. Najděte řešení diferenciální rovnice $x''+2x'+x = \mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-t}\cos t$, které splňuje počáteční podmínky $x(0) = 0$ a $x'(0) = 0$. $\left[x(t) = \mathrm{e}^{-t}\big(1 + \frac{1}{2}\,t^2 - \cos t\big)\,.\right]$

Příklad 19. Najděte řešení diferenciální rovnice $x''+6x'+10x = (t+2)\mathrm{e}^{-3t}$, které splňuje počáteční podmínky $x(0) = 1$ a $x'(0) = 0$. $\left[x(t) = \mathrm{e}^{-3t}\big(t + 2 - \cos t + 2\sin t\big)\,.\right]$

Příklad 20. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x'' + 2x' + 2x = \mathrm{e}^{-2t}(t + 1) + 2\cos 2t - \sin 2t\,, \qquad x(0) = 1\,, \quad x'(0) = -2\,.$$

$$\left[x(t) = -\tfrac{5}{2}\,\mathrm{e}^{-t}\sin t + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t}(t + 2) + \tfrac{1}{2}\,\sin 2t\,.\right]$$