Soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

<u>Soustava lineárních diferenciální rovnic s konstantními koeficienty</u>
je soustava

$$
\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t)\,, \\
x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + f_2(t)\,, \\
&\ldots \\
x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t)\,,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

kde a_{ik} jsou reálná čísla a $f_k(t)$ jsou speciální funkce, které budeme specifikovat později.
Abychom zkrátili zápis, zavedeme označení

$$
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad
\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.
$$

Soustavu diferenciálních rovnic (1) lze pak psát ve tvaru

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)\,.$$

<u>Obecné řešení</u>
soustavy diferenciálních rovnic (1) obsahuje n–konstant c_1, c_2, …, c_n.

<u>Počáteční podmínka a Cauchyova úloha</u>
Počáteční podmínka pro soustavu diferenciálních rovnic (1) je

$$x_1(t_0) = \xi_1\,, \qquad x_2(t_0) = \xi_2\,, \qquad \ldots, \qquad x_n(t_0) = \xi_n\,. \tag{2}$$

Úloha najít řešení soustavy diferenciálních rovnic (1), které splňuje počáteční podmínku (2) se nazývá Cauchyova úloha.

<u>Důsledky linearity soustavy (1)</u>
Protože je zobrazení

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' - \mathbf{A}\mathbf{x}$$

lineární, tj. pro každé vektorové funkce $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$ a konstanty c_1, c_2 je

$$\mathbf{L}(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = c_1\mathbf{L}(\mathbf{x}_1) + c_2\mathbf{L}(\mathbf{x}_2)\,,$$

platí pro řešení soustavy diferenciálních rovnic $\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(t)$, tj. soustavy (1), obecné věty, které platí pro řešení každé lineární rovnice.

<u>*Princip superpozice:*</u>
Jestliže jsou $\mathbf{x}_1$, resp. $\mathbf{x}_2$, řešení soustavv $\mathbf{L}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{f}_1(t)$, resp. $\mathbf{L}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{f}_2(t)$, a c_1, c_2 jsou konstanty, je $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$ řešení soustavy $\mathbf{L}(\mathbf{x}) = c_1\mathbf{f}_1(t) + c_2\mathbf{f}_2(t)$.

Homogenní a nehomogenní soustava
Jestliže je $\mathbf{f}(t) \neq 0$ nazývá se soustava $\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(t)$, tj. soustava (1), nehomogenní, a je-li $\mathbf{f}(t) = 0$, nazývá se soustava $\mathbf{L}(\mathbf{x}) = 0$, tj. soustava

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\ldots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{aligned} \qquad \text{neboli} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}\,, \tag{3}$$

homogenní soustava příslušná k soustavě (1).
Obecné řešení $\mathbf{x}$ nehomogenní soustavy $\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(t)$, tj. řešení s konstantami, lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_H(t) + \mathbf{x}_N(t)\,,$$

kde $\mathbf{x}_H(t)$ je obecné řešení příslušné homogenní soustavy (3) a $\mathbf{x}_N(t)$ je jedno řešení nehomogenní soustavy (1).
Množina všech řešení homogenní soustavy $\mathbf{L}(\mathbf{x}) = 0$ tvoří vektorový prostor $\mathcal{V}_H$.

Řešení homogenní soustavy
Pro homogenní soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu (3) je dimenze vektorového prostoru $\mathcal{V}_H$ rovna n. Proto stačí najít n jejích lineárně nezávislých řešení $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, …, $\mathbf{x}_n(t)$, tzv. fundamentální systém řešení homogenní diferenciální soustavy (3). Obecné řešení homogenní soustavy (3) pak je

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \ldots + c_n\mathbf{x}_n(t)\,,$$

kde c_1, c_2, …, c_n jsou (obecně komplexní) konstanty.

Charakteristický polynom a charakteristická rovnice
Některá řešení homogenní soustavy (3) lze najít ve tvaru

$$x_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} v_k\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, n\,,$$

kde λ a v_k jsou komplexní konstanty a všechna v_k nejsou rovna nule, neboli pomocí vektorů

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

je nenulový vektor. Protože $\mathbf{x}'(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}$, získáme po dosazeni do rovnice (3) pro λ a $\mathbf{v}$ soustavu rovnic

$$\lambda\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v}\,, \quad \text{neboli} \quad \big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\big)\mathbf{v} = 0\,, \tag{4}$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice. Soustava (4) je soustava n rovnic pro n proměnných v_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, s parametrem λ. Aby tato soustava měla nenulové řešení $\mathbf{v}$, musí být matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ singulární, tj. musí platit

$$P(\lambda) = \det\big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\big) = 0\,. \tag{5}$$

Polynom $P(\lambda)$ je polynom stupně n a nazývá se charakteristický polynom. Rovnice (5), tj. rovnice $P(\lambda) = 0$, se nazývá charakteristická rovnice.
Jestliže je λ_0 řešení charakteristické rovnice a $\mathbf{v}$ řešení rovnice (4), kde $\lambda = \lambda_0$, je vektorová funkce $\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_0}\mathbf{v}$ řešení homogenní soustavy (3).

Reálná a komplexní řešení
Jestliže je $\lambda_0 = \alpha + \mathrm{i}\beta$, kde $\beta \neq 0$, komplexní řešení charakteristické rovnice, a $\mathbf{v}$ odpovídající řešení soustavy (4), je také $\overline{\lambda}_0 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ řešení charakteristické rovnice a za řešení odpovídající soustavy (4) lze zvolit vektor $\overline{\mathbf{v}}$, tj. vektor, jehož složky jsou komplexně sdružená čísla, ke složkám vektoru $\mathbf{v}$. V takovém případě lze místo dvou komplexních řešeních homogenní soustavy (3)

$$\mathbf{z}_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\mathbf{v}\,, \qquad \mathbf{z}_2(t) = \overline{\mathbf{z}}_1(t) = \mathrm{e}^{\overline{\lambda}_0 t}\overline{\mathbf{v}}$$

zvolit dvojici reálných řešení

$$\mathbf{x}_1(t) = \frac{\mathbf{z}_1(t) + \overline{\mathbf{z}}_1(t)}{2} = \mathrm{Re}\big(\mathbf{z}_1(t)\big)\,, \qquad \mathbf{x}_2(t) = \frac{\mathbf{z}_1(t) - \overline{\mathbf{z}}_1(t)}{2\mathrm{i}} = \mathrm{Im}\big(\mathbf{z}_1(t)\big)\,.$$

Dvojnásobný kořen charakteristické rovnice
Pro soustavu dvou rovnic prvního řádu může ještě nastat případ, že λ_0 dvojnásobný kořen charakteristické rovnice a rovnice $\big(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{I}\big)\mathbf{v} = 0$ má pouze jedno lineárně nezávislé řešení $\mathbf{v}_1$, tj. platí

$$\big(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{I}\big)\mathbf{v}_1 = 0\,.$$

Jedno řešení soustavy (3) je stejně jako dříve $\mathbf{x}_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\mathbf{v}_1$. Druhé řešení lze pak najít následujícím postupem: Existuje vektor $\mathbf{v}_2$ takový, že platí

$$\big(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{I}\big)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1\,.$$

Druhé řešení soustavy (3) pak je

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\big(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 t\big)\,.$$

Fundamentální systému řešení obecně
Je-li λ_0 kořen charakteristického polynomu násobnosti $k > 0$, je hodnost matice $\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{I}$ menší než n. Jestliže je hodnost této matice rovna r, lze pro toto λ_0 najít pouze $n - r$ lineárně nezávislých řešení soustavy (4).
Pokud je $n - r < k$ postupujeme tak, že pro daný kořen λ_0 najdeme všechny lineárně nezávislé řetězce vektorů $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_r$, pro které platí

$$\begin{aligned}
\big(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{I}\big)\mathbf{v}_1 &= 0\,,\\
\big(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{I}\big)\mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1\,,\\
\big(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{I}\big)\mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_2\,,\\
&\vdots\\
\big(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{I}\big)\mathbf{v}_r &= \mathbf{v}_{r-1}\,,
\end{aligned}$$

a pomocí takového řetězce vektorů sestrojíme r řešení soustavy pomocí vztahů

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\mathbf{v}_1\,,\\
\mathbf{x}_2(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\big(\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_1\big)\\
\mathbf{x}_3(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\big(\mathbf{v}_3 + t\mathbf{v}_2 + \tfrac{1}{2}\,t^2\mathbf{v}_1\big)\\
&\vdots\\
\mathbf{x}_r(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\left(\sum_{k=0}^{r-1}\frac{t^k}{k!}\,\mathbf{v}_{r-k}\right).
\end{aligned}$$

Odhad řešení nehomogenní soustavy

Pro speciální pravou stranu soustavy (1), tj. pro jisté vektorové funkce $\mathbf{f}(t)$, lze najít jedno řešení této soustavy odhadem. Jedná se o vektorové funkce $\mathbf{f}(t)$, které jsou lineární kombinace funkcí

$$\mathbf{f}(t) = \mathrm{e}^{\mu t}\mathbf{P}_N(t) \qquad \text{a} \qquad \mathbf{f}(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\big(\mathbf{P}_{N_1}(t)\cos\omega t + \mathbf{P}_{N_2}(t)\sin\omega t\big)\,,$$

kde $\mathbf{P}_N(t)$ je vektorový polynom (obecně komplexní) stupně N, tj. vektorová funkce

$$\mathbf{P}_N(t) = \begin{pmatrix} P_{N_1}(t) \\ P_{N_2}(t) \\ \vdots \\ P_{N_n}(t) \end{pmatrix},$$

kde $P_{N_k}(t)$ jsou polynomy stupně N_k a $N = \max\big(N_1, N_2, \dots, N_n\big)$ a μ, ρ a ω jsou konstanty (konstanta μ může být i komplexní).

Z principu superpozice plyne, že stačí najít řešení nehomogenní soustavy (1) pro funkce $\mathbf{f}(t) = \mathrm{e}^{\mu t}\mathbf{P}_N(t)$ a $\mathbf{f}(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\big(\mathbf{P}_{N_1}(t)\cos\omega t + \mathbf{P}_{N_2}(t)\sin\omega t\big)$.

Odhad řešení pro vektorové funkce $\mathbf{f}(t) = \mathrm{e}^{\mu t}\mathbf{P}_N(t)$

Jestliže má vektorová funkce $\mathbf{f}(t)$ v nehomogenní soustavě (1) tvar $\mathbf{f}(t) = \mathrm{e}^{\mu t}\mathbf{P}_N(t)$, kde μ je konstanta a $\mathbf{P}_N(t)$ vektorový polynom stupně N (obecně mohou být μ i $\mathbf{P}_N(t)$ komplexní), existuje její řešení tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\mu t}\mathbf{Q}_{N+k}(t)\,,$$

kde $\mathbf{Q}_{N+k}(t)$ je polymon stupně $N + k$ a k je násobnost kořene μ v charakteristické polynomu $P(\lambda)$.

Odhad řešení pro vektorové funkce $\mathbf{f}(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\big(\mathbf{P}_{N_1}(t)\cos\omega t + \mathbf{P}_{N_2}(t)\sin\omega t\big)$

Jestliže má pravá strana nehomogenní soustavy (1), tj. vektorová funkce $\mathbf{f}(t)$, tvar $\mathbf{f}(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\big(\mathbf{P}_{N_1}(t)\cos\omega t + \mathbf{P}_{N_2}(t)\sin\omega t\big)$, kde ρ a ω jsou reálné konstanty a $\mathbf{P}_{N_1}(t)$, resp. $\mathbf{P}_{N_2}(t)$, jsou vektorové polynomy stupně N_1, resp. N_2, lze najít její řešení ve tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\big(\mathbf{R}_{N+k}(t)\cos\omega t + \mathbf{S}_{N+k}(t)\sin\omega t\big)\,,$$

kde $\mathbf{R}_{N+k}(t)$ a $\mathbf{S}_{N+k}(t)$ jsou polynomy stupně $N+k$, $N = \max(N_1, N_2)$ a k je násobnost kořene $\mu = \rho + \mathrm{i}\omega$ v charakteristickém polynomu (5).

Metoda eliminace

Jestliže máme soustavu n diferenciálních rovnic prvního řádu, lze k ní mnohdy sestrojit diferenciální rovnici n–tého řádu pro jednu z neznámých funkcí. Postup ukážeme na příkladě dvou rovnic prvního řádu.

Mějme soustavu dvou diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1(t)\,, \qquad x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(t) \tag{6}$$

a předpokládejme, že $a_{12} \neq 0$. Pak z první v (6) plyne, že

$$x_2 = \frac{1}{a_{21}}\left(x_1' - a_{11}x_1 - f_1(t)\right). \tag{7}$$

Tato rovnice nám umožňuje spočítat funkci $x_2(t)$ pro známé funkce $x_1(t)$

Jestliže derivujeme první z rovnic v (6), dostaneme

$$x_1'' = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + f_1'(t)\,.$$

Pokud do této rovnice dosadíme za x_2' z druhé rovnice v (6), získáme rovnici

$$x_1'' = a_{11}x_1' + a_{12}\big(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(t)\big) + f_1'(t)\,.$$

Jestliže do ní dosadíme za x_2 z (7), dostaneme diferenciální rovnice druhého řádu pro x_1. Je-li funkce $x_1(t)$ její řešení, najdeme odpovídajích druhou složku řešení $\mathbf{x}(t)$ ze vztahu (7).

Příklad 1.r. Najděte řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$x_1' = 2x_1 + 6x_2\,, \qquad x_2' = x_1 - 3x_2\,, \tag{8}$$

pro které platí $x_1(0) = 4$ a $x_2(0) = 3$.

Řešení. Jedná se o homogenní soustavu dvou lineárních rovnic. Proto k nalezení obecného řešení soustavy (8) stačí najít její dvě lineárně nezávislá řešení.

Protože se jedná o soustavu s konstantními koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $\mathbf{x} = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}$, kde λ je konstanta a $\mathbf{v}$ nenulový konstantní vektor.

Matice $\mathbf{A}$ pro soustavu (8) a matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ jsou

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\,, & 6 \\ 1\,, & -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2-\lambda\,, & 6 \\ 1\,, & -3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice soustavy

$$P(\lambda) = \det\big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\big) = \lambda^2 + \lambda - 12 = 0$$

má dvě řešení $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -4$.

Pro $\lambda_1 = 3$ dostaneme pro vektor $\mathbf{v}_1$ rovnici

$$\big(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}\big)\mathbf{v}_1 = 0\,, \quad \text{tj.} \quad -v_1 + 6v_2 = 0\,,$$

která má nenulové řešení například $v_1 = 6$, $v_2 = 1$. Tedy jedno řešení soustavy (8) je

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pro $\lambda_2 = -4$ dostaneme pro vektor $\mathbf{v}_2$ rovnici

$$\big(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}\big)\mathbf{v}_2 = 0\,, \quad \text{tj.} \quad v_1 + v_2 = 0\,,$$

která má nenulové řešení například $v_1 = 1$, $v_2 = -1$. Tedy druhé řešení soustavy (8) je

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathrm{e}^{-4t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Proto je obecné řešení soustavy (8)

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t)\,, \quad \text{tj.} \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\mathrm{e}^{-4t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

neboli

$$x_1(t) = 6c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2\mathrm{e}^{-4t}\,, \qquad x_2(t) = c_1\mathrm{e}^{3t} - c_2\mathrm{e}^{-4t}\,,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné konstanty.
Ty musíme najít tak, aby byly splněny počáteční podmínky $x_1(0) = 4$ a $x_2(0) = 3$. Z těchto podmínek dostaneme

$$6c_1 + c_2 = 4\,, \quad c_1 - c_2 = 3\,, \quad \text{tj.} \quad c_1 = 1\,, \quad c_2 = -2\,.$$

Tedy řešení dané Cauchyovy úlohy je

$$x_1(t) = 6\mathrm{e}^{3t} - 2\mathrm{e}^{-4t}\,, \qquad x_2 = \mathrm{e}^{3t} + 2\mathrm{e}^{-4t}\,.$$

Příklad 2.r. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x_1' = -x_1 - 2x_2\,, \quad x_2' = 4x_1 - 5x_2\,, \qquad x_1(0) = 1\,, \quad x_2(0) = -1\,. \tag{9}$$

Řešení. Jedná se o homogenní soustavu dvou lineárních rovnic. Proto k nalezení obecného řešení soustavy (9) stačí najít její dvě lineárně nezávislá řešení.
Protože se jedná o soustavu s konstantními koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $\mathbf{x} = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}$, kde λ je konstanta a $\mathbf{v}$ nenulový konstantní vektor.
Matice $\mathbf{A}$ soustavy (9) a matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ jsou

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1\,, & -2 \\ 4\,, & -5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1-\lambda\,, & -2 \\ 4\,, & -5-\lambda \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice soustavy

$$P(\lambda) = \det\bigl(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\bigr) = \lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$$

má komplexně sdružená řešení $\lambda_{1,2} = -3 \pm 2\mathrm{i}$.
Najdeme vlastní vektor $\mathbf{v}$ matice $\mathbf{A}$, který odpovídá vlastní hodnotě $\lambda = -3 + 2\mathrm{i}$, tj. nenulové řešení rovnice

$$\bigl(\mathbf{A} + (3 - 2\mathrm{i})\mathbf{I}\bigr)\mathbf{v} = 0\,, \quad \text{tj.} \quad (1 - \mathrm{i})v_1 - v_2 = 0\,.$$

Jedno takové řešení je $v_1 = 1$ a $v_2 = 1 - \mathrm{i}$. Odpovídající komplexní řešení soustavy (9) je

$$\mathbf{z}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v} = \mathrm{e}^{(-3+2\mathrm{i})t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Protože má soustava (9) reálné koeficienty, jsou dvě lineárně nezávislá řešení této soustavy

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= \mathrm{Re}\bigl(\mathbf{z}(t)\bigr) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{-3t}(\cos 2t + \mathrm{i}\sin 2t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \mathrm{i} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_2(t) &= \mathrm{Im}\bigl(\mathbf{z}(t)\bigr) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{-3t}(\cos 2t + \mathrm{i}\sin 2t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \mathrm{i} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pomocí dvou lineárně nezávislých řešení $\mathbf{x}_1(t)$ a $\mathbf{x}_2(t)$ napíšeme obecné řešení soustavy (9) jako jejich lineární kombinaci

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t)\,, \quad \text{tj.} \quad \begin{aligned} x_1(t) &= c_1\mathrm{e}^{-3t}\cos 2t + c_2\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t\,, \\ x_2(t) &= c_1\mathrm{e}^{-3t}(\cos 2t + \sin 2t) + c_2\mathrm{e}^{-3t}(\sin 2t - \cos 2t)\,, \end{aligned}$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné konstanty. Ty musíme najít tak, aby byly splněny počáteční podmínky $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -1$. Z toho dostaneme

$$c_1 = 1\,, \quad c_1 - c_2 = -1\,, \quad \text{tj.} \quad c_1 = 1\,, \quad c_2 = 2\,.$$

Tedy řešení Cauchyovy úlohy (9) je

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{-3t}(\cos 2t + 2\sin 2t)\,, \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^{-3t}(-\cos 2t + 3\sin 2t)\,.$$

Příklad 3.r. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x_1' = x_1 - 3x_2\,, \quad x_2' = 3x_1 - 5x_2\,, \qquad x_1(0) = 3\,, \quad x_2(0) = 2\,. \tag{10}$$

Řešení. Jedná se o homogenní soustavu dvou lineárních rovnic. Proto k nalezení obecného řešení soustavy (10) stačí najít její dvě lineárně nezávislá řešení.
Protože se jedná o soustavu s konstantními koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $\mathbf{x} = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}$, kde λ je konstanta a $\mathbf{v}$ nenulový konstantní vektor.
Matice $\mathbf{A}$ soustavy (10) a matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ jsou

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1\,, & -3 \\ 3\,, & -5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1-\lambda\,, & -3 \\ 3\,, & -5-\lambda \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice soustavy

$$P(\lambda) = \det\bigl(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\bigr) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

má jedno řešení $\lambda = -2$.
Pro tuto hodnotu λ nalezneme vlastní vektor matice $\mathbf{A}$, tj. řešení rovnice

$$\bigl(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}\bigr)\mathbf{v}_1 = 0\,, \quad \text{tj.} \quad v_1 - v_2 = 0\,.$$

Jedno její nenulové řešení je $v_1 = v_2$ a odpovídající řešení soustavy (10) je

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}_1 = \mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Druhé lineárně nezávislé řešení soustavy (10) bude mít tvar

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\bigl(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 t\bigr)\,,$$

kde $\mathbf{v}_2$ je řešením rovnice

$$\bigl(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\bigr)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1\,, \quad \text{tj.} \quad 3v_1 - 3v_2 = 1\,.$$

Jedno řešení této rovince je $v_1 = \frac{1}{3}$, $v_2 = 0$, a proto druhé lineárně nezávislé řešení soustavy (10) je

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + t \\ t \end{pmatrix}.$$

Pomocí lineárně nezávislých řešení $\mathbf{x}_1(t)$ a $\mathbf{x}_2(t)$ sestrojíme obecné řešení soustavy (10)

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t)\,, \quad \text{tj.} \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} + t \\ t \end{pmatrix},$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné konstanty.
Tyto musíme zvolit tak, aby byly splněny počáteční podmínky. Ty dávají

$$c_1 + \tfrac{1}{3}\,c_2 = 3\,, \quad c_1 = 2\,, \quad \text{tj.} \quad c_1 = 2\,, \quad c_2 = 3\,.$$

Tedy řešení Cauchyovy úlohy (10) je

$$x_1(t) = 3(1+t)\mathrm{e}^{-2t}\,, \qquad x_2(t) = (2+3t)\mathrm{e}^{-2t}\,.$$

Příklad 4.r. Najděte obecné reálné řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$x_1' + x_2' - 5x_1 = 0\,, \qquad 2x_1' - 3x_2' + 25x_2 = 0\,. \tag{11}$$

Řešení. Soustava (11) není, na rozdíl od předešlých příkladů, vyřešena vzhledem k derivaci. Můžeme postupovat tak, že ji vyřešíme, tj. napíšeme ji ve tvaru $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ a budeme postupovat jako v předešlých případech. Jiná možnost je hledat její řešení přímo ve tvaru $\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}$, tj. jako $x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}v_1$ a $x_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}v_2$, kde λ je obecně komplexní konstanta a $\mathbf{v}$ je nenulový konstantní vektor.
V tomto příkladě ukážeme druhý způsob. Protože $x_1'(t) = \lambda\mathrm{e}^{\lambda t}v_1$ a $x_2'(t) = \lambda\mathrm{e}^{\lambda t}v_2$, dostaneme po dosazení do soustavy (11) soustavu algebraických rovnic

$$(\lambda - 5)v_1 + \lambda v_2 = 0\,, \qquad 2\lambda + (-3\lambda + 25)v_2 = 0$$

pro v_1 a v_2 s parametrem λ. Protože hledáme nenulové řešení této soustavy, musí být obě rovnice lineárně závislé. Jestliže tuto soustavu napíšeme v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda - 5\,, & \lambda \\ 2\lambda\,, & -3\lambda + 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

lze zapsat podmínku lineární závislosti rovnic soustavy jako

$$\det\begin{pmatrix} \lambda - 5\,, & \lambda \\ 2\lambda\,, & -3\lambda + 25 \end{pmatrix} = -5\lambda^2 + 40\lambda - 125 = 0\,.$$

Tedy λ je řešení kvadratické rovnice $\lambda^2 - 8\lambda + 25 = 0$. Ta má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = 4 \pm 3\mathrm{i}$.
Pro $\lambda = 4 + 3\mathrm{i}$ dostaneme pro v_1 a v_2 soustavu

$$\begin{pmatrix} -1 + 3\mathrm{i}\,, & 4 + 3\mathrm{i} \\ 8 + 6\mathrm{i}\,, & 13 - 9\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I když to není na první pohled vidět, jsou tyto rovnice lineárně závislé a lze je zapsat například jako

$$(-1+3\mathrm{i})v_1 + (4+3\mathrm{i})v_2 = 0\,.$$

Tato rovnice má nenulové řešení například $v_1 = 4+3\mathrm{i}$ a $v_2 = 1-3\mathrm{i}$.
Pomocí $\lambda = 4+3\mathrm{i}$ a vektoru $\mathbf{v}$ dostaneme komplexní řešení soustavy (11)

$$\mathbf{z}(t) = \mathrm{e}^{(4+3\mathrm{i})t}\begin{pmatrix}4+3\mathrm{i}\\1-3\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

Protože má soustava (11) reálné koeficienty, lze za dvě lineárně nezávislá řešení vzít

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(t) &= \mathrm{Re}\big(\mathbf{z}(t)\big) = \mathrm{e}^{4t}\begin{pmatrix}4\cos 3t - 3\sin 3t\\ \cos 3t + 3\sin 3t\end{pmatrix},\\ \mathbf{x}_2(t) &= \mathrm{Im}\big(\mathbf{z}(t)\big) = \mathrm{e}^{4t}\begin{pmatrix}4\sin 3t + 3\cos 3t\\ \sin 3t - 3\cos 3t\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Obecné řešení $\mathbf{x}(t)$ soustavy (11) pak je $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t)$, tj.

$$\begin{aligned}x_1(t) &= c_1\mathrm{e}^{4t}(4\cos 3t - 3\sin 3t) + c_2\mathrm{e}^{4t}(4\sin 3t + 3\cos 3t)\,,\\ x_2(t) &= c_1\mathrm{e}^{4t}(\cos 3t + 3\sin 3t) + c_2\mathrm{e}^{4t}(\sin 3t - 3\cos 3t)\,.\end{aligned}$$

Příklad 5.r. Najděte obecné reálné řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$x_1'' + x_2' + 2x_1 = 0\,, \qquad x_2'' + 3x_1' - 2x_2 = 0\,. \tag{12}$$

Řešení. Protože se jedná o soustavu dvou lineárních homogenních rovnic druhého řádu, musíme najít její čtyři lineárně nezávislá řešení, a protože jde o soustavu s konstantními koeficienty, budeme hledat její řešení ve tvaru $\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}$, kde λ je komplexní konstanta a $\mathbf{v}$ je nenulový vektor. Po dosazení do soustavy (12) dostaneme pro v_1 a v_2 soustavu dvou rovnic

$$(\lambda^2+2)v_1 + \lambda v_2 = 0\,, \qquad 3\lambda v_1 + (\lambda^2-2)v_2 = 0$$

s parametrem λ. Protože hledáme nenulové řešení této soustavy, musí být

$$\det\begin{pmatrix}\lambda^2+2\,, & \lambda\\ 3\lambda\,, & \lambda^2-2\end{pmatrix} = \lambda^4 - 3\lambda^2 - 4 = 0\,.$$

Tato rovnice má řešení $\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}$, $\lambda_{3,4} = \pm 2$.
Pro $\lambda_1 = \mathrm{i}$ dostaneme pro v_1 a v_2 rovnici $v_1 + \mathrm{i}v_2 = 0$, která má nenulové řešení $v_1 = -\mathrm{i}$ a $v_2 = 1$. Tím dostaneme jedno komplexní řešení

$$\mathbf{z}_1(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}.$$

Protože má soustava reálné koeficienty, lze pomocí tohoto komlexního řešení sestrojit dvě reálná řešení

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathrm{Re}\big(\mathbf{z}_1(t)\big) = \begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2(t) = \mathrm{Im}\big(\mathbf{z}_1(t)\big) = \begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}.$$

Pro $\lambda_3 = 2$ získáme pro v_1 a v_2 rovnici $3v_1 + v_2 = 0$ která má nenulové řešení $v_1 = 1$ a $v_2 = -3$. Tomu odpovídá řešení $\mathbf{x}_3$ soustavy (12)

$$\mathbf{x}_3(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ -3\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.$$

Podobně pro $\lambda_4 = -2$ dostaneme řešení soustavy (12)

$$\mathbf{x}_4(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} \\ 3\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Obecné řešení soustavy (12) je pak obecná lineární kombinace těchto řešení, tj.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 \sin t - c_2 \cos t + c_3 \mathrm{e}^{2t} + c_4 \mathrm{e}^{-2t}\,, \\ x_2(t) &= c_1 \cos t + c_2 \sin t - 3c_3 \mathrm{e}^{2t} + 3c_4 \mathrm{e}^{-2t}\,. \end{aligned}$$

Příklad 6.r. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{aligned} x_1'' &= x_1 - 2x_2\,, \qquad & x_1(0) &= 1\,, \quad & x_1'(0) &= 2 \\ x_2'' &= 5x_1 - 6x_2\,, \qquad & x_2(0) &= 4\,, \quad & x_2'(0) &= -4\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Řešení. Soustava (13) je soustava dvou lineárních homogenních diferenciálních rovnic druhého řádu. Proto k nalezení jejího obecného řešení musíme najít její čtyři lineárně nezávislá řešení. Danou soustavu můžeme řešit tak, že ji převedeme na soustavu čtyř rovnic prvního řádu nebo na jednu diferenciální rovnici čtvrtého řádu nebo přímo. V tomto příkladě zvolíme poslední způsob.

Protože jde o soustavu diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} v_1$ a $x_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} v_2$, kde λ je komplexní konstanta a (v_1, v_2) je nenulový konstantní vektor. Protože $x_1''(t) = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t} v_1$ a $x_2''(t) = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t} v_2$, dostaneme pro v_1 a v_2 soustavu dvou lineárních rovnic

$$\lambda^2 v_1 = v_1 - 2v_2\,, \qquad \lambda^2 v_2 = 5v_1 - 6v_2$$

s parametrem λ. Protože hledáme nenulové řešení této soustavy, musí být tyto rovnice lineárně závislé. Když zapíšeme soustavu v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda^2\,, & -2 \\ 5\,, & -6-\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

lze podmínku lineární závislosti vyjádřit jako

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda^2\,, & -4 \\ 5\,, & -6-\lambda^2 \end{pmatrix} = \lambda^4 + 5\lambda^2 + 4 = 0\,.$$

Tato rovnice má čtyři komplexní řešení $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}$ a $\lambda_{3,4} = \pm 2\mathrm{i}$.

Pro $\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}$ dostaneme pro v_1 a v_2 soustavu $v_1 - v_2 = 0$, která má nenulové řešení $v_1 = v_2 = 1$. Tomu odpovídají dvě komplexní řešení

$$\mathbf{z}_1(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{z}_2(t) = \overline{\mathbf{z}}_1(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

K těmto dvěma komplexně sdruženým řešením můžeme sestrojit dvě reálná řešení

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathrm{Re}\big(\mathbf{z}_1(t)\big) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2(t) = \mathrm{Im}\big(\mathbf{z}_1(t)\big) = \begin{pmatrix}\sin t\\ \sin t\end{pmatrix}.$$

Podobně pro $\lambda_{3,4} = \pm 2\mathrm{i}$ dostaneme pro v_1 a v_2 soustavu $5v_1 - 2v_2 = 0$, která má nenulové řešení $v_1 = 2$ a $v_2 = 5$. Tomu odpovídají dvě komplexní řešení

$$\mathbf{z}_3(t) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{z}_4(t) = \overline{\mathbf{z}}_3(t) = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}.$$

Dvě reálná řešení, která odpovídají těmto komplexně sdruženým řešením jsou

$$\mathbf{x}_3(t) = \mathrm{Re}\big(\mathbf{z}_3(t)\big) = \begin{pmatrix}2\cos 2t\\ 5\cos 2t\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_4(t) = \mathrm{Im}\big(\mathbf{z}_3(t)\big) = \begin{pmatrix}2\sin 2t\\ 5\sin 2t\end{pmatrix}.$$

Obecné řešení soustavy (13) je lineární kombinace těchto čtyř řešení, tj.

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + c_3\mathbf{x}_3(t) + c_4\mathbf{x}_4(t),$$

neboli

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1\cos t + c_2\sin t + 2c_3\cos 2t + 2c_4\sin 2t,\\ x_2(t) &= c_1\cos t + c_2\sin t + 5c_3\cos 2t + 5c_4\sin 2t, \end{aligned}$$

kde c_1, c_2, c_3 a c_4 jsou libovolné konstanty.
Ty musíme zvolit tak, aby byly splněny dané počáteční podmínky. Z nich plyne soustava rovnic

$$c_1 + 2c_3 = 1, \quad c_1 + 5c_3 = 4, \quad c_2 + 4c_4 = 2, \quad c_2 + 10c_4 = -4,$$

která má řešení $c_1 = -1$, $c_2 = 6$, $c_3 = 1$ a $c_4 = -1$. Tedy řešení Cauchyovy úlohy (13) je

$$x_1(t) = -\cos t + 6\sin t + 2\cos 2t - 2\sin 2t, \qquad x_2(t) = -\cos t + 6\sin t + 5\cos 2t - 5\sin 2t.$$

Příklad 7.r. Najděte obecné reálné řešení homogenní soustavy k soustavě diferenciálních rovnic

$$x_1' = x_1 + 2x_2 + t\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2t}\cos t, \qquad x_2' = 3x_1 - 4x_2 + 3\mathrm{e}^{-t} + t\mathrm{e}^{2t} \tag{14}$$

a napište, v jakém tvaru budete hledat řešení nehomogenní soustavy.
Řešení. Homogenní soustava k (14) je

$$x_1' = x_1 + 2x_2, \qquad x_2' = 3x_1 - 4x_2. \tag{15}$$

Protože se jedná o soustavu dvou diferenciálních rovnice prvního řádu, bude se její fundamentální systém skládat ze dvou lineárně nezávislých řešení.
Protože (15) je soustava k konstantními koeficienty, budeme hledat její řešení ve tvaru $\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}$, kde λ je komplexní konstanta a $\mathbf{v}$ nenulový konstantní vektor.
Charakteristický polynom soustavy (15)

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix}1-\lambda, & 2\\ 3, & -4-\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 10$$

má dva reálné kořeny $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = -5$.
Pro $\lambda_1 = 2$ dostaneme pro vektor $\mathbf{v}_1$ rovnici $-v_1 + 2v_2 = 0$, která má nenulové řešení např. $v_1 = 2$ a $v_2 = 1$. Proto je jedno řešení homogenní soustavy (15)

$$\mathbf{x}_{H,1}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

Pro $\lambda_2 = -5$ dostaneme pro vektor $\mathbf{v}_2$ rovnici $6v_1 + 2v_2 = 0$, která má nenulové řešení např. $v_1 = 1$ a $v_2 = -3$. Proto je druhé řešení homogenní soustavy (15)

$$\mathbf{x}_{H,2}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 = \mathrm{e}^{-5t}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}.$$

Pomocí řešení $\mathbf{x}_{H,1}(t)$ a $\mathbf{x}_{H,2}(t)$ najdeme obecné řešení homogenní soustavy jako jejich lineární kombinaci, tj.

$$\mathbf{x}_H(t) = c_1\mathbf{x}_{H,1}(t) + c_2\mathbf{x}_{H,2}(t) = c_1\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + c_2\mathrm{e}^{-5t}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix},$$

neboli

$$x_{1,H}(t) = 2c_1\mathrm{e}^{2t} + c_2\mathrm{e}^{-5t}, \qquad x_{2,H}(t) = c_1\mathrm{e}^{2t} - 3c_2\mathrm{e}^{-5t},$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.

Když napíšeme pravou stranu rovnice jako součet vektorových funkcí

$$\mathbf{f}_1(t) = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}t\\3\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2(t) = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3(t) = \mathrm{e}^{2t}\cos t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

lze řešení nehomogenní soustavy hledat jako součet tří vektorových funkcí $\mathbf{x}_{N,1}(t)$, $\mathbf{x}_{N,2}(t)$ a $\mathbf{x}_{N,3}(t)$, kde $\mathbf{x}_{N,k}(t)$ jsou řešením nehomogenní rovnice s pravou stranou $\mathbf{f}_k(t)$.
Protože $\mathbf{f}_1(t)$ je součin exponenciály e^{-t} a vektorového polynomu stupně 1 a $\lambda = -1$ není kořenem charakteristické rovnice, budeme hledat řešení ve tvaru

$$\mathbf{x}_{N,1}(t) = \mathrm{e}^{-t}\mathbf{Q}_1(t),$$

kde $\mathbf{Q}_1(t)$ je vektorový polynom stpně 1, tj. ve tvaru

$$\mathbf{x}_{N,1}(t) = \mathrm{e}^{-t}(\mathbf{a}t + \mathbf{b}), \quad \text{neboli} \quad \begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{e}^{-t}\big(a_1 t + b_1\big),\\ x_2(t) &= \mathrm{e}^{-t}\big(a_2 t + b_2\big),\end{aligned}$$

kde a_1, b_1, a_2 a b_2 jsou reálná čísla.
Protože $\mathbf{f}_2(t)$ je součin exponenciály e^{2t} a vektorového polynomu stupně 1 a $\lambda = 2$ je kořenem charakteristické rovnice násobnosti 1, budeme hledat řešení ve tvaru

$$\mathbf{x}_{N,2}(t) = \mathrm{e}^{2t}\mathbf{Q}_2(t),$$

kde $\mathbf{Q}_2(t)$ je vektorový polynom stupně 2, tj. ve tvaru

$$\mathbf{x}_{N,2}(t) = \mathrm{e}^{2t}(\mathbf{a}t^2 + \mathbf{b}t + \mathbf{c}), \quad \text{neboli} \quad \begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{e}^{2t}\big(a_1 t^2 + b_1 t + c_1\big),\\ x_2(t) &= \mathrm{e}^{2t}\big(a_2 t^2 + b_2 t + c_2\big),\end{aligned}$$

kde a_1, b_1, c_1 a_2, b_2 a c_2 jsou reálná čísla.

Vektorová funkce $\mathbf{f}_3(t)$ je součin funkce $\mathrm{e}^{2t}\cos t$ a vektorového polynomu stupně 0. Funkce $\mathrm{e}^{2t}\cos t$ odpovídá kořenům $\lambda = 2 \pm \mathrm{i}$ charakteristické rovnice. A protože tato λ nejsou kořeny $P(\lambda)$, budeme hledat řešení ve tvaru

$$\mathbf{x}_{N,3}(t) = \mathrm{e}^{2t}\big(\mathbf{R}_0\cos t + \mathbf{S}_0\sin t\big)\,,$$

kde $\mathbf{R}_0$ a $\mathbf{S}_0$ jsou vektorové polynomy stupně nula, tj. konstantní vektory, tedy ve tvaru

$$\mathbf{x}_{N,3}(t) = \mathrm{e}^{2t}(\mathbf{a}\cos t + \mathbf{b}\sin t)\,, \quad \text{neboli} \quad \begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{e}^{2t}\big(a_1\cos t + b_1\sin t\big)\,,\\ x_2(t) &= \mathrm{e}^{2t}\big(a_2\cos t + b_2\sin t\big)\,,\end{aligned}$$

kde a_1, b_1, a_2 a b_2 jsou reálná čísla.

Řešení celé nehomogenní rovnice (14) pak bude

$$\mathbf{x}_N(t) = \mathbf{x}_{N,1}(t) + \mathbf{x}_{N,2}(t) + \mathbf{x}_{N,3}(t)\,.$$

Příklad 8.r. Najděte obecné reálné řešení homogenní soustavy k soustavě diferenciálních rovnic

$$x_1' = x_1 - 3x_2 + 2\mathrm{e}^{-t} + t\mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{t}\sin 2t\,, \qquad x_2' = 3x_1 - 5x_2 + (3-t)\mathrm{e}^{-t} + t\mathrm{e}^{t}\sin 2t \quad (16)$$

a napište, v jakém tvaru budete hledat řešení nehomogenní soustavy.

Řešení. Homogenní soustava k (16) je

$$x_1' = x_1 - 3x_2\,, \qquad x_2' = 3x_1 - 5x_2\,. \qquad (17)$$

Protože se jedná o soustavu dvou diferenciálních rovnice prvního řádu, bude se její fundamentální systém skládat ze dvou lineárně nezávislých řešení.

Protože (17) je soustava k konstantními koeficienty, budeme hledat její řešení ve tvaru $\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}$, kde λ je komplexní konstanta a $\mathbf{v}$ nenulový konstantní vektor.

Charakteristický polynom soustavy (17)

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda\,, & -3 \\ 3\,, & -5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$

má jeden dvojnásobný kořen $\lambda = -2$.

Pro $\lambda = -2$ dostaneme pro vlastní vektor $\mathbf{v}_1$ soustavu

$$\big(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}\big)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}\,, \quad \text{tj.} \quad \begin{pmatrix} 3\,, & -3 \\ 3\,, & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

která má nenulové řešení například $v_1 = v_2 = 1$. Tomu odpovídá řešení homogenní soustavy

$$\mathbf{x}_{H,1}(t) = \mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Druhé lineárně nezávislé řešení soustavy (17) má tvar $\mathbf{x}_{H,2}(t) = \mathrm{e}^{-2t}\big(\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_1\big)$, kde

$$\big(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}\big)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1\,, \quad \text{tj.} \quad \begin{pmatrix} 3\,, & -3 \\ 3\,, & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Můžeme zvolit $v_1 = \frac{1}{3}$ a $v_2 = 0$. Tedy druhé řešení homogenní soustavy (17) je

$$\mathbf{x}_{H,2}(t) = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1+3t \\ 3t \end{pmatrix}.$$

Pro obecné řešení homogenní soustavy (17) pak dostaneme

$$\mathbf{x}_H(t) = c_1\mathbf{x}_{H,1}(t) + 3c_2\mathbf{x}_{H,2}(t) = c_1\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} \\ \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} (1+3t)\mathrm{e}^{-2t} \\ 3t\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix},$$

neboli

$$x_{1,H}(t) = c^2\mathrm{e}^{-2t} + c_2\mathrm{e}^{-2t}(1+3t)\,, \qquad x_{2,H}(t) = c_1\mathrm{e}^{-2t} + 3c_2t\mathrm{e}^{-2t},$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.

Protože je pravá strana soustavy (16) rovna součtu tří vektorových funkcí

$$\mathbf{f}_1(t) = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3-t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3(t) = \mathrm{e}^{t}\sin 2t\begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix},$$

lze partikulární řešení hledat jako součet tří vektorových funkcí $\mathbf{x}_{N,1}(t)$, $\mathbf{x}_{N,2}(t)$ a $\mathbf{x}_{N,3}(t)$, kde $\mathbf{x}_{N,k}(t)$ jsou řešením nehomogenní rovnice s pravou stranou $\mathbf{f}_k(t)$.

Protože $\mathbf{f}_1(t)$ je součin exponenciály e^{-t} a vektorového polynomu stupně 1 a $\lambda = -1$ není kořenem charakteristické rovnice, budeme hledat řešení ve tvaru

$$\mathbf{x}_{N,1}(t) = \mathrm{e}^{-t}\mathbf{Q}_1(t)\,,$$

kde $\mathbf{Q}_1(t)$ je vektorový polynom stupně 1, tj. ve tvaru

$$\mathbf{x}_{N,1}(t) = \mathrm{e}^{-t}(\mathbf{a}t + \mathbf{b})\,, \quad \text{neboli} \quad \begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{e}^{-t}\big(a_1t + b_1\big)\,, \\ x_2(t) &= \mathrm{e}^{-t}\big(a_2t + b_2\big)\,, \end{aligned}$$

kde a_1, b_1, a_2 a b_2 jsou konstanty.

Protože $\mathbf{f}_2(t)$ je součin exponenciály e^{-2t} a vektorového polynomu stupně 1 a $\lambda = -2$ je kořen charakteristické rovnice násobnosti 2, budeme hledat řešení ve tvaru

$$\mathbf{x}_{N,2}(t) = \mathrm{e}^{-2t}\mathbf{Q}_3(t)\,,$$

kde $\mathbf{Q}_3(t)$ je vektorový polynom stupně 3, tj. ve tvaru

$$\mathbf{x}_{N,2}(t) = \mathrm{e}^{-2t}(\mathbf{a}t^3 + \mathbf{b}t^2 + \mathbf{c}t + \mathbf{d})\,, \quad \text{neboli} \quad \begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{e}^{-2t}\big(a_1t^3 + b_1t^2 + c_1t + d_1\big)\,, \\ x_2(t) &= \mathrm{e}^{-2t}\big(a_2t^3 + b_2t^2 + c_2t + d_2\big)\,, \end{aligned}$$

kde a_k, b_k, c_k a d_k jsou konstanty.

Vektorová funkce $\mathbf{f}_3(t)$ je součin funkce $\mathrm{e}^t\sin 2t$ a vektorového polynomu stupně 1. Funkce $\mathrm{e}^t\sin 2t$ odpovídá komplexně sdruženým kořenům charakteristické rovnice $\lambda = 1 \pm 2\mathrm{i}$. A protože tato λ nejsou kořeny $P(\lambda)$, budeme hledat řešení ve tvaru

$$\mathbf{x}_{N,3}(t) = \mathrm{e}^t\big(\mathbf{R}_1(t)\cos 2t + \mathbf{S}_1(t)\sin 2t\big)\,,$$

kde $\mathbf{R}_1$ a $\mathbf{S}_1$ jsou vektorové polynomy stupně jedna, tj.

$$\mathbf{x}_{N,3}(t) = \mathrm{e}^t\big((\mathbf{a}t + \mathbf{b})\cos 2t + (\mathbf{c}t + \mathbf{d})\sin 2t\big)\,,$$

neboli

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{e}^t\big((a_1t + b_1)\cos 2t + (c_1t + d_1)\sin 2t\big)\,,\\ x_2(t) &= \mathrm{e}^t\big((a_2t + b_2)\cos 2t + (c_2t + d_2)\sin 2t\big)\,, \end{aligned}$$

kde a_k, b_k, c_k a d_k jsou reálná čísla.
Řešení celé nehomogenní rovnice (16) pak bude

$$\mathbf{x}_N(t) = \mathbf{x}_{N,1}(t) + \mathbf{x}_{N,2}(t) + \mathbf{x}_{N,3}(t)\,.$$

Příklad 9.r. Najděte obecné reálné řešení homogenní soustavy k soustavě diferenciálních rovnic

$$x_1' = 2x_1 - x_2 + t\mathrm{e}^{3t} + t\sin 2t - \mathrm{e}^{3t}\cos 2t\,, \qquad x_2' = 5x_1 + 4x_2 + 2\mathrm{e}^{3t} + 4\cos 2t \tag{18}$$

a napište, v jakém tvaru budete hledat řešení nehomogenní soustavy.
Řešení. Homogenní soustava k (18) je

$$x_1' = 2x_1 - x_2\,, \qquad x_2' = 5x_1 + 4x_2\,. \tag{19}$$

Protože se jedná o soustavu dvou diferenciálních rovnice prvního řádu, bude se její fundamentální systém skládat ze dvou lineárně nezávislých řešení.
Protože (19) je soustava k konstantními koeficienty, budeme hledat její řešení ve tvaru $\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}$, kde λ je komplexní konstanta a $\mathbf{v}$ nenulový konstantní vektor.
Charakteristický polynom soustavy (19)

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda\,, & -1 \\ 5\,, & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 13$$

má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2\mathrm{i}$.
Pro $\lambda = 3 + 2\mathrm{i}$ dostaneme pro v_1 a v_2 rovnici $-(1 + 2\mathrm{i})v_1 - v_2 = 0$, která mé řešení například $v_1 = -1$ a $v_2 = 1 + 2\mathrm{i}$. Tedy jedno komplexní řešení homogenní soustavy (19) je

$$\mathbf{z}(t) = \mathrm{e}^{(3+2\mathrm{i})t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Protože soustava (19) má reálné koeficient, lze pomocí tohoto řešení sestrojit dvě reálná řešení soustavy

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{H,1}(t) &= \mathrm{Re}\big(\mathbf{z}(t)\big) = \mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix} -\cos 2t \\ \cos 2t - 2\sin 2t \end{pmatrix},\\ \mathbf{x}_{H,2}(t) &= \mathrm{Im}\big(\mathbf{z}(t)\big) = \mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix} -\sin 2t \\ \sin 2t + 2\cos 2t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Reálné obecní řešení homogenní soustavy (19) pak je

$$\mathbf{x}_H(t) = c_1\mathbf{x}_{H,1}(t) + c_2\mathbf{x}_{H,2}(t) = c_1\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix} -\cos 2t \\ \cos 2t - 2\sin 2t \end{pmatrix} + c_2\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix} -\sin 2t \\ \sin 2t + 2\cos 2t \end{pmatrix},$$

neboli

$$
\begin{aligned}
x_{1,H}(t) &= -c_1\mathrm{e}^{3t}\cos 2t - c_2\mathrm{e}^{3t}\sin 2t\,,\\
x_{2,H}(t) &= c_1\mathrm{e}^{3t}(\cos 2t - 2\sin 2t) + c_2\mathrm{e}^{3t}(\sin 2t + 2\cos 2t)\,,
\end{aligned}
$$

kde c_1 a c_2 jsou libovoná reálná čísla.

Protože je pravá strana soustavy (18) rovna součtu tří vektorových funkcí

$$
\mathbf{f}_1(t) = \mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix} t\\ 2\end{pmatrix},\qquad \mathbf{f}_2(t) = \cos 2t\begin{pmatrix} 0\\ 4\end{pmatrix} + \sin 2t\begin{pmatrix} t\\ 0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{f}_3(t) = \mathrm{e}^{3t}\cos 2t\begin{pmatrix} -1\\ 0\end{pmatrix},
$$

lze partikulární řešení hledat jako součet tří vektorových funkcí $\mathbf{x}_{N,1}(t)$, $\mathbf{x}_{N,2}(t)$ a $\mathbf{x}_{N,3}(t)$, kde $\mathbf{x}_{N,k}(t)$ jsou řešením nehomogenní rovnice s pravou stranou $\mathbf{f}_k(t)$.

Protože $\mathbf{f}_1(t)$ je součin exponenciály e^{3t} a vektorového polynomu stupně 1 a $\lambda = 3$ není kořenem charakteristické rovnice, budeme hledat řešení ve tvaru

$$
\mathbf{x}_{N,1}(t) = \mathrm{e}^{3t}\mathbf{Q}_1(t)\,,
$$

kde $\mathbf{Q}_1(t)$ je vektorový polynom stupně 1, tj. ve tvaru

$$
\mathbf{x}_{N,1}(t) = \mathrm{e}^{3t}(\mathbf{a}t + \mathbf{b})\,,\quad \text{tj.}\quad \begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{e}^{3t}\big(a_1t + b_1\big)\,,\\ x_2(t) &= \mathrm{e}^{3t}\big(a_2t + b_2\big)\,,\end{aligned}
$$

kde a_1, b_1, a_2 a b_2 jsou konstanty.

Obě funkce $\cos 2t$ a $\sin 2t$ odpovídají kořenům charakteristického polynomu $\lambda = \pm 2\mathrm{i}$. Protože má vektorová funkce $\mathbf{f}_2(t)$ tvar

$$
\mathbf{f}_2(t) = \mathbf{P}_0(t)\cos 2t + \mathbf{Q}_1(t)\sin 2t\,,
$$

kde $\mathbf{P}_0(t)$ je vektorový polynom stupně nula a $\mathbf{Q}_1(t)$ je vektorový polynom stupně jedna a $\lambda = \pm 2\mathrm{i}$ není kořen charakteristické rovnice, budeme hledat řešení $\mathbf{x}_{N,2}(t)$ ve tvaru

$$
\mathbf{x}_{N,2}(t) = \mathbf{R}_1(t)\cos 2t + \mathbf{S}_1(t)\sin 2t\,,
$$

kde $\mathbf{R}_1(t)$ a $\mathbf{S}_1(t)$ jsou vektorové polynomy stupně $\max(0,1) = 1$, tj.

$$
\mathbf{x}_{N,2}(t) = (\mathbf{a}t{+}\mathbf{b})\cos 2t{+}(\mathbf{c}t{+}\mathbf{d})\sin 2t\,,\quad \text{tj.}\quad \begin{aligned} x_1(t) &= (a_1t + b_1)\cos 2t + (c_1t + d_1)\sin 2t\,,\\ x_2(t) &= (a_2t + b_2)\cos 2t + (c_2t + d_2)\sin 2t\,,\end{aligned}
$$

kde a_k, b_k, c_k a d_k jsou reálná čísla.

Funkce $\mathrm{e}^{3t}\cos 2t$ odpovídá kořenům charakteristického polynomu $\lambda = 3 \pm 2\mathrm{i}$. Protože $\mathbf{f}_3(t) = \mathrm{e}^{3t}\mathbf{P}_0(t)\cos 2t$, kde $\mathbf{P}_0(t)$ je vektorový polynom stupně nula a $\lambda = 3{+}2\mathrm{i}$ je kořenem charakteristické rovnice násobnosti 1, budeme hledat řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$
\mathbf{x}_{N,3}(t) = \mathrm{e}^{3t}\big(\mathbf{R}_1(t)\cos 2t + \mathbf{S}_1(t)\sin 2t\big)\,,
$$

kde $\mathbf{R}_1(t)$ a $\mathbf{S}_1(t)$ jsou vektorové polynomy stupně jedna, tj.

$$
\mathbf{x}_{N,3}(t) = \mathrm{e}^{3t}\big((\mathbf{a}t + \mathbf{b})\cos 2t + (\mathbf{c}t + \mathbf{d})\sin 2t\big)\,,
$$

neboli

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{e}^{3t}\big((a_1t+b_1)\cos 2t + (c_1t+d_1)\sin 2t\big)\,, \\ x_2(t) &= \mathrm{e}^{3t}\big((a_2t+b_2)\cos 2t + (c_2t+d_2)\sin 2t\big)\,, \end{aligned}$$

kde a_k, b_k, c_k a d_k jsou reálná čísla.
Řešení celé nehomogenní rovnice (18) pak bude

$$\mathbf{x}_N(t) = \mathbf{x}_{N,1}(t) + \mathbf{x}_{N,2}(t) + \mathbf{x}_{N,3}(t)\,.$$

Příklad 10.r. Najděte obecné řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$x_1' = 7x_1 - 4x_2 + 4\mathrm{e}^t, \qquad x_2' = 4x_1 - 3x_2 - 5\,. \tag{20}$$

Řešení. Obecné řešení soustavy je $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_H(t) + \mathbf{x}_N(t)$, kde $\mathbf{x}_H(t)$ je obecné řešení homogenní souatavy

$$x_1' = 7x_1 - 4x_2\,, \qquad x_2' = 4x_1 - 3x_2 \tag{21}$$

a $\mathbf{x}_N(t)$ je jedno řešení nehomogenní soustavy (20).
Abychom našli obecné řešení homogenní soustavy, stačí najít její dvě nezávislá řešení. Protože má soustava konstantní koeficientybudeme hledat její řešení tvaru $\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}$, kde λ je komplexní číslo a $\mathbf{v}$ nenulový vektor.
Pro soustavu (21) jsou matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7\,, & -4 \\ 4\,, & -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 7-\lambda\,, & -4 \\ 4\,, & -3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom soustavy (21)

$$P(\lambda) = \det\big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\big) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

má dva reálné kořeny $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = 5$.
Pro $\lambda_1 = -1$ je vektor $\mathbf{v}_1$ řešení soustavy

$$\big(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}\big)\mathbf{v}_1 = 0\,, \quad \text{tj.} \quad 2v_1 - v_2 = 0\,.$$

Její řešení je například $v_1 = 1$ a $v_2 = 2$. To nám dává první řešení homogenní soustavy

$$\mathbf{x}_{H,1}(t) = \mathrm{e}^{-t}\mathbf{v}_1 = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pro $\lambda_2 = 5$ je vektor $\mathbf{v}_2$ řešení soustavy

$$\big(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I}\big)\mathbf{v}_2 = 0\,, \quad \text{tj.} \quad v_1 - 2v_2 = 0\,.$$

Její řešení je například $v_1 = 2$ a $v_2 = 1$. To nám dává druhé řešení homogenní soustavy

$$\mathbf{x}_{H,2}(t) = \mathrm{e}^{5t}\mathbf{v}_2 = \mathrm{e}^{5t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obecné řešení homogenní soustavy pak je

$$\mathbf{x}_H(t) = c_1\mathbf{x}_{H,1}(t) + c_2\mathbf{x}_{H,2}(t) = c_1\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + c_2\mathrm{e}^{5t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad \text{tj.} \quad \begin{aligned} x_{1,H}(t) &= c_1\mathrm{e}^{-t} + 2c_2\mathrm{e}^{5t}, \\ x_{2,H}(t) &= 2c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{5t}, \end{aligned}$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.

Protože pravá strana soustavy (20) je rovna součtu dvou vektorových funkcí

$$\mathbf{f}_1(t) = \mathrm{e}^t\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2(t) = \begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix},$$

budeme řešení nehomogenní soustavy hledat jako součet dvou vektorových funkcí $\mathbf{x}_{N,1}(t)$ a $\mathbf{x}_{N,2}(t)$, kde $\mathbf{x}_{N,k}(t)$ je řešení nehomogenní soustavy s pravou stranou $\mathbf{f}_k(t)$.

Protože vektorová funkce $\mathbf{f}_1(t)$ je součin exponenciální funkce e^t a vektorového polynomu stupně nula a $\mu_1 = 1$ není kořen charakteristického polynomu, budeme hledat řešení odpovídající soustavy ve tvaru

$$\mathbf{x}_{N,1}(t) = \mathrm{e}^t\mathbf{a}, \quad \text{neboli} \quad x_1(t) = a_1\mathrm{e}^t, \quad x_2(t) = a_2\mathrm{e}^t,$$

kde a_1 a a_2 jsou reálná čísla. Po dosazení a vykrácení e^t pro ně dostaneme soustavu rovnic

$$a_1 = 7a_1 - 4a_2 + 4, \quad a_2 = 4a_1 - 3a_2, \quad \text{tj.} \quad a_1 = a_2 = -2.$$

Tedy jedno řešení první části nehomogenní soustavy je

$$x_{N,1}(t) = \mathrm{e}^t\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}.$$

Vektorová funkce $\mathbf{f}_2(t)$ je vlastně součin exponecniály $\mathrm{e}^{\mu_2 t}$, kde $\mu_2 = 0$ a vektorového polynomu stupně nula. A protože $\mu_2 = 0$ není kořen charakteristického polynomu, budeme hledat příslušné řešení ve tvaru

$$\mathbf{x}_{N,2}(t) = \mathrm{e}^{0t}\mathbf{a} = \mathbf{a}, \quad \text{neboli} \quad x_1(t) = a_1, \quad x_2(t) = a_2,$$

kde a_1 a a_2 jsou reálná čísla. Po dosazení pro ně dostaneme soustavu rovnic

$$0 = 7a_1 - 4a_2, \quad 0 = 4a_1 - 3a_2 - 5, \quad \text{tj.} \quad a_1 = -4, \quad a_2 = -7.$$

Proto je jedno řešení druhé části nehomogenní rovnice

$$\mathbf{x}_{N,2} = \begin{pmatrix}-4\\-7\end{pmatrix}.$$

Jedno řešení celé nehomogenní rovnice je $\mathbf{x}_N(t) = \mathbf{x}_{N,1}(t) + \mathbf{x}_{N,2}(t)$ a obecné řešení diferenciální rovnice (20) je

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_H(t) + \mathbf{x}_N(t) \qquad \text{tj.} \qquad \begin{aligned} x_1(t) &= c_1\mathrm{e}^{-t} + 2c_2\mathrm{e}^{5t} - 2\mathrm{e}^t - 4, \\ x_{2,H}(t) &= 2c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{5t} - 2\mathrm{e}^t - 7, \end{aligned}$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.

Příklad 11.r. Najděte obecné reálné řešení soustavy

$$x_1' = 3x_1 - 4x_2 + 2\mathrm{e}^{2t}\cos t\,, \qquad x_2' = x_1 - x_2 - \mathrm{e}^{2t}\sin t\,. \tag{22}$$

Řešení. Obecné řešení $\mathbf{x}(t)$ soustavy (22) lze psát ve tvaru $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_H(t) + \mathbf{x}_N(t)$, kde $\mathbf{x}_H(t)$ je obecné řešení homogenní soustavy

$$x_1' = 3x_1 - 4x_2\,, \qquad x_2' = x_1 - x_2 \tag{23}$$

a $\mathbf{x}_N(t)$ je jedno řešení nehomogenní soustavy (22).

Nejprve najdeme obecné řešení homogenní soustavy (23). To budeme hledat ve tvaru $\mathbf{x}_H(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}$, kde λ je komplexní číslo a $\mathbf{v}$ nenulový vektor. Standardním způsobem dostaneme charakteristický polynom

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda\,, & -4 \\ 1\,, & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1\,.$$

Ten má dvojnásobný kořen $\lambda = 1$. Rovnice pro vektor $\mathbf{v}_1$ je

$$\big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\big)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}\,, \quad \text{tj.} \quad \begin{pmatrix} 2\,, & -4 \\ 1\,, & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Její nenulové řešení je například $v_1 = 2$ a $v_2 = 1$. Tedy jedno řešení homogenní soustavy je

$$\mathbf{x}_{H,1}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}.$$

Druhé řešení homogenní soustavy bude $\mathbf{x}_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}(\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_1)$, kde

$$\big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\big)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1\,, \quad \text{tj.} \quad \begin{pmatrix} 2\,, & -4 \\ 1\,, & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jestliže zvolíme $v_1 = 1$ a $v_2 = 0$ dostaneme druhé řešení homogenní soustavy (23)

$$\mathbf{x}_{H,2}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t(1+2t) \\ t\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

a obecné reálné řešení homogenní soustavy jako

$$\mathbf{x}_H(t) = c_1\mathbf{x}_{H,1}(t) + c_2\mathbf{x}_{H,2}(t)\,, \quad \text{neboli} \quad \begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{e}^t\big(2c_1 + c_2(1+2t)\big) \\ x_2(t) &= \mathrm{e}^t\big(c_1 + c_2 t\big), \end{aligned}$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.

Ještě musíme najít partikulární řešení nehomogenní soustavy (22). Protože se jedná o soustavu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou, lze najít partikulární řešení odhadem.
Pravá strana nehomogenní rovnice je součet funkcí $\mathrm{e}^{2t}\mathbf{P}_0(t)\cos t$ a $\mathrm{e}^{2t}\mathbf{Q}_0(t)\sin t$, kde $\mathbf{P}_0(t)$ a $\mathbf{Q}_0(t)$ jsou konstantní vektory, tj. vektorové polynomy stupně nula. Funkce $\mathrm{e}^{2t}\cos t$ a $\mathrm{e}^{2t}\sin t$ odpovídají komplexním exponenciálám $\mathrm{e}^{(2\pm\mathrm{i})t}$. A protože $\lambda = 2 \pm \mathrm{i}$ nejsou kořeny

charakteristického polynomu, budeme hledat partikulární řešení nehomogenní soustavy (22) ve tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{2t}\big(\mathbf{R}_0 \cos t + \mathbf{S}_0 \sin t\big)\,,$$

kde $\mathbf{R}_0$ a $\mathbf{S}_0$ jsou vektorové polynomy stupně nula, tj. konstantní vektory. Tedy budeme hledat konstanty a_1, a_2, b_1 a b_2 tak, aby byly funkce

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{2t}\big(a_1 \cos t + b_1 \sin t\big)\,, \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^{2t}\big(a_2 \cos t + b_2 \sin t\big)$$

řešením soustavy (22). Protože

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \mathrm{e}^{2t}\big((2a_1 + b_1)\cos t + (-a_1 + 2b_1)\sin t\big)\,,\\ x_2'(t) &= \mathrm{e}^{2t}\big((2a_2 + b_2)\cos t + (-a_2 + 2b_2)\sin t\big)\,, \end{aligned}$$

musí platit

$$\begin{aligned} (-a_1 + b_1 + 4a_2)\cos t - (a_1 + b_1 - 4b_2)\sin t &= 2\cos t\,,\\ (-a_1 + 3a_2 + b_2)\cos t - (a_2 + b_1 - 3b_2)\sin t &= -\sin t\,. \end{aligned}$$

Tedy konstanty musíme zvolit tak, aby platilo

$$-a_1 + b_1 + 4a_2 = 2\,, \quad a_1 + b_1 - 4b_2 = 0\,, \quad -a_1 + 3a_2 + b_2 = 0\,, \quad a_2 + b_1 - 3b_2 = 1\,.$$

Tato soustava má řešení $a_1 = -1$, $b_1 = 3$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{2}$. Tedy partikulární řešení soustavy (22) je

$$\mathbf{x}_N(t) = \mathrm{e}^{2t}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\sin t\right], \qquad \text{tj.} \qquad \begin{aligned} x_{N,1}(t) &= \mathrm{e}^{2t}\big(-\cos t + 3\sin t\big)\,,\\ x_{N,2}(t) &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2t}\big(-\cos t + \sin t\big) \end{aligned}$$

a její obecné řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_H(t) + \mathbf{x}_N(t)$ je

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{e}^{t}\big(2c_1 + c_2(1+2t)\big) + \mathrm{e}^{2t}\big(-\cos t + 3\sin t\big)\,,\\ x_2(t) &= \mathrm{e}^{t}\big(c_1 + c_2 t\big) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2t}\big(-\cos t + \sin t\big)\,, \end{aligned}$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.

Příklad 12.r. Najděte obecné reálné řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$x_1' = 3x_1 - 2x_2 + 5t\mathrm{e}^{3t}, \qquad x_2' = 5x_1 + x_2 - \mathrm{e}^{3t}. \tag{24}$$

Řešeni. Obecné řešení $\mathbf{x}(t)$ soustavy (24) lze psát ve tvaru $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_H(t) + \mathbf{x}_N(t)$, kde $\mathbf{x}_H(t)$ je obecné řešení homogenní soustavy

$$x_1' = 3x_1 - 2x_2\,, \qquad x_2' = 5x_1 + x_2 \tag{25}$$

a $\mathbf{x}_N(t)$ je jedno řešení nehomogenní soustavy (24).

Nejprve najdeme obecné řešení homogenní soustavy (25). To budeme hledat ve tvaru $\mathbf{x}_H(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}$, kde λ je komplexní číslo a $\mathbf{v}$ nenulový vektor. Standardním způsobem dostaneme charakteristický polynom

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda\,, & -2 \\ 5\,, & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 13\,.$$

Ten má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_\pm = 2 \pm 3\mathrm{i}$.

Protože jde o soustavu s reálnými koeficienty, stačí uvažovat pouze jeden kořen, například $\lambda = 2 + 3\mathrm{i}$. Rovnice pro vektor $\mathbf{v}$ je

$$\big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\big)\mathbf{v} = \mathbf{0}\,, \quad \text{tj.} \quad \begin{pmatrix} 1-3\mathrm{i}\,, & -2 \\ 5\,, & -1-3\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Její nenulové řešení je například $v_1 = 2$ a $v_2 = 1 - 3\mathrm{i}$. Tedy jedno komplexní řešení homogenní soustavy je

$$\mathbf{z}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v} = \mathrm{e}^{(2+3\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3\mathrm{i} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2t}\big(\cos 3t + \mathrm{i}\sin 3t\big) \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Za dvě lineárně nezávislá reálná řešení homogenní soustavy (25) můžeme vzít

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{H,1}(t) &= \operatorname{Re}\big(\mathbf{z}(t)\big) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 2\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_{H,2}(t) &= \operatorname{Im}\big(\mathbf{z}(t)\big) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 2\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obecné reálné řešení homogenní soustavy (23) pak je $\mathbf{x}_H(t) = c_1\mathbf{x}_{H,1}(t) + c_2\mathbf{x}_{H,2}(t)$, neboli

$$\begin{aligned} x_{1,H}(t) &= 2c_1\mathrm{e}^{2t}\cos 3t + 2c_2\mathrm{e}^{2t}\sin 3t\,, \\ x_{2,H}(t) &= c_1\mathrm{e}^{2t}(\cos 3t + 3\sin 3t) + c_2\mathrm{e}^{2t}(\sin 3t - 3\cos 3t)\,, \end{aligned}$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.

Protože pravá strana nehomogenní soustavy (24) je vektorová funkce

$$\mathbf{f}(t) = \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 5t \\ -1 \end{pmatrix},$$

lze najít jedno řešení nehomogenní soustavy odhadem. Vektorová funkce $\mathbf{f}(t)$ je součin exponenciální funkce e^{3t} a vektorového polynomu stupně jedna. A protože $\mu = 3$ není kořen charakteristického polynomu, budeme hledat řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{3t}\mathbf{Q}_1(t)\,,$$

kde $\mathbf{Q}_1(t)$ je vektorový polynom stupně jedna, tj. ve tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{3t}\big(\mathbf{a}t + \mathbf{b}\big)\,, \quad \text{tj.} \quad \begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{e}^{3t}(a_1 t + b_1)\,, \\ x_2(t) &= \mathrm{e}^{3t}(a_2 t + b_2)\,. \end{aligned}$$

Po dosazení do soustavy (24) a vykrácení e^{3t} dostaneme

$$3a_1t + 3b_1 + a_1 = 3(a_1t + b_1) - 2(a_2t + b_2) + 5t\,, \quad 3a_2t + 3b_2 + a_2 = 5(a_1t + b_1) + (a_2t + b_2) - 1\,,$$

tj. soustavu rovnic

$$2a_2 = 5\,, \quad 5a_1 - 2a_2 = 0\,, \qquad 2b_2 + a_1 = 0\,, \quad 5b_1 - 2b_2 - a_2 = 1\,,$$

která má řešení $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{5}{2}$, $b_1 = \frac{1}{2}$ a $b_2 = -\frac{1}{2}$. Tedy jedno řešení nehomogenní soustavy (24) je

$$\mathbf{x}_N(t) = \mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix} t + \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2}\,t - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{neboli} \quad \begin{aligned} x_{1,N}(t) &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{3t}(2t+1)\,, \\ x_{2,N}(t) &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{3t}(5t-1) \end{aligned}$$

a její obecné řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_H(t) + \mathbf{x}_N(t)$, neboli

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2c_1\mathrm{e}^{2t}\cos 3t + 2c_2\mathrm{e}^{2t}\sin 3t + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{3t}(2t+1)\,, \\ x_2(t) &= c_1\mathrm{e}^{2t}(\cos 3t + 3\sin 3t) + c_2\mathrm{e}^{2t}(\sin 3t - 3\cos 3t) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{3t}(5t-1)\,, \end{aligned}$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.

Příklad 13.r. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x_1' = 3x_1 - x_2 + \mathrm{e}^{-2t}\,, \quad x_2' = 4x_1 - 2x_2 - 3\mathrm{e}^{2t}\,, \qquad x_1(0) = x_2(0) = 1\,. \tag{26}$$

Řešení. Nejprve nalezneme obecné řešení dané soustavy. Protože se jedná o nehomogenní soustavu, vyřešíme nejprve příslušnou homogenní soustavu

$$x_1' = 3x_1 - x_2\,, \qquad x_2' = 4x_1 - 2x_2\,. \tag{27}$$

Protože máme soustavu s konstantními koeficienty, budeme hledat její řešení ve tvaru $\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}$, kde λ je komplexní konstanta a $\mathbf{v}$ nenulový konstantní vektor.
Charakteristický polynom soustavy (27)

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda\,, & -1 \\ 4\,, & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2$$

má dva reálné kořeny $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = 2$.
Pro $\lambda_1 = -1$ dostaneme pro vektor $\mathbf{v}_1$ rovnici $4v_1 - v_2 = 0$, která nenulové řešení např. $v_1 = 1$ a $v_2 = 4$. Tedy jedno řešení homogenní soustavy (27) je

$$\mathbf{x}_{H,1}(t) = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Pro $\lambda_2 = 2$ dostaneme pro vektor $\mathbf{v}_2$ rovnici $v_1 - v_2 = 0$, která nenulové řešení např. $v_1 = 1$ a $v_2 = 1$. Tedy druhé řešení homogenní soustavy (27) je

$$\mathbf{x}_{H,2}(t) = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obecné řešení homogenní soustavy je pak obecná lineární kombinace těchto řešení, tj.

$$\mathbf{x}_H(t) = c_1\mathbf{x}_{H,1}(t) + c_2\mathbf{x}_{H,2}(t)\,, \quad \text{neboli} \quad \begin{aligned} x_{1,H}(t) &= c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{2t}, \\ x_{2,H}(t) &= 4c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{2t}, \end{aligned}$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.

Ještě musíme najít jedno řešení nehomogenní soustavy. Pravá strana soustavy (26) je součet dvou funkcí s různými exponenciálami

$$\mathbf{f}_1(t) = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{f}_2(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Podle principu superpozice stačí najít řešení pro obě pravé strany zvlášť.

Funkce $\mathbf{f}_1(t)$ je součin exponenciální funkce e^{-2t} a konstantního vektoru, tj. vektorového polynomu stupně nula. Protože $\lambda = -2$ není kořenem charakteristického polynomu $P(\lambda)$, budeme hledat řešení odpovídající nehomogenní rovnice jako $\mathbf{x}_{N,1} = \mathrm{e}^{-2t}\mathbf{Q}_0(t)$, kde $\mathbf{Q}_0(t)$ je vektorový polynom stupně nula, tedy konstantní vektor. Tj. budeme hledat konstanty a a b tak, aby funkce $x_1 = a\mathrm{e}^{-2t}$ a $x_2 = b\mathrm{e}^{-2t}$ byly řešením soustavy

$$x_1' = 3x_1 - x_2 + \mathrm{e}^{-2t}, \qquad x_2' = 4x_1 - 2x_2 .$$

Po dosazení a vykrácení společným faktorem e^{-2t} dostaneme pro a a b soustavu dvou rovnic

$$-2a = 3a - b + 1, \quad -2b = 4a - 2b = 0 \implies a = 0, \quad b = 1 .$$

Takto jsme získali jedno řešení nehomogenní rovnice se stranou $\mathbf{f}_1(t)$

$$\mathbf{x}_{N,1}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Funkce $\mathbf{f}_2(t)$ je součin exponenciální funkce e^{2t} a konstantního vektoru, tj. vektorového polynomu stupně nula. Protože pro charakteristický polynom $P(\lambda)$ platí $P(2) = 0$ a $P'(2) = 3 \neq 0$, je $\lambda = 2$ kořen charakteristického polynomu násobnosti 1. Proto budeme hledat řešení odpovídající nehomogenní rovnice jako $\mathbf{x}_{N,2} = \mathrm{e}^{2t}\mathbf{Q}_1(t)$, kde $\mathbf{Q}_1(t)$ je vektorový polynom stupně jedna, tj. ve tvaru

$$x_1(t) = (a_1 t + b_1)\mathrm{e}^{2t}, \qquad x_2(t) = (a_2 t + b_2)\mathrm{e}^{2t},$$

kde a_1, b_1, a_2 a b_2 jsou konstanty. Po dosazení do soustavy

$$x_1' = 3x_1 - x_2 , \qquad x_2' = 4x_1 - 2x_2 - 3\mathrm{e}^{2t}$$

a vykrácení e^{2t} dostaneme

$$2a_1 t + a_1 + 2b_1 = 3(a_1 t + b_1) - (a_2 t + b_2), \qquad 2a_2 t + a_2 + 2b_2 = 4(a_1 t + b_1) - 2(a_2 t + b_2) - 3 .$$

Konstanty musíme zvolit tak, aby tento vztah platil pro každé t, tedy musí platit

$$a_1 - a_2 = 0, \quad b_1 - b_2 = a_1, \quad 4b_1 - 4b_2 = a_2 + 3 .$$

Z této soustavy plyne $a_1 = a_2 = 1$ a $b_1 - b_2 = 1$. Tedy lze zvolit $a_1 = a_2 = b_1 = 1$ a $b_2 = 0$. Při této volbě získáme řešení

$$\mathbf{x}_{N,2}(t) = \begin{pmatrix} (t+1)\mathrm{e}^{2t} \\ t\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.$$

Jedno řešení celé nehomogenní soustavy (26) je $\mathbf{x}_N(t) = \mathbf{x}_{N,1}(t) + \mathbf{x}_{N,2}(t)$ a pro její obecné řešení pak dostaneme

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_H(t) + \mathbf{x}_N(t)\,, \quad \text{tj.} \quad \begin{aligned} x_1(t) &= c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{2t} + (t+1)\mathrm{e}^{2t}\,, \\ x_2(t) &= 4c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t} + t\mathrm{e}^{2t}\,, \end{aligned}$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla. Z počátečních podmínek $x_1(0) = 1$ a $x_2(0) = 1$ pro ně plyne

$$c_1 + c_2 + 1 = 1\,, \quad 4c_1 + c_2 + 1 = 1\,, \quad \text{tj.} \quad c_1 = c_2 = 0\,.$$

Tedy řešení Cauchyovy úlohy (26) je

$$x_1(t) = (t+1)\mathrm{e}^{2t}\,, \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^{-2t} + t\mathrm{e}^{2t}\,.$$

Příklad 14.r. Najděte řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$x_1' = x_1 + x_2 + 1\,, \qquad x_2' = -x_1 + x_2 + 2t\,, \tag{28}$$

pro které platí $x_1(0) = 1$ a $x_2(0) = -1$.

Řešení. Nejprve nalezneme obecné řešení dané soustavy. Protože se jedná o nehomogenní soustavu, vyřešíme nejprve příslušnou homogenní soustavu

$$x_1' = x_1 + x_2\,, \qquad x_2' = -x_1 + x_2\,. \tag{29}$$

Protože máme soustavu s konstantními koeficienty, budeme hledat její řešení ve tvaru $\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}$, kde λ je komplexní konstanta a $\mathbf{v}$ nenulový konstantní vektor.
Charakteristický polynom soustavy (29)

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda\,, & 1 \\ -1\,, & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_\pm = 1 \pm \mathrm{i}$. Protože soustava má reálné koeficienty, použijeme pouze jeden z nich, například $\lambda = 1 + \mathrm{i}$. Rovnice pro vektor $\mathbf{v}$

$$\big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\big)\mathbf{v} = 0\,, \quad \text{tj.} \quad \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\,, & 1 \\ -1\,, & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

má nenulové řešení například $v_1 = 1$ a $v_2 = \mathrm{i}$. Tak dostaneme komplexní řešení homogenní soustavy (29)

$$\mathbf{z}(t) = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t(\cos t + \mathrm{i}\sin t)\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Pomocí něj najdeme dvě reálná nezázislá řešení homogenní soustavy

$$\mathbf{x}_{H,1}(t) = \mathrm{Re}\big(\mathbf{z}(t)\big) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t\cos t \\ -\mathrm{e}^t\sin t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_{H,2}(t) = \mathrm{Im}\big(\mathbf{z}(t)\big) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t\sin t \\ \mathrm{e}^t\cos t \end{pmatrix}.$$

Reálné obecné řešení homogenní soustavy pak je

$$\mathbf{x}_H(t) = c_1\mathbf{x}_{H,1}(t) + c_2\mathbf{x}_{H,2}(t)\,, \quad \text{neboli} \quad \begin{aligned} x_{1,H}(t) &= c_1\mathrm{e}^t\cos t + c_2\mathrm{e}^t\sin t\,, \\ x_{2,H}(t) &= -c_1\mathrm{e}^t\sin t + c_2\mathrm{e}^t\cos t\,, \end{aligned}$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla.

Pravá strana nehomogenní soustavy (28) má tvar

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix},$$

a je tedy vektorový polynom stupně jedna. Protože $\mu = 0$ není kořen charakteristického polynomu, budeme hledat řešení nehomogenní soustavy ve tvaru $\mathbf{x}_N(t) = \mathbf{Q}_1(t)$, kde $\mathbf{Q}_1(t)$ je vektorový polynom stupně jedna, čili ve tvaru

$$\mathbf{x}_N(t) = \mathbf{a}t + \mathbf{b}, \quad \text{neboli} \quad \begin{aligned} x_1(t) &= a_1 t + b_1, \\ x_2(t) &= a_2 t + b_2, \end{aligned}$$

kde a_k a b_k jsou reálná čísla. Po dosazení do soustavy (28) pro ně dostaneme

$$a_1 = a_1 t + b_1 + a_2 t + b_2 + 1, \qquad a_2 = -a_1 t - b_1 + a_2 t + b_2 + 2t$$

neboli soustavu rovnic

$$a_1 + a_2 = 0, \quad a_1 - a_2 = 2, \qquad b_1 + b_2 = a_1 - 1, \quad b_1 - b_2 = -a_2,$$

která má řešení $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $b_1 = \frac{1}{2}$ a $b_2 = -\frac{1}{2}$. Tedy jedno řešení nehomogenní rovnice je

$$\mathbf{x}_N(t) = \begin{pmatrix} t + \frac{1}{2} \\ -t - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{neboli} \quad \begin{aligned} x_{1,N}(t) &= t + \tfrac{1}{2}, \\ x_{2,N}(t) &= -t - \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Obecné řešení soustavy (28) je

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_H(t) + \mathbf{x}_N(t), \quad \text{tj.} \quad \begin{aligned} x_1(t) &= c_1 \mathrm{e}^t \cos t + c_2 \mathrm{e}^t \sin t + t + \tfrac{1}{2}, \\ x_2(t) &= -c_1 \mathrm{e}^t \sin t + c_2 \mathrm{e}^t \cos t - t - \tfrac{1}{2}, \end{aligned}$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reálná čísla. Ta musíme zvolit tak, aby $x_1(0) = 1$ a $x_2(0) = -1$, tj. aby platilo

$$c_1 + \tfrac{1}{2} = 1, \quad c_2 - \tfrac{1}{2} = -1, \quad \text{tj.} \quad c_1 = \tfrac{1}{2}, \quad c_2 = -\tfrac{1}{2}.$$

Tedy řešení dané úlohy je

$$x_1(t) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^t(\cos t - \sin t) + t + \tfrac{1}{2}, \qquad x_2(t) = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^t(\sin t + \cos t) - t - \tfrac{1}{2}.$$

Příklad 15.r. Najděte řešení Cauchyovy úlohy pro soustavu diferenciálních rovnic

$$x_1' = -2x_1 + x_2 + 8\mathrm{e}^t, \qquad x_2' = -x_1 - 4x_2 + 2\mathrm{e}^{-3t}, \qquad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 2. \quad (30)$$

Řešení. Nejprve najděme obecné řešení soustavy (30). To má tvar $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_H(t) + \mathbf{x}_N(t)$, kde $\mathbf{x}_H(t)$ je obecné češeni homogenní soustavy

$$x_1' = -2x_1 + x_2, \qquad x_2' = -x_1 - 4x_2 \qquad (31)$$

a $\mathbf{x}_N(t)$ je jedno řešení nehomogenní soustavy (30).

Protože se jedná o soustavu s konstantními koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}$, kde λ je komplexní číslo a $\mathbf{v}$ je konstantní nenulový vektor. Charakteristický polynom soustavy (31)

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda\,, & 1 \\ -1\,, & -4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 9$$

má jeden dvojnásobný kořen $\lambda = -3$. Vektor $\mathbf{v}_1$ je řešení soustavy rovnic

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = 0\,, \quad \text{tj.} \quad \begin{pmatrix} 1\,, & 1 \\ -1\,, & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{neboli} \quad v_1 + v_2 = 0\,.$$

Nenulové řešení je například $v_1 = 1$ a $v_2 = -1$. Takto získáme jedno řešení homogenní soustavy

$$\mathbf{x}_{H,1}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}_1 = \mathrm{e}^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Druhé řešení homogenní soustavy získáme pomocí vztahu

$$\mathbf{x}_{H,2}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 t)\,,$$

kde $\mathbf{v}_2$ je řešení soustavy

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1\,, \quad \text{neboli} \quad \begin{pmatrix} 1\,, & 1 \\ -1\,, & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{tj.} \quad v_1 + v_2 = 1\,.$$

Její řešení je například $v_1 = 0$ a $v_2 = 1$. Jestliže zvolíme toho řešení, dostaneme druhé řešení homogenní rovnice

$$\mathbf{x}_{H,2}(t) = \mathrm{e}^{-3t} \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}.$$

Obecné řešení homogenní soustavy pak je

$$\mathbf{x}_H(t) = c_1\mathbf{x}_{H,1}(t) + c_2\mathbf{x}_{H,2}(t)\,, \quad \text{tj.} \quad \begin{aligned} x_{1,H}(t) &= c_1\mathrm{e}^{-3t} + c_2 t\mathrm{e}^{-3t}, \\ x_{2,H}(t) &= -c_1\mathrm{e}^{-3t} + c_2(1-t)\mathrm{e}^{-3t}, \end{aligned}$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reální čísla.

Pravá strana soustavy (30) je součet dvou vektorových funkcí

$$\mathbf{f}_1(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2(t) = \mathrm{e}^{-3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Proto budeme řešení nehomogenní soustavy hledat jako součet funkcí $\mathbf{x}_{N,1}(t)$ a $\mathbf{x}_{N,2}(t)$, kde $\mathbf{x}_{N,k}(t)$ jsou řešení nehomogenní soustavy s pravou stranou $\mathbf{f}_k(t)$.

Protože funkce $\mathbf{f}_1(t)$ je součin exponenciály e^t a konstantního vektoru, tj. polynomu stupně nula, a $\mu = 1$ není kořen charakteristického polynomu, budeme hledat řešení $\mathbf{x}_{N,1}(t)$ ve tvaru $\mathbf{x}_{N,1}(t) = \mathrm{e}^t\mathbf{Q}_0$, kde $\mathbf{Q}_0$ je vektorový polynom stupně nula, tj. ve tvaru

$$\mathbf{x}_{N,1}(t) = \mathrm{e}^t\mathbf{a}\,, \quad \text{neboli} \quad x_1(t) = a_1\mathrm{e}^t\,, \qquad x_2(t) = a_2\mathrm{e}^t\,.$$

Po dosazení do soustavy

$$x_1' = -2x_1 + x_2 + 8\mathrm{e}^t\,, \qquad x_2' = -x_1 - 4x_2 \tag{32}$$

a vykrácení společným faktorem e^t dostaneme

$$3a_1 - a_2 = 8\,, \quad a_1 + 5a_2 = 0\,, \quad \text{tj.} \quad a_1 = \tfrac{5}{2}\,, \quad a_2 = -\tfrac{1}{2}\,.$$

Tedy řešení soustavy (32) je

$$\mathbf{x}_{N,1}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{neboli} \quad \begin{aligned} x_1(t) &= \tfrac{5}{2}\,\mathrm{e}^t, \\ x_2(t) &= -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^t. \end{aligned}$$

Protože funkce $\mathbf{f}_2(t)$ je součin exponenciály e^{-3t} a vektorového polynomu stupně nula a $\mu = -3$ je kořen charakteristického polynomu násobnosti 2, budeme hledat řešení $\mathbf{x}_{N,2}(t)$ ve tvaru $\mathbf{x}_{N,2}(t) = \mathrm{e}^t\mathbf{Q}_2(t)$, kde $\mathbf{Q}_2(t)$ je vektorový polynom stupně dva, tj. ve tvaru

$$\mathbf{x}_{N,2}(t) = \mathrm{e}^{-3t}(\mathbf{a}t^2 + \mathbf{b}t + \mathbf{c})\,, \quad \text{tj.} \quad \begin{aligned} x_1(t) &= (a_1t^2 + b_1t + c_1)\mathrm{e}^{-3t}, \\ x_2(t) &= (a_2t^2 + b_2t + c_2)\mathrm{e}^{-3t}, \end{aligned}$$

kde a_k, b_k a c_k jsou reálná čísla.
Protože $\lambda = -3$ je kořen charakteristické rovnice, dostaneme v odhadu řešení zbytečně mnoho neznámých čísel. V takovém případě je často výhodnější řešit nehomogenní soustavu metodou eliminace.

Příslušná nehomogenní soustava je

$$x_1' = -2x_1 + x_2\,, \qquad x_2' = -x_1 - 4x_2 + 2\mathrm{e}^{-3t}\,. \tag{33}$$

Když derivujeme první rovnici v (33) a pak dosadíme za x_2' z druhé rovnice, dostaneme

$$x_1'' = -2x_1' + x_2' = -2x_1' - x_1 - 4x_2 + 2\mathrm{e}^{-3t}\,.$$

Z první rovnice v (33) plyne

$$x_2 = x_1' + 2x_1\,. \tag{34}$$

A když dosadíme toto vyjádření x_2 do předchozí rovnice, dostaneme

$$x_1'' = -2x_1' - x_1 - 4x_1' - 8x_1 + 2\mathrm{e}^{-3t}\,, \quad \text{tj.} \quad x_1'' + 6x_1' + 9x_1 = 2\mathrm{e}^{-3t}\,. \tag{35}$$

To je nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. Charakteristický polynom homogenní rovnice

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9$$

je stejný jako jako charakteristický polynom původní soustavy. Protože $\lambda = -3$ je kořen charakteristického polynomu násobnosti 2, budeme hledat řešení nehomogenní rovnice (35) ve tvaru

$$x_1(t) = a\mathrm{e}^{-3t} \cdot t^2\,,$$

kde a je reálné číslo. Protože

$$x_1' = a(-3t^2 + 2t)\mathrm{e}^{-3t}\,, \qquad x_1'' = a(9t^2 - 12t + 2)\mathrm{e}^{-3t}\,,$$

dostaneme po dosazení do rovnice (35), zjistíme, že $a = 1$. Tedy jedno řešení rovnice (35) je $x_1(t) = t^2\mathrm{e}^{-3t}$.
Druhou složku řešení soustavy k tomuto $x_1(t)$ dostaneme z rovnice (34). Z ní plyne

$$x_2(t) = (-3t^2 + 2t)\mathrm{e}^{-3t} + 2t^2\mathrm{e}^{-3t} = (2t - t^2)\mathrm{e}^{-3t}\,.$$

Tedy řešení soustavy (33) pro $\mathbf{x}_{N,2}(t)$ je

$$\mathbf{x}_{N,2}(t) = \mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} t^2 \\ 2t - t^2 \end{pmatrix}.$$

Jedno řešení celé nehomogenní soustavy (30) je

$$\mathbf{x}_N(t) = \mathbf{x}_{N,1}(t) + \mathbf{x}_{N,2}(t) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^t\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} t^2 \\ 2t - t^2 \end{pmatrix}$$

nebo ve složkách

$$x_1(t) = \tfrac{5}{2}\,\mathrm{e}^t + t^2\mathrm{e}^{-3t}\,, \qquad x_2(t) = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^t + (2t - t^2)\mathrm{e}^{-3t}\,.$$

Z toho dostaneme obecné řešení této soustavy

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_H(t) + \mathbf{x}_N(t)\,, \quad \text{neboli} \quad \begin{array}{l} x_1(t) = c_1\mathrm{e}^{-3t} + c_2 t\mathrm{e}^{-3t} + \frac{5}{2}\,\mathrm{e}^t + t^2\mathrm{e}^{-3t}, \\ x_2(t) = -c_1\mathrm{e}^{-3t} + c_2(1 - t)\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t + (2t - t^2)\mathrm{e}^{-3t}, \end{array}$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolná reální čísla. Ta najdeme z počátečních podmínek $x_1(0) = 1$ a $x_2(0) = 2$. Ty vedou k rovnicím

$$1 = c_1 + \tfrac{5}{2}\,, \quad 2 = -c_1 + c_2 - \tfrac{1}{2}\,, \quad \text{tj.} \quad c_1 = -\tfrac{3}{2}\,, \quad c_2 = 1\,.$$

To nám dává řešení dané Cauchyovy úlohy

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\tfrac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-3t} + t\mathrm{e}^{-3t} + \tfrac{5}{2}\,\mathrm{e}^t + t^2\mathrm{e}^{-3t} = \big(t^2 + t - \tfrac{3}{2}\big)\mathrm{e}^{-3t} + \tfrac{5}{2}\,\mathrm{e}^t, \\ x_2(t) &= \tfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t} + (1 - t)\mathrm{e}^{-3t} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^t + (2t - t^2)\mathrm{e}^{-3t} = \big(\tfrac{5}{2} + t - t^2\big)\mathrm{e}^{-3t} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^t. \end{aligned}$$

Příklad 1. Najděte obecné reálné řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$x_1' = 4x_1 - 6x_2\,, \qquad x_2' = 4x_1 - 7x_2\,.$$

$$\Big[x_1(t) = 2c_1\mathrm{e}^t + 3c_2\mathrm{e}^{-4t}, \quad x_2(t) = c_1\mathrm{e}^t + 4c_2\mathrm{e}^{-4t}.\Big]$$

Příklad 2. Najděte obecné reálné řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$x_1' = -7x_1 - 9x_2\,, \qquad x_2' = x_1 - x_2\,.$$

$$\Big[x_1(t) = -3c_1\mathrm{e}^{-4t} + c_2(1 - 3t)\mathrm{e}^{-4t}, \quad x_2(t) = c_1\mathrm{e}^{-4t} + c_2 t\mathrm{e}^{-4t}.\Big]$$

Příklad 3. Najděte obecné reálné řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$x_1' = 2x_1 + 3x_2\,, \qquad x_2' = -6x_1 - 4x_2\,.$$

$$\left[\begin{aligned} x_1(t) &= c_1\mathrm{e}^{-t}\cos 3t + c_2\mathrm{e}^{-t}\sin 3t\,,\\ x_2(t) &= c_1\mathrm{e}^{-t}(-\cos 3t - \sin 3t) + c_2\mathrm{e}^{-t}(\cos 3t - \sin 3t)\,.\end{aligned}\right]$$

Příklad 4. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x_1' = 7x_1 + 5x_2\,, \quad x_2' = -4x_1 - 5x_2\,, \qquad x_1(0) = 2\,, \quad x_2(0) = 2\,.$$

$$\left[x_1(t) = \tfrac{15}{4}\,\mathrm{e}^{5t} - \tfrac{7}{4}\,\mathrm{e}^{-3t}, \quad x_2(t) = -\tfrac{3}{2}\,\mathrm{e}^{5t} + \tfrac{7}{2}\,\mathrm{e}^{-3t}.\right]$$

Příklad 5. Najděte řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$x_1' = 7x_1 - 2x_2\,, \qquad x_2' = 8x_1 - x_2\,,$$

které splňuje podmínky $x_1(0) = 1$ a $x_2(0) = 2$. $\left[x_1(t) = \mathrm{e}^{3t}, \quad x_2(t) = 2\mathrm{e}^{3t}.\right]$

Příklad 6. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x_1' = 7x_1 - 5x_2\,, \quad x_2' = 10x_1 - 3x_2\,, \qquad x_1(0) = 2\,, \quad x_2(0) = -5\,.$$

$$\left[x_1(t) = \mathrm{e}^{2t}(2\cos 5t + 7\sin 5t)\,, \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{2t}(-5\cos 5t + 9\sin 5t)\,.\right]$$

Příklad 7. Najděte řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$x_1' - x_2' + 3x_1 + x_2 = 0\,, \qquad 2x_1' - 3x_2' + 3x_1 + 6x_2 = 0\,,$$

které splňuje podmínky $x_1(0) = 8$ a $x_2(0) = 0$.

$$\left[x_1(t) = -\mathrm{e}^{3t} + 9\mathrm{e}^{-5t}, \quad x_2(t) = -3\mathrm{e}^{-3t} + 3\mathrm{e}^{5t}.\right]$$

Příklad 8. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$2x_1' + x_2' + 2x_1 - 2x_2 = 0\,, \quad x_1' + 2x_2' + 10x_1 + 5x_2 = 0\,, \qquad x_1(0) = 1\,, \quad x_2(0) = 2\,.$$

$$\left[x_1(t) = \mathrm{e}^{-t}(\cos 3t + 3\sin 3t)\,, \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{-t}(2\cos 3t - 4\sin 3t)\,.\right]$$

Příklad 9. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x_1'' = 3x_1 + 4x_2\,, \quad x_2'' = 3x_1 - 8x_2\,, \qquad x_1(0) = 1\,, \quad x_2(0) = -3\,, \quad x_1'(0) = x_2'(0) = 0\,.$$

$$\left[x_1(t) = \cos 3t\,, \quad x_2(t) = -3\cos 3t\,.\right]$$

Příklad 10. Najděte řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$x_1'' - x_2' + 6x_1 = 0\,, \qquad x_2'' + 5x_1' - 6x_2 = 0\,,$$

které splňuje podmínky $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 3$, $x_1'(0) = 2$ a $x_2'(0) = -3$.

$$\left[x_1(t) = \tfrac{7}{13}\,\sinh 2t + \tfrac{4}{13}\,\sin 3t + \cos 3t\,, \quad x_2(t) = \tfrac{35}{13}\,\cosh 2t + \tfrac{4}{13}\,\cos 3t - \sin 3t\,.\right]$$

Příklad 11. Najděte obecné reálné řešení homogenní soustavy k soustavě diferenciálních rovnic

$$x_1' = -2x_1 + 5x_2 + t\mathrm{e}^{-3t} + 2\mathrm{e}^{-4t} + 2\mathrm{e}^{3t}\cos t\,, \qquad x_2' = 2x_1 + x_2 - 4\mathrm{e}^{-3t} + (1-2t)\mathrm{e}^{-4t}$$

a uveďte, v jakém tvaru budete hledat řešení nehomogenní soustavy.

$$\left[\begin{array}{l} x_{H,1}(t) = c_1\mathrm{e}^3 t + 5c_2\mathrm{e}^{-4t}, \quad x_{H,2}(t) = c_1\mathrm{e}^{3t} - 2c_2\mathrm{e}^{-4t}; \\ x_{N,1}(t) = (a_1t+b_1)\mathrm{e}^{-3t} + (c_1t^2+d_1t+e_1)\mathrm{e}^{-4t} + \mathrm{e}^{3t}(f_1\cos t + g_1\sin 3t)\,, \\ x_{N,2}(t) = (a_2t+b_2)\mathrm{e}^{-3t} + (c_2t^2+d_2t+e_2)\mathrm{e}^{-4t} + \mathrm{e}^{3t}(f_2\cos t + g_2\sin 3t)\,. \end{array}\right]$$

Příklad 12. Najděte obecné reálné řešení homogenní soustavy k soustavě diferenciálních rovnic

$$x_1' = x_1 - 4x_2 + t\mathrm{e}^{-2t} + 3\sin 2t\,, \qquad x_2' = 3x_1 - 6x_2 + 2\mathrm{e}^{3t} + t\cos 2t$$

a uveďte, v jakém tvaru budete hledat řešení nehomogenní soustavy.

$$\left[\begin{array}{l} x_{H,1}(t) = 4c_1\mathrm{e}^{-2t} + c_2\mathrm{e}^{-3t}\,, \quad x_{H,2}(t) = 3c_1\mathrm{e}^{-2t} + c_2\mathrm{e}^{-3t}; \\ x_{N,1}(t) = (a_1t^2+b_1t+c_1)\mathrm{e}^{-2t} + d_1\mathrm{e}^{3t} + (e_1t+f_1)\cos 2t + (g_1t+h_1)\sin 2t\,, \\ x_{N,2}(t) = (a_2t^2+b_2t+c_2)\mathrm{e}^{-2t} + d_2\mathrm{e}^{3t} + (e_2t+f_2)\cos 2t + (g_2t+h_2)\sin 2t\,. \end{array}\right]$$

Příklad 13. Najděte obecné reálné řešení homogenní soustavy k soustavě diferenciálních rovnic

$$x_1' = -5x_1 - x_2 + (1-2t)\mathrm{e}^{t}\,, \qquad x_2' = x_1 - 3x_2 + 2\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-2t}\cos t$$

a uveďte, v jakém tvaru budete hledat řešení nehomogenní soustavy.

$$\left[\begin{array}{l} x_{H,1}(t) = -c_1\mathrm{e}^{-4t} - c_2t\mathrm{e}^{-4t}, \quad x_{H,2}(t) = c_1\mathrm{e}^{-4t} + c_2(t+1)\mathrm{e}^{-4t}; \\ x_{N,1}(t) = (a_1t+b_1)\mathrm{e}^{t} + c_1\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-2t}(d_1\cos t + e_1\sin t)\,, \\ x_{N,2}(t) = (a_2t+b_2)\mathrm{e}^{t} + c_2\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-2t}(d_2\cos t + e_2\sin t)\,. \end{array}\right]$$

Příklad 14. Najděte obecné reálné řešení homogenní soustavy k soustavě diferenciálních rovnic

$$x_1' = -5x_1 - 4x_2 + (t+1)\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-t}\,, \qquad x_2' = 4x_1 + 3x_2 + \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t}\sin 2t$$

a uveďte, v jakém tvaru budete hledat řešení nehomogenní soustavy.

$$\left[\begin{array}{l} x_{H,1}(t) = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\big(t - \tfrac{1}{4}\big)\mathrm{e}^{-t}, \quad x_{H,2}(t) = -c_1\mathrm{e}^{-t} - c_2t\mathrm{e}^{-t}; \\ x_{N,1}(t) = (a_1t+b_1)\mathrm{e}^{2t} + (c_1t^2+d_1t+e_1)\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t}(f_1\cos 2t + g_1\sin 2t)\,, \\ x_{N,2}(t) = (a_2t+b_2)\mathrm{e}^{2t} + (c_2t^2+d_2t+e_2)\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t}(f_2\cos 2t + g_2\sin 2t)\,. \end{array}\right]$$

Příklad 15. Najděte obecné reálné řešení homogenní soustavy k soustavě diferenciálních rovnic

$$x_1' = x_1 - 2x_2 + \mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-t}\sin 2t\,, \qquad x_2' = 4x_1 - 3x_2 + t\mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{-t}\cos 2t$$

a uveďte, v jakém tvaru budete hledat řešení nehomogenní soustavy.

$$\left[\begin{array}{l} x_{H,1}(t) = c_1\mathrm{e}^{-t}\cos 2t + c_2\mathrm{e}^{-t}\sin 2t\,, \\ x_{H,2}(t) = c_1\mathrm{e}^{-t}(\cos 2t + \sin 2t) + c_2\mathrm{e}^{-t}(\sin 2t - \cos 2t)\,; \\ x_{N,1}(t) = (a_1t+b_1)\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t}\big((c_1t+d_1)\cos 2t + (e_1t+f_1)\sin 2t\big)\,, \\ x_{N,2}(t) = (a_2t+b_2)\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t}\big((c_2t+d_2)\cos 2t + (e_2t+f_2)\sin 2t\big)\,. \end{array}\right]$$

Příklad 16. Najděte obecné reálné řešení homogenní soustavy k soustavě diferenciálních rovnic

$$x_1' = 3x_1 - 2x_2 + 3\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{2t}\cos t\,, \qquad x_2' = x_1 + x_2 + 2t\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{2t}\sin t$$

a uveďte, v jakém tvaru budete hledat řešení nehomogenní soustavy.

$$\left[\begin{aligned} &x_{H,1}(t) = c_1\mathrm{e}^{2t}(\cos t - \sin t) + c_2\mathrm{e}^{2t}(\cos t + \sin t)\,, \quad x_{H,2}(t) = c_1\mathrm{e}^{2t}\cos t + c_2\mathrm{e}^{2t}\sin t\,; \\ &x_{N,1}(t) = a_1\mathrm{e}^{2t} + (b_1 t + c_1)\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{2t}\big((d_1 t + e_1)\cos t + (f_1 t + g_1)\sin t\big)\,, \\ &x_{N,2}(t) = a_2\mathrm{e}^{2t} + (b_2 t + c_2)\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{2t}\big((d_2 t + e_2)\cos t + (f_2 t + g_2)\sin t\big)\,. \end{aligned}\right]$$

Příklad 17. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x_1' = x_1 + 3x_2 + 5\mathrm{e}^{-t}\,, \quad x_2' = 3x_1 + x_2 - 3\mathrm{e}^{t}\,, \qquad x_1(0) = 1\,, \quad x_2(0) = 1\,.$$

$$\left[x_1(t) = \mathrm{e}^{4t} - 3\mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{t}, \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{4t} + 3\mathrm{e}^{-2t} - 3\mathrm{e}^{-t}.\right]$$

Příklad 18. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x_1' = -3x_1 - 8x_2 + \mathrm{e}^{2t}\,, \quad x_2' = 2x_1 + 5x_2 + 3\mathrm{e}^{2t}\,, \qquad x_1(0) = 0\,, \quad x_2(0) = 1\,.$$

$$\left[x_1(t) = (20t + 27)\mathrm{e}^{t} - 27\mathrm{e}^{2t}, \quad x_2(t) = -(10t + 16)\mathrm{e}^{t} + 17\mathrm{e}^{2t}.\right]$$

Příklad 19. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x_1' = 3x_1 - 2x_2 + 5t\mathrm{e}^{3t}\,, \quad x_2' = 5x_1 + x_2 - \mathrm{e}^{3t}\,, \qquad x_1(0) = 0\,, \quad x_2(0) = 0\,.$$

$$\left[\begin{aligned} x_1(t) &= -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2t}(\cos 3t + \sin 3t) + \tfrac{1}{2}\,(2t + 1)\mathrm{e}^{3t}, \\ x_2(t) &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2t}(\cos 3t - 2\sin 3t) + \tfrac{1}{2}\,(5t - 1)\mathrm{e}^{3t}. \end{aligned}\right]$$

Příklad 20. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x_1' = -4x_1 - 2x_2 + 3\mathrm{e}^{-t}\,, \quad x_2' = 3x_1 + x_2 - \mathrm{e}^{-t}\,, \qquad x_1(0) = 1\,, \quad x_2(0) = 2\,.$$

$$\left[x_1(t) = (1 - 4t)\mathrm{e}^{-t}, \quad x_2(t) = (2 + 6t)\mathrm{e}^{-t}.\right]$$

Příklad 21. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x_1' = 3x_1 - x_2 + \cos t\,, \quad x_2' = x_1 + x_2 - \sin t\,, \qquad x_1(0) = 2\,, \quad x_2(0) = 1\,.$$

$$\left[\begin{aligned} x_1(t) &= \tfrac{1}{25}\,\mathrm{e}^{2t}(40t + 53) + \tfrac{1}{25}\,(4\sin t - 3\cos t)\,, \\ x_2(t) &= \tfrac{1}{25}\,\mathrm{e}^{2t}(40t + 13) + \tfrac{3}{25}\,(3\sin t + 4\cos t)\,. \end{aligned}\right]$$

Příklad 22. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x_1' = 3x_1 - 2x_2 + 2\mathrm{e}^{-t}\cos 3t\,, \quad x_2' = 4x_1 - x_2 - \mathrm{e}^{-t}\sin 3t\,, \qquad x_1(0) = 1\,, \quad x_2(0) = 0\,.$$

$$\left[\begin{aligned} x_1(t) &= \tfrac{1}{145}\,\mathrm{e}^{t}(193\cos 2t + 236\sin 2t) + \tfrac{4}{145}\,\mathrm{e}^{-t}(\sin 3t - 12\cos 3t)\,, \\ x_2(t) &= \tfrac{1}{145}\,\mathrm{e}^{t}(429\sin 2t - 43\cos 2t) + \tfrac{1}{145}\,\mathrm{e}^{-t}(43\cos 3t - 64\sin 3t)\,. \end{aligned}\right]$$