Substituce v neurčitém integrálu

PRVNÍ VĚTA O SUBSTITUCI

Nechť má funkce $y = y(x)$ spojitou derivaci a $F(y)$ je primitivní funkce k funkci $f(y)$. Pak je

$$\int f\big(y(x)\big)y'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y = F\big(y(x)\big)\,. \tag{1}$$

DRUHÁ VĚTA O SUBSTITUCI

Nechť má funkce $x = \varphi(t)$ na intervalu (a, b) spojitou nenulovou derivaci. Pak platí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \Psi(t) = \Psi\big(\varphi^{(-1)}(x)\big)\,, \tag{2}$$

kde $\Psi(t)$ je primitivní funkce k funkci $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$ a $t = \varphi^{(-1)}(x)$ je inverzní funkce k $x = \varphi(t)$.

Příklad 1.r. Najděte integrál $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

ŘEŠENÍ. Když označíme $y = y(x) = 1 - x^2$, je $\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x = -2x\,\mathrm{d}x$. Podle první věty o substituci (1) pak je

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}\,\big(-2x\,\mathrm{d}x\big) = -\tfrac{1}{2}\int \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = -\tfrac{1}{2}\,\tfrac{2}{3}\,y^{3/2} = -\tfrac{1}{3}\,(1-x^2)^{3/2}.$$

Příklad 2.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

ŘEŠENÍ. Zavedeme proměnnou $t \in (-\frac{1}{2}\,\pi, \frac{1}{2}\,\pi)$ pomocí vztahu $x = x(t) = \sin t$. Protože $x'(t) = \cos t$ je na intervalu $(-\frac{1}{2}\,\pi, \frac{1}{2}\,\pi)$ nenulová, platí podle druhé věty o substituci

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,\mathrm{d}t = \int |\cos t|\,\cos t\,\mathrm{d}t\,.$$

Ale protože je $t \in (-\frac{1}{2}\,\pi, \frac{1}{2},\,\pi)$, je $\cos t > 0$, a tedy $|\cos t| = \cos t$. Proto platí

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \tfrac{1}{2}\,(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\,t + \tfrac{1}{4}\,\sin 2t = \tfrac{1}{2}\,t + \tfrac{1}{2}\,\sin t\cos t\,.$$

Tedy funkce $\Psi(t)$ ve vztahu (2) je

$$\Psi(t) = \tfrac{1}{2}\,t + \tfrac{1}{2}\,\sin t\cos t\,.$$

Do ní musíme ještě dosadit za proměnnou t, kterou jsme definovali vztahem $x = \sin t$, kde $t \in (-\frac{1}{2}\,\pi, \frac{1}{2}\,\pi)$. Z toho plyne, že $t = \arcsin x$, a proto

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\,\arcsin x + \tfrac{1}{2}\,\sin(\arcsin x)\,\cos(\arcsin x)\,.$$

Ale podle definice je $\sin(\arcsin x) = x$. A protože je na uvažovaném intervalu $\cos t > 0$, platí $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2}$. Proto můžeme psát

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\,\arcsin x + \tfrac{1}{2}\,x\sqrt{1-x^2}\,.$$

`Poznámka:` Jak je vidět z uvedených příkladů, je použití druhé věty o substituci složitější než použití první věty. Problém je v tom, že potřebujeme jak funkci $x = \varphi(t)$, tak její inverzní funkci $t = \varphi^{(-1)}(x)$. Na druhé straně při použití první věty o substituci potřebujeme mít integrovanou funkci zapsanou ve speciálním tvaru $f\big(y(x)\big)\, y'(x)$, který nemusí být zřejmý na první pohled.

Pokud chceme v integrálu $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ provést substituci $y = y(x)$, lze formálně postupovat tak, že z rovnice $y = y(x)$ najdeme

$$\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{tj.} \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{y'(x)}\,.$$

Formálně pak je

$$f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\frac{\mathrm{d}y}{y'(x)} = \frac{f(x)}{y'(x)}\,\mathrm{d}y\,.$$

Nyní ale potřebujeme zapsat funkci $\dfrac{f(x)}{y'(x)}$ pomocí proměnné y, kde $y = y(x)$, tj. nají funkci $g(y)$ takovou, aby $g\big(y(x)\big) = \dfrac{f(x)}{y'(x)}$. Toto vyjádření může být na první pohled zřejmé a používáme vlastně první větu o substituci.

Pokud takové vyjádření nevidíme, najdeme inverzní funkci $x = x(y)$ k funkci $y = y(x)$ a dostaneme

$$f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(x)}{y'(x)}\,\mathrm{d}y = \frac{f\big(x(y)\big)}{y'\big(x(y)\big)}\,\mathrm{d}y\,.$$

Pak už můžeme psát

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{f\big(x(y)\big)}{y'\big(x(y)\big)}\,\mathrm{d}y\,.$$

Jestliže chceme v integrálu $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ provést substituci $x = x(y)$, najdeme nejprve $\mathrm{d}x = x'(y)\,\mathrm{d}y$ a po formálněm dosazení, dostaneme

$$f(x)\,\mathrm{d}x = f\big(x(y)\big)x'(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

A protože na pravé straně je funkce proměnné y, lze přímo psát

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f\big(x(y)\big)x'(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Ale pokud se nám podaří najít integrál vpravo, musíme do něj ještě dosadit za y z inverzní funkce k funkci $x = x(y)$. To je vlastně druhá věta o substituci.

Často je při substituci v integrálu výhodné používat obě vzájemně inverzní vztahy $y = y(x)$ a $x = x(y)$.

Pokusím se ty kecy ukázat na příkladě. V integrálu $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ udělám substituci $y = 1 - x^2$. Nejprve spočítám

$$\mathrm{d}y = -2x\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{tj.} \quad \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}y}{2x}\,.$$

Tady potřebuji $x \neq 0$. Po dosazení dostanu

$$\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1-x^2}\,\left(-\frac{\mathrm{d}y}{2x}\right) = -\frac{\sqrt{y}}{2x}\,\mathrm{d}y\,.$$

Do posledního výrazu musím ještě dosadit za x z rovnice $y = 1 - x^2$, tj. $x^2 = 1 - y$. Abych z této rovnice spočítal x budu předpkládat, že $x > 0$. Pak je $x = \sqrt{1-y}$ a po dosazení dostanu

$$\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{1-y}}\,\mathrm{d}y\,.$$

A protože mám na pravé straně pouze y, můžu psát

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2}\int \sqrt{\frac{y}{1-y}}\,\mathrm{d}y\,.$$

Jinak jsme mohli postupovat také tak, že z rovnice $y = 1 - x^2$ spočítáme $x = \sqrt{1-y}$, kde $x > 0$. Pak je

$$\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{1-y}}$$

a po dosazení dostaneme

$$\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-y}}\,\mathrm{d}y = -\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{1-y}}\,\mathrm{d}y\,.$$

Příklad 3.r. Najděte integrál $\displaystyle\int x^2\sqrt[4]{1+x^3}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. V integrálu je nepříjemný výraz $1 + x^3$ pod odmocninou. Můžeme se ho zkusit zbavit substitucí $y = 1 + x^3$. Pak je

$$\mathrm{d}y = 3x^2\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{tj.} \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{3x^2}\,.$$

Při tomto postupu se musíme omezit na $x \neq 0$, tj. na intervaly $x > 0$ nebo $x < 0$. Pak dostaneme

$$x^2\sqrt[4]{1+x^3}\,\mathrm{d}x = x^2\sqrt[4]{y}\,\frac{\mathrm{d}y}{3x^2} = \tfrac{1}{3}\sqrt[4]{y}\,\mathrm{d}y\,.$$

Nyní už můžeme psát

$$\int x^2\sqrt[4]{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\int \sqrt[4]{y}\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{3}\int y^{1/4}\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{3}\,\tfrac{4}{5}\,y^{5/4} = \tfrac{4}{15}\big(1+x^3\big)^{5/4}.$$

`Poznámka.` Uvedený postup je typický pro druhou větu o substituci. Pokud si ale všimneme, že $x^2 = \frac{1}{3}\,(1+x^3)'$, lze integrál psát ve tvaru

$$\int x^2\sqrt[4]{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\int \sqrt[4]{1+x^3}\,(1+x^3)'\,\mathrm{d}x\,,$$

tj. ve tvaru (1), kde $y = 1 + x^3$. Pak lze použít první větu o substituci a není nutné omezit se na kladná nebo záporná x.

Příklad 4.r. Najděte interál $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x^2}}$.

Řešení. Pokud si všimenme toho, že $x = -\frac{1}{4}\,(1-2x^2)'$, lze uvedený integrál napsat jako

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x^2}} = -\tfrac{1}{4}\int \frac{(1-2x^2)'\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x^2}}\,.$$

Proto je výhodné zavést substituci $y = 1 - 2x^2$. Pak je $\mathrm{d}y = -4x\,\mathrm{d}x$ a

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x^2}} = -\tfrac{1}{4}\int \frac{(-4x\,\mathrm{d}x)}{\sqrt{1-2x^2}} = -\tfrac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{y} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{1-2x^2}\,.$$

Příklad 5.r. Najděte interál $\displaystyle\int \frac{(2x+1)\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$.

Řešení. Pokud si všimenme toho, že $2x+1 = (x^2+x+1)'$, zjistíme, že je výhodné zavést substituci $y = x^2+x+1$. Pak totiž $\mathrm{d}y = (2x+1)\,\mathrm{d}x$ a uvedený integrál je

$$\int \frac{(2x+1)\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln|y| = \ln(x^2+x+1)\,.$$

(Protože je $x^2+x+1>0$, lze vynechat absolutní hodnotu v logaritmu.)

Příklad 6.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{(3x+2)\,\mathrm{d}x}{x^2+4x+8}$.

Řešení. Protože $(x^2+4x+8)' = 2x+4$ umíme pomocí substituce $y = x^2+4x+8$ najít integrál

$$\int \frac{(2x+4)\,\mathrm{d}x}{x^2+4x+8} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln|y| = \ln(x^2+4x+8)\,.$$

Protože

$$x^2+4x+8 = (x+2)^2+4 = 4\left(\frac{(x+2)^2}{4}+1\right) = 4\left(\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1\right),$$

víme, že

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+8} = \tfrac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+2}{2}\,.$$

Integrál z tohoto příkladu je vlastně lineární kombinace těchto dvou integrálů. Existují totiž reálná čísla α a β taková, že

$$\int \frac{(3x+2)\,\mathrm{d}x}{x^2+4x+8} = \alpha\int \frac{(2x+4)\,\mathrm{d}x}{x^2+4x+8} + \beta\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+8} = \int \frac{\alpha(2x+4)+\beta}{x^2+4x+8}\,\mathrm{d}x\,.$$

Tedy pro musí platit

$$3x+2 = \alpha(2x+4)+\beta = 2\alpha x + (4\alpha+\beta)\,, \quad \text{neboli} \quad 2\alpha = 3\,, \quad 4\alpha+\beta = 2\,.$$

To znamená, že $\alpha = \frac{3}{2}$ a $\beta = -4$. Proto je hledaný integrál

$$\int \frac{(3x+2)\,\mathrm{d}x}{x^2+4x+8} = \tfrac{3}{2}\int \frac{(2x+4)\,\mathrm{d}x}{x^2+4x+8} - 4\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+8} =$$
$$= 3\ln\sqrt{x^2+4x+8} - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+2}{2} + c\,.$$

Příklad 7.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+3x+5}}$.

Řešení. Protože $(x^2+3x+5)' = 2x+3$, umíme pomocí substituce $y = x^2+3x+5$ najít integrál
$$\int \frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+3x+5}} = \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{y} = 2\sqrt{x^2+3x+5}\,.$$
Protože
$$x^2+3x+5 = \left(x+\tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4} + 5 = \left(x+\tfrac{3}{2}\right)^2 + \tfrac{11}{4} = \tfrac{11}{4}\left(\frac{4(x+\frac{3}{2})}{11}+1\right) = \tfrac{11}{4}\left(\left(\frac{2x+3}{\sqrt{11}}\right)^2+1\right)$$
umíme také spočítat integrál
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+3x+5}} = \frac{2}{\sqrt{11}} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{11}}\right)^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{11}}\,\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{11}}} \ln\!\left(\frac{2x+3}{\sqrt{11}} + \sqrt{\frac{(2x+3)^2}{11}+1}\right) =$$
$$= \ln\left(\frac{2x+3}{\sqrt{11}} + \sqrt{\frac{(2x+3)^2}{11}+1}\right).$$
Náš integrál je vlastně lineární kombinace těchto integrálů. Platí totiž
$$\int \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+3x+5}} = \alpha \int \frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+3x+5}} + \beta \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+3x+5}}\,,$$
kde pro reálná čísla α a β platí
$$\alpha(2x+3)+\beta = x+1\,, \quad \text{tj.} \quad \alpha = \tfrac{1}{2}\,, \quad \beta = -\tfrac{1}{2}\,.$$
Proto je
$$\int \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+3x+5}} = \sqrt{x^2+3x+5} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2x+3}{\sqrt{11}} + \sqrt{\frac{(2x+3)^2}{11}+1}\right) + c\,.$$
Logaritmus v tomto výsledku lze zapsat také jinak. Platí totiž
$$\frac{2x+3}{\sqrt{11}} + \sqrt{\frac{(2x+3)^2}{11}+1} = \frac{2x+3+\sqrt{(2x+3)^2+11}}{\sqrt{11}} = \frac{2x+3+2\sqrt{x^2+3x+5}}{\sqrt{11}}\,.$$
Proto je
$$\ln\left(\frac{2x+3}{\sqrt{11}} + \sqrt{\frac{(2x+3)^2}{11}+1}\right) = \ln\!\left(2x+3+2\sqrt{x^2+3x+5}\right) - \tfrac{1}{2}\ln 11\,.$$
A protože je konstanta c v neurčitém integrálu libovolné číslo, lze psát
$$\int \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+3x+5}} = \sqrt{x^2+3x+5} - \tfrac{1}{2}\ln\!\left(2x+3+2\sqrt{x^2+3x+5}\right) + c\,.$$

Příklad 8.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4+3x-x^2}}$.

Řešení. Při hledání tohoto integrálu lze postupovat podobně jako v předcházejících dvou příkladech. Protože $(4+3x-x^2)' = 3-2x$ napišeme integrál ve tvaru

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4+3x-x^2}} = \int \frac{\alpha(3-2x)+\beta}{\sqrt{4+3x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \alpha \int \frac{(3-2x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4+3x-x^2}} + \beta \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4+3x-x^2}}\,,$$

kde pro reálná čísla α a β platí

$$\alpha(3-2x)+\beta = -2\alpha x + (3\alpha+\beta) = x\,, \quad \text{tj.} \quad \alpha = -\tfrac{1}{2}\,, \quad \beta = \tfrac{3}{2}\,.$$

Máme tedy

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4+3x-x^2}} = -\tfrac{1}{2} \int \frac{(3-2x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4+3x-x^2}} + \tfrac{3}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4+3x-x^2}}\,.$$

První integrál lze najít pomocí substituce $y = 4+3x-x^2$. Pak je

$$\int \frac{(3-2x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4+3x-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{y} = 2\sqrt{4+3x-x^2}\,.$$

Protože

$$x^2-3x-4 = \left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4} - 4 = (\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{25}{4} = \tfrac{25}{4}\left(\left(\frac{2x-3}{5}\right)^2 - 1\right),$$

je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4+3x-x^2}} = \frac{2}{5} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-3}{5}\right)^2}} = \frac{2}{5}\,\frac{1}{\frac{2}{5}} \arcsin\frac{2x-3}{5} = \arcsin\frac{2x-3}{5}\,.$$

Tedy hledaný integrál je

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4+3x-x^2}} = -\sqrt{4+3x-x^2} + \tfrac{3}{2} \arcsin\frac{2x-3}{5} + c\,.$$

Příklad 9.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Nejprve použijeme metodu integrace per partes. Vezmeme $f'(x) = 1$ a $g(x) = \operatorname{arctg} x$. Pak je $f(x) = x$ a $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Pomocí integrace per partes pak dostaneme

$$\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}\,.$$

Protože $(1+x^2)' = 2x$, zavedeme novou proměnnou

$$y = 1+x^2 \implies \mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x \implies x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Po substituci pak dostaneme

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \tfrac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \tfrac{1}{2} \ln y = \tfrac{1}{2} \ln(1+x^2) = \ln\sqrt{1+x^2}\,.$$

Hledaný integrál tedy je

$$\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2} + c\,.$$

Příklad 10.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \arcsin 2x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Nejprve použijeme metodu integrace per partes. Když vezmeme $f'(x) = 1$ a $g(x) = \arcsin 2x$, je $f(x) = x$ a $g'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$. Tedy

$$\int \arcsin 2x \, \mathrm{d}x = x \arcsin 2x - \int \frac{2x \, \mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2}}\,.$$

Protože $(1-4x^2)' = 8x$, je výhodné použít substituci

$$y = 1 - 4x^2 \implies \mathrm{d}y = -8x \, \mathrm{d}x \implies 2x \, \mathrm{d}x = -\tfrac{1}{4} \, \mathrm{d}y\,.$$

Proto je

$$\int \frac{2x \, \mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2}} = -\tfrac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{y} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}$$

a celý integrál je

$$\int \arcsin 2x \, \mathrm{d}x = x \arcsin 2x + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + c\,.$$

Příklad 11.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(2x-1) \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Nejprve použijeme integraci per partes, kde $f'(x) = 1$ a $g(x) = \operatorname{arctg}(2x-1)$. Pokud vezmeme $f(x) = x$ a $g'(x) = \dfrac{2}{1+(2x-1)^2}$, dostaneme pro daný integrál

$$\int \operatorname{arctg}(2x-1) \, \mathrm{d}x = x \operatorname{arctg}(2x-1) - \int \frac{2x \, \mathrm{d}x}{1+(2x-1)^2}\,.$$

Protože nyní již není derivace jmenovatele $\big(1+(2x-1)^2\big)' = 4(2x-1)$ úměrná čitateli $2x$ není substituce $y = 1+(2x-1)^2$ výhodná. Proto poslední integrál rozdělíme stejně jako v předcházejících příkladech na dva integrály

$$\int \frac{2x \, \mathrm{d}x}{1+(2x-1)^2} = \int \frac{(2x-1) \, \mathrm{d}x}{1+(2x-1)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+(2x-1)^2}\,,$$

které umíme spočítat (první najdeme pomocí substituce $y = 1+(2x-1)^2$) a dostaneme

$$\int \frac{2x \, \mathrm{d}x}{1+(2x-1)^2} = \tfrac{1}{4}\ln\big(1+(2x-1)^2\big) + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x-1)\,.$$

Tedy původní integrál je

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arctg}(2x-1) \, \mathrm{d}x &= x \operatorname{arctg}(2x-1) - \tfrac{1}{4}\ln\big(1+(2x-1)^2\big) - \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x-1) = \\ &= \big(x - \tfrac{1}{2}\big) x \operatorname{arctg}(2x-1) - \ln\sqrt[4]{1+(2x-1)^2} + c\,.\end{aligned}$$

`Poznámka.` Mohli jsme ale postupovat jinak. Pokud si uvědomíme, že v integrálu, který vynikne pro integraci per partes, použijeme substituci

$$y = 1 + (2x-1)^2 \implies \mathrm{d}y = 4(2x-1)\,\mathrm{d}x\,,$$

můžeme místo funkce $f(x) = x$ vzít funkci $f(x) = \frac{1}{2}\,(2x-1)$, jejíž derivace je $f'(x) = 1$. S touto funcí dostaneme po integraci per partes

$$\int \operatorname{arctg}(2x-1)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\,(2x-1)\operatorname{arctg}(2x-1) - \int \frac{(2x-1)\,\mathrm{d}x}{1+(2x-1)^2}\,.$$

Druhý integrál lze pak už přímo najít pomocí substituce $y = 1 + (2x-1)^2$.

Příklad 12.r. Najděte intagrál $\displaystyle\int \arcsin(3x+2)\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Neprvve budeme integrovat per partes. Položíme $f'(x) = x$ a $g(x) = \arcsin(3x+2)$. Pak je $g'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{1-(3x+2)^2}}$. Když si již nyní uvědomíme, že při další integraci použijeme substituci $y = 1-(3x+2)^2$ a že $y'(x) = -6(3x+2)$, snadno nahledneme, že je rozumné zvolit funkci $f(x) = \frac{1}{3}\,(3x+2)$. Integrace per partes pak dává

$$\int \arcsin(3x+2)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\,(3x+2)\arcsin(3x+2) - \int \frac{(3x+2)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(3x+2)^2}}\,.$$

A pokud v posledním integrálu provedeme substituci $y = 1-(3x+2)^2$, snadno dostaneme

$$\int \arcsin(3x+2)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\,(3x+2)\arcsin(3x+2) + \tfrac{1}{3}\sqrt{1-(3x+2)^2} + c\,.$$

`Poznámka.` Při použití první věty o substituci se snažíme napsat daný integrál ve tvaru (1), kde umíme spočítat primitivní funkci k funkci $f(x)$. Proto je v integrálech tvaru $\displaystyle\int xf(x^2)\,\mathrm{d}x$, nebo obecněji $\displaystyle\int x^{n-1}f(x^n)\,\mathrm{d}x$, výhodné zavést proměnnou $y = x^2$, nebo obecněji $y = x^n$. Proto je například v interálu $\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{4+x^6}$ výhodná substituce $y = x^3$.

Podobná situace nastane pro integrály typu $\displaystyle\int f(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x$, resp. $\displaystyle\int f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x$, kde můžeme použít substituci $y = \cos x$, resp. $y = \sin x$.

Příklad 13.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos^3 x}}$.

Řešení. Protože $\sin x = -(\cos x)'$, je výhodné udělat substituci $y = \cos x$. Protože $\mathrm{d}y = -\sin x\,\mathrm{d}x$, dostaneme po ní

$$\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos^3 x}} = -\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^3}} = 2y^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{\cos x}}\,.$$

Příklad 14.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Pokud použijeme vztah $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, je hledaný integrál

$$\int \cos^5 x \,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \sin^2 x\right)^2 \cos x \,\mathrm{d}x\,.$$

Proto je výhodné použít substituci $y = \sin x$, tj. $\mathrm{d}y = \cos x \,\mathrm{d}x$. Po ní dostaneme

$$\int \cos^5 x \,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \sin^2 x\right)^2 \cos x \,\mathrm{d}x = \int (1 - y^2)^2 \,\mathrm{d}y =$$
$$= \int \left(1 - 2y^2 + y^4\right) \mathrm{d}y = y + \tfrac{2}{3}\, y^3 + \tfrac{1}{5}\, y^5 = \sin x - \tfrac{2}{3}\, \sin^3 x + \tfrac{1}{5}\, \sin^5 x\,.$$

Příklad 15.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$.

Řešení. Hledaný integrál lze zapsat ve tvaru

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\cos x \,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x \,\mathrm{d}x}{1 - \sin^2 x}\,.$$

Proto je výhodné udělat substituci $y = \sin x$, tj. $\mathrm{d}y = \cos x \,\mathrm{d}x$. Ta vede k integrálu

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}y}{1 - y^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + y}{1 - y} \right| = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}\,.$$

Druhá věta o substituci se používá, když se v integrované funkci chceme zbavit nějakého nepříjemného výrazu a nevidíme, že má integrál tvar (1).

Příklad 16.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x+1} + 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1} \,\mathrm{d}x$.

Řešení. V integrované funkci je nepříjemná třetí odmocnina. Proto se nabízí substituce $\sqrt[3]{x+1} = y$, neboli $x = y^3 - 1$. Pak je $\mathrm{d}x = 3y^2 \,\mathrm{d}y$ a po substituci dostaneme integrál

$$\int \frac{\sqrt[3]{x+1} + 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1} \,\mathrm{d}x = \int \frac{y+1}{y-1}\, 3y^2 \,\mathrm{d}y = 3 \int \frac{y^3 + y^2}{y - 1} \,\mathrm{d}y\,.$$

Protože

$$\frac{y^3 + y^2}{y - 1} = y^2 + 2y + 2 + \frac{2}{y - 1}\,,$$

je hledaný integrál

$$\int \frac{\sqrt[3]{x+1} + 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1} \,\mathrm{d}x = 3 \int \left(y^2 + 2y + 2 + \frac{2}{y - 1} \right) \mathrm{d}x = y^3 + 3y^2 + 6y + 6 \ln |y - 1| =$$
$$= x + 1 + 3\sqrt[3]{(x+1)^2} + 6\sqrt[3]{x+1} + 6 \ln \left| \sqrt[3]{x+1} - 1 \right|.$$

Příklad 17.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$.

Řešení. V integrované funkci je nepříjemná odmocnina v exponentu. Proto můžeme zkusit substituci $\sqrt{x} = y$, tj. $x = y^2$. Protože $\mathrm{d}x = 2y\,\mathrm{d}y$, dostaneme po substituci integrál

$$\int \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{-y}\,2y\,\mathrm{d}y = 2\int y\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y\,,$$

který můžeme najít například metodou integrace per partes. Ta nám dá

$$\int y\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = -y\mathrm{e}^{-y} + \int \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = -y\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-y} = -(y+1)\mathrm{e}^{-y}.$$

Proto je původní integrál

$$\int \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = -2(y+1)\mathrm{e}^{-y} = -2\big(\sqrt{x}+1\big)\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}.$$

`Poznámka.` Druhá věta o substituci se často používá k tomu, abychom z integrálu odstranili druhé odmocniny kvadratických výrazů. Například ve druhém příkladě jsou použili vztah $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, neboli $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$, abychom se zbavili výrazu $\sqrt{1-x^2}$. To jsme udělali tak, že jsme položili $x = \sin t$.
Podobně se výrazu $\sqrt{1+x^2}$ lze zbavit substitucí $x = \sinh^2 y$, protože je $1 + \sinh^2 y = \cosh^2 y$. Pro takové výrazy se také často používá substituce $x = \operatorname{tg} t$, protože

$$1 + \operatorname{tg}^2 t = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}\,.$$

Odmocniny $\sqrt{x^2-1}$ se lze zbavit substitucí $x = \cosh y$, protože $\cosh^2 y - 1 = \sinh^2 y$ nebo substitucí $x = \dfrac{1}{\cos t}$, protože

$$\frac{1}{\cos^2 t} - 1 = \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \operatorname{tg}^2 t\,.$$

Existují ještě další substituce, pomocí kterých se lze zbavit odmocnin kvadratických výrazů, které jsou souhrně nazývány Eulerovy substituce. Krátce uvedu jejich podstatu.
Odmocniny ve výrazech $\sqrt{1-x^2}$ se lze zbavit tak, že napíšeme

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1-x)(1+x)} = (1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

a položíme

$$\frac{1+x}{1-x} = y^2\,, \quad \text{tj.} \quad x = \frac{y^2-1}{y^2+1}\,.$$

Podobně když odmocninu $\sqrt{x^2-1}$ napíšeme jako

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x-1)(x+1)} = (x-1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,,$$

je zřejmé, že se odmocniny zbavíme substitucí

$$\frac{x+1}{x-1} = y^2\,, \quad \text{tj.} \quad x = \frac{y^2+1}{y^2-1}\,.$$

Odmocniny $\sqrt{x^2+1}$ se lze zbavit tak, že položíme $x = \frac{1}{2}\left(y - y^{-1}\right)$. Pak je totiž

$$x^2+1 = \left(\frac{y-y^{-1}}{2}\right)^2 + 1 = \frac{y^2-2+y^{-2}+4}{4} = \frac{y^2+2+y^{-2}}{4} = \left(\frac{y+y^{-1}}{2}\right)^2 .$$

Pokud ještě ze vztahu $x = \frac{1}{2}\left(y - y^{-1}\right)$ spočítáme y, dostaneme pro $y > 0$

$$x = \frac{y-y^{-1}}{2} \iff y^2 - 2xy - 1 = 0 \Leftrightarrow y = x + \sqrt{x^2+1}\,,$$

neboli

$$\sqrt{x^2+1} = y - x\,,$$

což je jedna z tzv. Eulerových substitucí. Všimněte si tako toho, že pokud položíme $y = \mathrm{e}^t$, používáme vlastně substituci

$$x = \frac{y-y^{-1}}{2} = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2} = \sinh t\,.$$

Podobně lze postupovat také v případě výrazu $\sqrt{x^2-1}$. Když položíme $x = \frac{1}{2}\left(y + y^{-1}\right)$, dostaneme

$$x^2-1 = \left(\frac{y+y^{-1}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{y^2-2+y^{-2}}{4} = \left(\frac{y-y^{-1}}{2}\right)^2 .$$

A pokud ze vztahu $x = \frac{1}{2}\left(y + y^{-1}\right)$ spočítáme y (při řešení kvadratické rovnice zvolím pře odmocninou diskriminantu znaménko +), dostaneme Eulerovu substituci

$$y = x + \sqrt{x^2-1}\,, \quad \text{neboli} \quad \sqrt{x^2-1} = y - x\,.$$

Pokud ještě zavedeme $y = \mathrm{e}^t$ je tato substituce vlastně substituce

$$x = \frac{y+y^{-1}}{2} = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} = \cosh t\,.$$

Jsou známy i další substituce, které zjednodušují integrované funkce. Uvedeme je ale až potom, kdy se seznámíme s postupem integrování tzv. racionálních funkcí.

Příklad 1. Najděte integrály

$$\textbf{a.}\ \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(3+x^2)^2}\,, \qquad \textbf{b.}\ \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{4+x^4}\,, \qquad \textbf{c.}\ \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(8x^3+27)^{2/3}}\,.$$

$$\left[\textbf{a.}\ \frac{-1}{2(3+x^2)} + c\,; \quad \textbf{b.}\ \tfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2} + c\,.; \quad \textbf{c.}\ \tfrac{1}{8}\left(8x^3+27\right)^{1/3} + c\,.\right]$$

Příklad 2. Najděte integrály

$$\textbf{a.}\ \int \frac{(x+2)\,\mathrm{d}x}{x^2+4x+13}\,, \qquad \textbf{b.}\ \int \frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4-3x-x^2}}\,, \qquad \textbf{c.}\ \int \frac{(x^2+x+1)\,\mathrm{d}x}{(2x^3+3x^2+6x-1)^3}\,.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \textbf{a.}\ \ln\sqrt{x^2+4x+3} + c\,; & \textbf{b.}\ -2\sqrt{4-3x-x^2} + c\,; \\ \textbf{c.}\ \dfrac{-1}{12(2x^3+3x^2+6x-1)^2} + c\,. & \end{array}\right]$$

Příklad 3. Najděte integrály

a. $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{x^2-2x+3}\,,$ **b.** $\displaystyle\int \frac{(x-2)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x-6}}\,,$ **c.** $\displaystyle\int \frac{(2-3x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,.$

[**a.** $\ln\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{2}\,\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+c\,;$
b. $\sqrt{x^2+x-6}-\frac{5}{2}\,\ln\bigl(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x-6}\bigr)+c\,;$
c. $3\sqrt{1+2x-x^2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\,\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+c\,.$]

Příklad 4. Najděte integrály

a. $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\tfrac{1}{2}x\,\mathrm{d}x\,,$ **b.** $\displaystyle\int \arcsin(1-2x)\,\mathrm{d}x\,,$ **c.** $\displaystyle\int \ln\bigl(x+\sqrt{x^2-1}\bigr)\,\mathrm{d}x\,.$

[**a.** $x\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\ln(x^2+4)+c\,;$
b. $\bigl(x-\frac{1}{2}\bigr)\arcsin(1-2x)-\sqrt{x-x^2}+c\,;$
c. $x\ln\bigl(x+\sqrt{x^2-1}\bigr)-\sqrt{x^2-1}+c\,.$]

Příklad 5. Najděte integrály

a. $\displaystyle\int (x^3-2x)\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\,,$ **b.** $\displaystyle\int \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^3}\,\mathrm{d}x\,,$ **c.** $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\,.$

[**a.** $\frac{1}{2}\,(x^2-3)\mathrm{e}^{x^2}+c\,;$ **b.** $-\frac{1}{x}\,\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}+c\,;$ **c.** $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+c\,.$]

Příklad 6. Najděte integrály

a. $\displaystyle\int \operatorname{tg}x\,\mathrm{d}x\,,$ **b.** $\displaystyle\int \sin^3x\cos^2x\,\mathrm{d}x\,,$ **c.** $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x\,\mathrm{d}x\,.$

[**a.** $-\ln|\cos x|+c\,;$ **b.** $\frac{1}{5}\,\cos^5x-\frac{1}{3}\,\cos^3x+c\,;$ **c.** $2(\sin x-1)\mathrm{e}^{\sin x}+c\,.$]

Příklad 7. Najděte integrály

a. $\displaystyle\int \frac{\arcsin x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\,,$ **b.** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x\,,$ **c.** $\displaystyle\int \bigl(\mathrm{e}^{3x}-3\mathrm{e}^x\bigr)\sin\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\,.$

[**a.** $\frac{1}{2}\,\arcsin^2x+c\,;$
b. $\ln x\cdot\operatorname{arctg}(\ln x)-\ln\sqrt{1+\ln^2x}+c\,;$
c. $\bigl(5-\mathrm{e}^{2x}\bigr)\cos\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x\sin\mathrm{e}^x+c\,.$]

Příklad 8. Pomocí vhodné substituce najděte integrály

a. $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,,$ **b.** $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x\,,$ **c.** $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$

[**a.** $\frac{1}{2}\,x\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\,\operatorname{argsinh}x+c\,;$
b. $\frac{1}{2}\,x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\,\operatorname{argcosh}x+c\,;$
c. $\frac{1}{2}\,x\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}+c\,.$]