Integrace per partes

VĚTA O INTEGRACI PER PARTES.

Nechť mají funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité derivace. Pak platí

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{1}$$

`Poznámka.` Předpoklad, že funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají spojité derivace, zaručuje, že integrály v (1) existují. Věta o integraci per partes platí za podstatně obecnějších předpokladu.

Příklad 1.r. Pomocí integrace per partes najděte integrál $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x$.

ŘEŠENÍ. Když označíme $g(x) = x^2$ a $f'(x) = \mathrm{e}^{-3x}$, je $g'(x) = 2x$ a $f(x) = -\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3x}$ a podle (1) platí

$$\int x^2\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{3}\,x^2\mathrm{e}^{-3x} - \int 2x\left(-\tfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3x}\right)\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{3}\,x^2\mathrm{e}^{-3x} + \tfrac{2}{3}\int x\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Jestliže v posledním integrálu označíme $g(x) = x$ a $f'(x) = \mathrm{e}^{-3x}$, je $g'(x) = 1$ a $f(x) = -\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3x}$. Tedy podle (1) je

$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x &= -\tfrac{1}{3}\,x^2\mathrm{e}^{-3x} + \tfrac{2}{3}\Big(-\tfrac{1}{3}\,x\mathrm{e}^{-3x} + \tfrac{1}{3}\int \mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x\Big) = \\ &= -\tfrac{1}{3}\,x^2\mathrm{e}^{-3x} + \tfrac{2}{3}\Big(-\tfrac{1}{3}\,x\mathrm{e}^{-3x} - \tfrac{1}{9}\,\mathrm{e}^{-3x}\Big) = \mathrm{e}^{-3x}\left(-\tfrac{1}{3}\,x^2 - \tfrac{2}{9}\,x - \tfrac{2}{27}\right).\end{aligned}$$

Příklad 2.r. Pomocí integrace per partes najděte integrál $\displaystyle\int (x^2 - x + 2)\sin\tfrac{x+1}{2}\,\mathrm{d}x$.

ŘEŠENÍ. Označme $g(x) = x^2 - x + 2$ a $f'(x) = \sin\frac{x+1}{2}$. Pak $g'(x) = 2x - 1$ a $f(x) = -2\cos\frac{x+1}{2}$. Podle (1) platí

$$\int (x^2 - x + 2)\sin\tfrac{x+1}{2}\,\mathrm{d}x = -2(x^2 - x + 2)\cos\tfrac{x+1}{2} + 2\int (2x-1)\cos\tfrac{x+1}{2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Pokud použiejme metodu per partes ještě na poslední integrál, dostaneme

$$\begin{aligned}&\int (x^2 - x + 2)\sin\tfrac{x+1}{2}\,\mathrm{d}x = \\ &\quad= -2(x^2 - x + 2)\cos\tfrac{x+1}{2} + 2\Big(2(2x-1)\sin\tfrac{x+1}{2} - 4\int \sin\tfrac{x+1}{2}\,\mathrm{d}x\Big) = \\ &\quad= -2(x^2 - x + 2)\cos\tfrac{x+1}{2} + 2\Big(2(2x-1)\sin\tfrac{x+1}{2} + 8\cos\tfrac{x+1}{2}\Big) = \\ &\quad= -2(x^2 - x - 6)\cos\tfrac{x+1}{2} + 4(2x-1)\sin\tfrac{x+1}{2}\,.\end{aligned}$$

Příklad 3.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Když označíme $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$ a $g(x) = \ln x$, je $f(x) = 2x^{1/2}$ a $g'(x) = \dfrac{1}{x}$. Podle (1) pak je

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\,\ln x - \int \frac{2\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\,\ln x - 2\int x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\,\ln x - 4\sqrt{x}\,.$$

Příklad 4.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Když integrovaný výraz napíšeme ve tvaru $1\cdot\ln^2 x$ a položíme $f'(x) = 1$ a $g(x) = \ln^2 x$, je $f(x) = x$ a $g'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$, je podle (1)

$$\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x = x\ln^2 x - 2\int \ln x\,\mathrm{d}x\,.$$

Poslední integrál můžeme opět najít metodou integrace per partes. Když položíme $f'(x) = 1$ a $g(x) = \ln x$, tj. $f(x) = x$ a $g'(x) = \dfrac{1}{x}$, dostamene

$$\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x = x\ln^2 x - 2\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln^2 x - 2\Big(x\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x\Big) =$$
$$= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x = x\big(\ln^2 x - 2\ln x + 2\big)\,.$$

Příklad 5.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Položíme $f'(x) = 1$ a $g(x) = \ln(1+x^2)$. Pak je $f(x) = x$, $g'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ a podle (1) dostaneme

$$\int \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x = x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = x\ln(1+x^2) - \int \left(2 - \frac{2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{arctg} x\,.$$

Příklad 6.r. Najděte integrál $\displaystyle\int (x^3+2x)\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Když položíme $f'(x) = x^3 + 2x$ a $g(x) = \operatorname{arctg} x$, tj. $f(x) = \frac14\,x^4 + x^2$ a $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, dostaneme podle (1)

$$\int (x^3+2x)\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = \big(\tfrac14\,x^4 + x^2\big)\operatorname{arctg} x - \int \frac{\frac14\,x^4 + x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

A protože

$$\frac{x^4+4x^2}{1+x^2} = x^2 + 3 - \frac{3}{1+x^2}\,,$$

je

$$\int (x^3+2x)\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = \big(\tfrac14\,x^4 + x^2\big)\operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{12}\,x^3 - \tfrac34\,x + \tfrac34\,\operatorname{arctg} x\,.$$

Příklad 7.r. Pomocí integrace per pertes najděte integrály

$$\int e^{3x} \sin x \, dx \qquad \text{a} \qquad \int e^{-2x} \cos 3x \, dx \,.$$

Řešení. Když označíme $f'(x) = \sin x$ a $g(x) = e^{3x}$, je $f(x) = -\cos x$ a $g'(x) = 3e^{3x}$. Podle (1) tedy platí

$$\int e^{3x} \sin x \, dx = -e^{3x} \cos x + 3 \int e^{3x} \cos x \, dx \,. \tag{2}$$

Poslední integrál můžeme opět nají pomocí integrace per partes. Označme $f'(x) = \cos x$ a $g(x) = e^{3x}$, tj. $f(x) = \sin x$ a $g'(x) = 3e^{3x}$. Podle (1) pak je

$$\int e^{3x} \cos x \, dx = e^{3x} \sin x - 3 \int e^{3x} \sin x \, dx \,. \tag{3}$$

Jestliže nyní zavedeme označení $S = \int e^{3x} \sin x \, dx$ a $C = \int e^{3x} \cos x \, dx$, lze vztahy (2) a (3) zapsat jako

$$S = -e^{3x} \cos x + 3C \,, \qquad C = e^{3x} \sin x - 3S \,. \tag{4}$$

To je soustava dvou lineárních rovnic pro S a C. Jestliže dosadíme za C z druhé rovnice do první, dostaneme

$$S = -e^{3x} \cos x + 3e^{3x} \sin x - 9S \,, \quad \text{tj.} \quad S = \int e^{3x} \sin x \, dx = \tfrac{1}{10} e^{3x} \bigl(-\cos x + 3 \sin x \bigr) \,.$$

Druhý integrál můžeme najít podobně. Když vezmeme $f'(x) = \cos 3x$ a $g(x) = e^{-2x}$, dostaneme pomocí (1) rovnost

$$\int e^{-2x} \cos 3x \, dx = \tfrac{1}{3} e^{-2x} \sin 3x + \tfrac{2}{3} \int e^{-2x} \sin 3x \, dx \,. \tag{5}$$

Když ještě položíme $f'(x) = \sin 3x$ a $g(x) = e^{-2x}$, dostaneme rovnost

$$\int e^{-2x} \sin 3x \, dx = -\tfrac{1}{3} e^{-2x} \cos 3x - \tfrac{2}{3} \int e^{-2x} \cos 3x \, dx \,. \tag{6}$$

Pokud označíme $S = \int e^{-2x} \sin 3x \, dx$ a $C = \int e^{-2x} \cos 3x \, dx$, tvoří (5) a (6) soustavu dvou lineárních rovnic

$$C = \tfrac{1}{3} e^{-2x} \sin 3x + \tfrac{2}{3} S \,, \qquad S = -\tfrac{1}{3} e^{-2x} \cos 3x - \tfrac{2}{3} C \,,$$

pro S a C. Její řešení je

$$C = \int e^{-2x} \cos 3x \, dx = \tfrac{1}{13} e^{-2x} \bigl(3 \sin 3x - 2 \cos 3x \bigr) \,,$$
$$S = \int e^{-2x} \sin 3x \, dx = -\tfrac{1}{13} e^{-2x} \bigl(3 \cos 3x + 2 \sin 3x \bigr) \,.$$

Příklad 8.r. Pomocí integrace per partes najděte integrál $\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Když vezmeme $f'(x) = 1$ a $g(x) = \sqrt{1+x^2}$, je podle (1)

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{(1+x^2)-1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \\ &= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \\ &= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \ln\bigl(x + \sqrt{1+x^2}\bigr)\,.\end{aligned}$$

Pro hledaný integrál jsme tedy dostali rovnici

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \ln\bigl(x + \sqrt{1+x^2}\bigr)\,,$$

ze které plyne

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\,x\sqrt{1+x^2} + \tfrac{1}{2}\,\ln\bigl(x + \sqrt{1+x^2}\bigr)\,.$$

Příklad 9.r. Pomocí metody per partes budeme počítat integrál $\int \sin^n x\,\mathrm{d}x$, kde $n = 2, 3, \ldots$. Když položíme $f'(x) = \sin x$ a $g(x) = \sin^{n-1} x$, je $f(x) = -\cos x$ a $g'(x) = (n-1)\cos x \sin^{n-2} x$. Podle (1) platí rovnost

$$\int \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \cos^2 x \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x\,.$$

Když použijeme rovnost $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, dostaneme vztah

$$\int \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x - (n-1)\int \sin^n x\,\mathrm{d}x\,.$$

Z této rovnice plyne, že pro $n = 2, 3, \ldots$ platí

$$\int \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x\,. \tag{7}$$

Podobně lze ukázat, že pro $n = 2, 3, \ldots$ platí

$$\int \cos^n x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,\mathrm{d}x\,. \tag{8}$$

Příklad 10.r. Pomocí vztahů (7) a (8) najděte integrály

$$\int \sin^5 x\,\mathrm{d}x \qquad \text{a} \qquad \int \cos^6 x\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení. Když v (7) položíme $n = 5$, dostaneme

$$\int \sin^5 x\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{5}\,\cos x \sin^4 x + \tfrac{4}{5}\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x\,.$$

Poslední integrál můžeme najít tak, že ve vzorci (7) položíme $n = 3$. Pak dostaneme

$$\int \sin^5 x \, \mathrm{d}x = -\tfrac{1}{5} \cos x \sin^4 x + \tfrac{4}{5} \left(-\tfrac{1}{3} \cos x \sin^2 x + \tfrac{2}{3} \int \sin x \, \mathrm{d}x \right) =$$
$$= -\tfrac{1}{5} \cos x \sin^4 x - \tfrac{4}{15} \cos x \sin^2 x - \tfrac{8}{15} \cos x \, .$$

Druhý integrál lze najít tak, že ve vztahu (8) položíme postupně $n = 6$, $n = 4$ a $n = 2$. Tak dostaneme

$$\begin{aligned}
\int \cos^6 x \, \mathrm{d}x &= \tfrac{1}{6} \sin x \cos^5 x + \tfrac{5}{6} \int \cos^4 x \, \mathrm{d}x = \\
&= \tfrac{1}{6} \sin x \cos^5 x + \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{3}{4} \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \\
&= \tfrac{1}{6} \sin x \cos^5 x + \tfrac{5}{24} \sin x \cos^3 x + \tfrac{5}{8} \cdot \tfrac{1}{2} \sin x \cos x + \tfrac{5}{8} \cdot \tfrac{1}{2} \int \cos^0 x \, \mathrm{d}x = \\
&= \tfrac{1}{6} \sin x \cos^5 x + \tfrac{5}{24} \sin x \cos^3 x + \tfrac{5}{16} \sin x \cos x + \tfrac{5}{16} x \, .
\end{aligned}$$

Příklad 11.r. Pomocí vztahů (7) a (8) najděte integrál $\int \sin^4 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Pokud použijeme vztah $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, dostameme rovnost

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \int \sin^4 x \, \mathrm{d}x - \int \sin^6 x \, \mathrm{d}x \, .$$

Ze vztahu (7) plyne

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x \, \mathrm{d}x \cos^2 x \, \mathrm{d}x &= \int \sin^4 x \, \mathrm{d}x + \tfrac{1}{6} \cos x \sin^5 x - \tfrac{5}{6} \int \sin^4 x \, \mathrm{d}x = \\
&= \tfrac{1}{6} \cos x \sin^5 x + \tfrac{1}{6} \int \sin^4 x \, \mathrm{d}x = \\
&= \tfrac{1}{6} \cos x \sin^5 x - \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{4} \cos x \sin^3 x + \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{3}{4} \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \\
&= \tfrac{1}{6} \cos x \sin^5 x - \tfrac{1}{24} \cos x \sin^3 x + \tfrac{1}{8} \left(-\tfrac{1}{2} \cos x \sin x + \tfrac{1}{2} x \right) = \\
&= \tfrac{1}{6} \cos x \sin^5 x - \tfrac{1}{24} \cos x \sin^3 x - \tfrac{1}{16} \cos x \sin x + \tfrac{1}{16} x \, .
\end{aligned}$$

Příklad 1. Pomocí metody per partes spočíejte integrály

a. $\displaystyle\int (2x-3)\mathrm{e}^{3x} \, \mathrm{d}x$, **b.** $\displaystyle\int x^2 \mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x$, **c.** $\displaystyle\int (x-1)(x^2+2x+2)\mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$.

[**a.** $\frac{1}{9} \mathrm{e}^{3x}(6x-11) + c$; **b.** $\frac{1}{4} \mathrm{e}^{2x}(2x^2 - 2x + 1) + c$;
c. $-\mathrm{e}^{-x}(x^3 + 4x^2 + 8x + 6) + c$.]

Příklad 2. Pomocí metody per partes spočíejte integrály

a. $\displaystyle\int x \sin 3x \, \mathrm{d}x$, **b.** $\displaystyle\int (x-1) \cos \tfrac{1}{2}x \, \mathrm{d}x$,

c. $\displaystyle\int (x^2+2x+3) \sin x \, \mathrm{d}x$, **d.** $\displaystyle\int (x+1)(x-2) \cos 2x \, \mathrm{d}x$.

$$\left[\begin{array}{ll}\textbf{a}. & -\frac{1}{3}\,x\cos 3x+\frac{1}{9}\,\sin 3x+c\,;\\ \textbf{b}. & 4\cos\frac{1}{2}x+2(x-1)\sin\frac{1}{2}x+c\,;\\ \textbf{c}. & 2(x+1)\sin x-(x+1)^2\cos x+c\,;\\ \textbf{d}. & \bigl(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}\bigr)\sin 2x+\bigl(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\bigr)\cos 2x+c\,.\end{array}\right]$$

Příklad 3. Najděte integrály

$$\textbf{a}.\quad \int \ln x\,\mathrm{d}x\,,\qquad \textbf{b}.\quad \int \bigl(x\ln x\bigr)^2\,\mathrm{d}x\,,\qquad \textbf{c}.\quad \int x^{3/2}\ln^3 x\,\mathrm{d}x\,,\qquad \textbf{d}.\quad \int \ln(1-x^2)\,\mathrm{d}x\,.$$

$$\left[\begin{array}{ll}\textbf{a}. & x\bigl(\ln x-1\bigr)+c\,;\\ \textbf{b}. & x^3\bigl(\frac{1}{3}\,\ln^2 x-\frac{2}{9}\,\ln x+\frac{2}{27}\bigr)+c\,;\\ \textbf{c}. & x^{5/2}\bigl(\frac{2}{5}\,\ln^3 x-\frac{12}{25}\,\ln^2 x+\frac{48}{125}\,\ln x-\frac{96}{625}\bigr)+c\,;\\ \textbf{d}. & x\ln\bigl(1-x^2\bigr)-2x+\ln\frac{1+x}{1-x}+c\,.\end{array}\right]$$

Příklad 4. Najděte integrály

$$\textbf{a}.\quad \int 2x\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x\,,\qquad \textbf{b}.\quad \int \frac{\mathrm{arctg}\,\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,.$$

$$\bigl[\textbf{a}.\ \ (x^2+1)\,\mathrm{arctg}\,x-x+c\,;\qquad \textbf{b}.\ \ 2\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x}-\ln(1+x)+c\,.\bigr]$$

Příklad 5. Pomocí integrace per partes najděte integrály

$$\textbf{a}.\quad \int \mathrm{e}^x(\sin 2x-3\cos 2x)\,\mathrm{d}x\,,\qquad \textbf{b}.\quad \int \mathrm{e}^{-3x}(2\cos x+\sin x)\,\mathrm{d}x\,.$$

$$\bigl[\textbf{a}.\ \ -\mathrm{e}^x(\cos 2x+\sin 2x)+c\,;\quad \textbf{b}.\ \ -\frac{1}{10}\,\mathrm{e}^{-3x}(7\cos x+\sin x)+c\,.\bigr]$$

Příklad 6. Pomocí integrace per partes najděte integrály

$$\textbf{a}.\quad \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,,\qquad \textbf{b}.\quad \int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x\,.$$

$$\bigl[\textbf{a}.\ \ \frac{1}{2}\,x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\,\arcsin x+c\,;\quad \textbf{b}.\ \ \frac{1}{2}\,x\sqrt{x^2-1}-\ln\bigl(x+\sqrt{x^2-1}\bigr)+c\,.\bigr]$$

Příklad 7. Dokažte, že pro $n = 2,\ 3,\ \ldots$ platí vztah (8).

Příklad 8. Spočítejte integrály

$$\begin{array}{llll}\textbf{a}. & \displaystyle\int \cos^7 x\,\mathrm{d}x\,, & \textbf{b}. & \displaystyle\int \sin^8 x\,\mathrm{d}x\,,\\ \textbf{c}. & \displaystyle\int \cos^6 x\sin^2 x\,\mathrm{d}x\,, & \textbf{d}. & \displaystyle\int \sin^4 x\cos^4 x\,\mathrm{d}x\,.\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ll}\textbf{a}. & \bigl(\frac{1}{7}\,\cos^6 x+\frac{6}{35}\,\cos^4 x+\frac{8}{35}\,\cos^2 x+\frac{16}{35}\bigr)\sin x\,;\\ \textbf{b}. & \frac{105}{384}\,x-\bigl(\frac{1}{8}\,\sin^7 x+\frac{7}{48}\,\sin^5 x+\frac{35}{192}\,\sin^3 x+\frac{105}{384}\,\sin x\bigr)\cos x+c\,;\\ \textbf{c}. & \frac{15}{384}\,x+\bigl(-\frac{1}{8}\,\cos^7 x+\frac{1}{48}\,\cos^5 x+\frac{5}{192}\,\cos^3 x+\frac{15}{384}\,\cos x\bigr)\sin x+c\,;\\ \textbf{d}. & \frac{3}{128}\,x-\frac{1}{128}\,\bigl(\sin^3 2x+\frac{3}{2}\,\sin 2x\bigr)\cos 2x+c\,.\end{array}\right]$$

Příklad 9. Najděte chybu v následující úvaze

$$\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \,\mathrm{d}x = \frac{-\cos x}{\cos x} - \int (-\cos x) \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) \mathrm{d}x =$$
$$= -1 + \int \frac{\sin x}{\cos x} \,\mathrm{d}x = -1 + \int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x \,,$$

kde jsme při integraci per partes použili

$$f'(x) = \sin x \quad g(x) = \frac{1}{\cos x} \implies f(x) = -\cos x \,, \quad g'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \,.$$

Tedy platí

$$\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x = -1 + \int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x \,. \tag{9}$$

A když na obou stranách odečteme $\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x$, dostaneme rovnost $0 = -1$.

[Neurčité integrály jsou určeny až na libovolnou konstantu.
Tato konstanta může být na levé a pravé straně rovnice (9) zvolena různě.
Proto nelze neurčité integrály na levé a pravé straně rovnosti (9) jednoduše odečíst.
Přesněji platí $\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x - \int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x = \int \big(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x\big) \,\mathrm{d}x = \int 0 \,\mathrm{d}x = c$,
kde c je libovolné číslo.]