Integrace racionálních funkcí

Racionální funkce se nazývá podíl polynomů, tj. funkce

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}\,, \tag{1}$$

kde a_n, $b_m \neq 0$.

1. Polynomy (mnohočleny)

Polynom proměnné x se nazývá každý výraz tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\,, \tag{2}$$

kde x je neurčitá proměnná (nějaký symbol) a $a_k \in \mathbb{C}$. Jestliže jsou všechna a_k reálná, nazýváme polynom (2) reálný polynom.

Je-li $a_n \neq 0$ nazývá se polynom (2) polynom stupně n a píšeme $\mathrm{st}\big(P(x)\big) = n$ (pro nulový polynom, tj. $P(x) = 0$, se defunuje jeho stupeň jako $-\infty$).

Polynom $P(x)$ stupně n, pro který je $a_n = 1$ se nazývá normovaný polynom.

Je-li v (1) stupeň polynomu $P(x)$, tj. n, větší nebo roven stupni polynomu $Q(x)$, tj. m, vydélíme nejprve polynom $P(x)$ polynamem $Q(x)$, tj. (1) napíšeme ve tvaru

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\,, \tag{3}$$

kde $S(x)$ a $R(x)$ jsou ploynomy a stupeň polynomu $R(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$.

1.1. Dělení polynomu polynomem

Věta. Nechť je $P(x)$ polymon stupně n a $Q(x)$ polynom stupně m. Pak existují polynomy $S(x)$ a $R(x)$, kde $\mathrm{st}\big(R(x)\big) < m$, takové, že

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x)\,. \tag{4}$$

Přitom jsou polymony $S(x)$ a $R(x)$ dány jednoznačné.

Polynom $R(x)$ ze vztahu (4) se nazývá zbytek. Jestliže je $R(x) = 0$, říkáme, že je polynom $P(x)$ dělitelný polynomem $Q(x)$.

Jestliže pro polynomy $P(x)$ a $Q(x)$ platí (4), je racionální lomená funkce

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\,.$$

Algoritmus dělení polynomu polynomem.

Příklad 1.1.1.r. Napište racionální funkci

$$f(x) = \frac{2x^4 - 3x^2 + x + 2}{3x^2 - x + 1}$$

ve tvaru (3).

Řešení. Píše se to pod sebe jako při dělení čísel.

$$
\begin{array}{l}
\Big(\boxed{2x^4} - 3x^2 + x + 2\Big) : \Big(\boxed{3x^2} - x + 1\Big) = \frac{2}{3}\,x^2 + \frac{2}{9}\,x - \frac{31}{27} \\
\underline{-(2x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2)} \\
\qquad \boxed{\frac{2}{3}x^3} - \frac{11}{3}x^2 + x + 2 \\
\quad \underline{-(\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{9}x^2 + \frac{2}{9}x)} \\
\qquad\qquad \boxed{-\frac{31}{9}x^2} + \frac{7}{9}x + 2 \\
\qquad \underline{-(-\frac{31}{9}x^2 + \frac{31}{27}x - \frac{31}{27})} \\
\qquad\qquad\qquad -\frac{10}{27}x + \frac{85}{27}
\end{array}
$$

Tento výpočet znamená, že platí

$$f(x) = \frac{2x^4 - 3x^2 + x + 2}{3x^2 - x + 1} = \frac{2}{3}\,x^2 + \frac{2}{9}\,x - \frac{31}{27} + \frac{-\frac{10}{27}x + \frac{85}{27}}{3x^2 - x + 1}\,.$$

Příklad 1.1.2.r. Najděte podíl $(x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 2) : (x^2 + 3x + 2)$.

Řešení:

$$
\begin{array}{l}
\Big(\boxed{x^5} + x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 2\Big) : \Big(\boxed{x^2} + 3x + 2\Big) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1 \\
\underline{-(x^5 + 3x^4 + 2x^3)} \\
\qquad \boxed{-2x^4} - 4x^3 + x^2 + x - 2 \\
\quad \underline{-(-2x^4 - 6x^3 - 2x^2)} \\
\qquad\qquad \boxed{2x^3} + 5x^2 + x - 2 \\
\qquad \underline{-(2x^3 + 6x^2 + 4x)} \\
\qquad\qquad\qquad \boxed{-x^2} - 3x - 2 \\
\qquad\qquad \underline{-(-x^2 - 3x - 2)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Tedy polynom $P(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 2$ je dělitelný polynomem $Q(x) = x^2 + 3x + 2$ a

$$\frac{x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2} = x^3 - 2x^2 + 2x - 1\,,$$

neboli

$$x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 2 = (x^2 + 3x + 2)(x^3 - 2x^2 + 2x - 1)\,.$$

Příklad 1.1.1. Vydělte polynom $P(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ polynomem $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$. $\left[x^3 - 5x^2 + 10x - 10 + \dfrac{2x^2 + 8x + 11}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}\,.\right]$

Příklad 1.1.2. Vydělte polynom $P(x) = x^6 + 2x^5 - 3x^4 + x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ polynomem $Q(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$. $\left[x^3 - x^2 - x + 4 - \dfrac{7x^2 + 5x + 3}{x^3 + 3x^2 + x + 1}\,.\right]$

Příklad 1.1.3. Vydělte polynom $P(x) = 3x^6 + 2x^5 + x^4 - x^3 + x^2 + 2$ polynomem $Q(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 1$. $\left[3x^3 - 7x^2 + 28x - 96 + \dfrac{338x^2 - 164x - 94}{x^3 + 3x^2 - 2x - 1}.\right]$

Příklad 1.1.4. Vydělte polynom $P(x) = 7x^6 - 3x^5 + 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ polynomem $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$. $\left[7x^3 - 17x^2 + 55x - 166 + \dfrac{517x^2 - 555x + 168}{x^3 + 2x^2 - 3x + 1}.\right]$

Příklad 1.1.5. Vydělte polynom $P(x) = 4x^6 - 3x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 3$ polynomem $Q(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$. $\left[2x^3 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{9}{4}\,x - \frac{7}{8} + \dfrac{\frac{41}{8}\,x^2 - 6x + \frac{31}{8}}{2x^3 - x^2 - 2x + 1}.\right]$

Příklad 1.1.6. Vyjádřete racionální lomenou funkci

$$f(x) = \frac{x^6 + x^5 - 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x - 1}{x^3 - 3x^2 - 2x + 1}$$

ve tvaru $f(x) = S(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$, kde $S(x)$, $R(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy a stupeň polynomu $R(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$. $\left[f(x) = x^3 + 4x^2 + 12x + 46 + \dfrac{157x^2 + 83x - 47}{x^3 - 3x^2 - 2x + 1}.\right]$

Příklad 1.1.7. Vyjádřete racionální lomenou funkci

$$f(x) = \frac{2x^6 - 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}$$

ve tvaru $f(x) = S(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$, kde $S(x)$, $R(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy a stupeň polynomu $R(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$. $\left[f(x) = 2x^3 + x^2 + 8x + 21 + \dfrac{62x^2 + 65x + 66}{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}.\right]$

Příklad 1.1.8. Vyjádřete racionální lomenou funkci

$$f(x) = \frac{4x^6 - 2x^5 + 3x^3 + 2x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 - 2x - 1}$$

ve tvaru $f(x) = S(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$, kde $S(x)$, $R(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy a stupeň polynomu $R(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$. $\left[f(x) = 4x^3 - 10x^2 + 28x - 69 + \dfrac{186x^2 - 110x - 73}{x^3 + 2x^2 - 2x - 1}.\right]$

Příklad 1.1.9. Vyjádřete racionální lomenou funkci

$$f(x) = \frac{x^6 + 2x^5 - 3x^4 + x^3 + 2x - 3}{2x^3 + x + 1}$$

ve tvaru $f(x) = S(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$, kde $S(x)$, $R(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy a stupeň polynomu $R(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$. $\left[f(x) = \frac{1}{2}\,x^3 + x^2 - \frac{7}{4}\,x - \frac{1}{4} + \dfrac{\frac{3}{4}\,x^2 + 4x - \frac{11}{4}}{2x^3 + x + 1}.\right]$

Příklad 1.1.10. Vyjádřete racionální lomenou funkci

$$f(x) = \frac{4x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 5x^3 + x^2 - 2x + 5}{2x^3 - x^2 + 2x - 1}$$

ve tvaru $f(x) = S(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$, kde $S(x)$, $R(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy a stupeň polynomu $R(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$. $\left[f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}\,x - \frac{7}{4} + \dfrac{\frac{1}{4}\,x^2 + x + \frac{13}{4}}{2x^3 - x^2 + 2x - 1}.\right]$

Komplexní číslo $x_0 \in \mathbb{C}$, pro které platí $P(x_0) = 0$, se nazývá kořen polynomu $P(x)$.

Nechť je $P(x)$ polynom stupně n. Pak je x_0 je jeho kořen právě tehdy, když je $P(x)$ dělitený polynomem $x - x_0$. Jinými slovy x_0 je kořen polynomu $P(x)$ stupně n právě tehdy, když existuje polynom $Q(x)$ stupně $(n-1)$ takový, že

$$P(x) = (x - x_0)Q(x)\,.$$

Pro polynomy platí tzv. základní věta algebry

<u>Základní věta algebry.</u> Každý polynom $P(x)$ stupně většího než nula má aspoň jeden komplexní kořen.

Nechť je $P(x)$ polynom stupně n a x_1, x_2, …, x_r všechny jeho navzájem různé kořeny. Pak existují přirozená čísla k_1, k_2, …, k_r taková, že platí

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_r)^{k_r}. \tag{5}$$

Přirozená čísla k_s v rozkladu (5) se nazývají násobnost kořene x_s plynomu $P(x)$ a platí pro ně

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r = n\,.$$

Vyjádření polynomu ve tvaru (5) se nazývá rozklad polynomu na součin kořenových činitelů.

Jestliže je $P(x)$ reálný polynom a x_0 jeho kořen násobnosti k, je také jeho komplexně sdružené číslo $\overline{x}_0$ kořen polynomu $P(x)$ násobnosti k.
To znamená, že když je $x_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$, kde $\beta \neq 0$, kořen polynomu $P(x)$ násobnosti k, je i $x_2 = \overline{x}_1 = \alpha - \mathrm{i}\beta \neq x_1$ kořen násobnosti k. Z toho plyne, že existuje polynom $Q(x)$ takový, že

$$P(x) = \bigl(x - \alpha - \mathrm{i}\beta\bigr)^k \bigl(x - \alpha + \mathrm{i}\beta\bigr)^k Q(x) = \bigl(x^2 + px + q\bigr)^k Q(x)\,,$$

kde kvadratický polynom

$$x^2 + px + q = (x - \alpha - \mathrm{i}\beta)((x - \alpha + \mathrm{i}\beta) = (x - \alpha)^2 + \beta^2$$

má komlexní kořeny $x_\pm = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$.

Z těchto úvah lze ukázat, že každý reálný polynom $P(x)$ stupně $n > 0$ lze napsat ve tvaru

$$P(x) = a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \dots (x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\ell_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\ell_2} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{\ell_s}\,,$$

kde x_1, …, x_r jsou všechny navzájem různé reálné kořeny polynomu $P(x)$, $x^2 + p_1x + q_1$, …, $x^2 + p_sx + q_s$ jsou navzájem různé reálné polynomy, které nemají reálné kořeny, tj. $p_1^2 - 4q_1 < 0$, …, $p_s^2 - 2q_s < 0$ a

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2\ell_1 + 2\ell_2 + \dots + 2\ell_s = n\,.$$

Příklad 1.2.1.r. Najděte všechny kořeny polynomu $P(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 11x^2 + 7x - 2$, když víte, že je tento polynom dělitelný polynomem $x^2 - 3x + 2$ a $x = 1$ je jeho kořen násobnosti nejméně 2, a napište ho jako součin jeho kořenových činitelů v komplexním i reálném tvaru.

Řešení: Když vydělíme polynom $P(x)$ polynomem $Q(x) = x^2 - 3x + 2$, dostaneme

$$
\begin{array}{l}
\left(\boxed{x^5} - 5x^4 + 10x^3 - 11x^2 + 7x - 2\right) : \left(\boxed{x^2} - 3x + 2\right) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1 \\
\underline{-(x^5 - 3x^4 + 2x^3)} \\
\qquad \boxed{-2x^4} + 8x^3 - 11x^2 + 7x - 2 \\
\quad \underline{-(-2x^4 + 6x^3 - 4x^2)} \\
\qquad\qquad\quad \boxed{2x^3} - 7x^2 + 7x - 2 \\
\qquad\qquad \underline{-(2x^3 - 6x^2 + 4x)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad \boxed{-x^2} + 3x - 2 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-(-x^2 + 3x - 2)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Z toho plyne, že

$$x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 11x^2 + 7x - 2 = (x^2 - 3x + 2)(x^3 - 2x^2 + 2x - 1)\,.$$

Kvadratická rovnice $x^2-3x+2 = 0$ má kořeny $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$. Proto je $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$ a

$$x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 11x^2 + 7x - 2 = (x - 1)(x - 2)(x^3 - 2x^2 + 2x - 1)\,.$$

Protože $x = 1$ je kořen polynomu $P(x)$ násobnosti 2, musí být kořen polynomu x^3-2x^2+2x-1. Dělením dostaneme

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = (x - 1)(x^2 - x + 1)\,.$$

Tedy

$$x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 11x^2 + 7x - 2 = (x - 1)^2(x - 2)(x^2 - x + 1)\,, \tag{6}$$

a protože polynom $x^2 - x + 1$ nemá reálné kořeny, je (6) rozklad polynomu $P(x)$ na reálné kořenové činitele.
V oboru komplexních čísel má rovnice $x^2-x+1 = 0$ komplexně sdružené kořeny $x_\pm = \frac{1}{2}\left(1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$. Tedy rozklad polynomu $P(x)$ na kořenové činitele v komplexním oboru je

$$x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 11x^2 + 7x - 2 = (x - 1)^2(x - 2)\left(x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right)\left(x - \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right).$$

Příklad 1.2.2.r. Rozložte na reálné kořenové činitele polynom

$$P(x) = x^6 + x^5 - 2x^4 + 4x^3 + 11x^2 - 45x - 50\,,$$

když znáte jeho dva komplexní kořeny $x_1 = 1 - 2\mathrm{i}$ a $x_2 = -2 + \mathrm{i}$.
Řešení: Protože je polynom $P(x)$ reálný, má také kořeny $\overline{x}_1 = 1 + 2\mathrm{i}$ a $\overline{x}_2 = -2 - \mathrm{i}$. Proto musí být dělitelný polynomem

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= (x - 1 + 2\mathrm{i})(x - 1 - 2\mathrm{i})(x + 2 + \mathrm{i})(x + 2 - \mathrm{i}) = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + 4x + 5) = \\
&= x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25\,.
\end{aligned}
$$

Když vydělíme polynom $P(x)$ polynomem $Q(x)$ dostaneme

$$\begin{array}{l}
\Big(\boxed{x^6} + x^5 - 2x^4 + 4x^3 + 11x^2 - 45x - 50\Big) : \Big(\boxed{x^4} + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25\Big) = x^2 - x - 2 \\
\underline{-(x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 10x^3 + 25x^2)} \\
\qquad \boxed{-x^5} - 4x^4 - 6x^3 - 13x^2 - 45x - 50 \\
\quad \underline{-(-x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 10x^2 - 25x)} \\
\qquad\qquad \boxed{-2x^4} - 4x^3 - 4x^2 - 20x - 50 \\
\qquad\quad \underline{-(-2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 20x - 50)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

A protože kořeny kvadratického polynomu $x^2 - x - 2$ jsou $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$, je hledaný rozklad

$$x^6 + x^5 - 2x^4 + 4x^3 + 11x^2 - 45x - 50 = (x+1)(x-2)(x^2 - 2x + 5)(x^2 + 4x + 5)\,.$$

Příklad 1.2.1. Rozložte polynom $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$ na součin reálných kořenových činitelů, když víte, že jeho dva kořeny jsou $x_1 = 1$ a $x_2 = -1$.

$\Big[P(x) = (x-1)(x+1)^2(x-2)\,.\Big]$

Příklad 1.2.2. Rozložte polynom $P(x) = x^4 + 7x^2 - 18x + 10$ na součin reálných kořenových činitelů, když víte, že jeho kořen $x_1 = 1$ má násobnost 2. $\Big[P(x) = (x-1)^2(x^2 + 2x + 10)\,.\Big]$

Příklad 1.2.3. Rozložte polynom $P(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 32x + 40$ na součin reálných kořenových činitelů, když víte, že jeho kořen $x_1 = 2$ má násobnost 2. $\Big[P(x) = (x-2)^2(x^2 + 2x + 10)\,.\Big]$

Příklad 1.2.4. Rozložte polynom $P(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5$ na součin reálných kořenových činitelů, když víte, že jeden jeho kořen je $x_1 = 2 + \mathrm{i}$. $\Big[P(x) = (x-1)(x+1)(x^2 - 4x + 5)\,.\Big]$

Příklad 1.2.5. Rozložte polynom $P(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 11x + 10$ na součin reálných kořenových činitelů, když víte, že jeho dva kořeny jsou $x_1 = 1$ a $x_2 = -1 + 2\mathrm{i}$.

$\Big[P(x) = (x-1)^2(x+2)(x^2 + 2x + 5)\,.\Big]$

Příklad 1.2.6. Rozložte polynom $P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 24x + 20$ na součin reálných kořenových činitelů, když víte, že jeho dva kořeny jsou $x_1 = -2$ a $x_2 = 2 - \mathrm{i}$.

$\Big[P(x) = (x+1)(x+2)^2(x^2 - 4x + 5)\,.\Big]$

Příklad 1.2.7. Rozložte polynom $P(x) = x^6 - 9x^5 + 32x^4 - 50x^3 + 13x^2 + 55x - 50$ na součin reálných kořenových činitelů, když víte, že jeho kořen $x_1 = 2 - \mathrm{i}$ má násobnost 2.

$\Big[P(x) = (x+1)(x-2)(x^2 - 4x + 5)^2.\Big]$

---

2. Rozklad na parciální zlomky

Nechť je v racionální funkci (1) stupeň polynomu $P(x)$ menší než stupeň polynomu $Q(x)$, který je normovaný a jeho rozklad na reálné kořenové činitele je

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_r)^{k_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{\ell_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{\ell_2} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{\ell_s}\,.$$

Pak existují reálná čísla $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ a $C_{i,j}$ taková, že

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{i,j}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{\ell_i}\frac{B_{i,j}x + C_{i,j}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}\,, \tag{7}$$

neboli

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_{1,1}}{x-x_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1,k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \\
& + \frac{A_{2,1}}{x-x_2} + \frac{A_{2,2}}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2,k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \\
& + \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad + \\
& + \frac{A_{r,1}}{x-x_r} + \frac{A_{r,2}}{(x-x_r)^2} + \ldots + \frac{A_{r,k_r}}{(x-x_r)^{k_r}} + \\
& + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots + \frac{B_{1,\ell_1}x + C_{1,\ell_2}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\ell_1}} + \\
& + \frac{B_{2,1}x + C_{2,1}}{x^2+p_2x+q_2} + \frac{B_{2,2}x + C_{2,2}}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + \ldots + \frac{B_{2,\ell_2}x + C_{2,\ell_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{\ell_2}} + \\
& + \qquad\qquad\qquad \cdots \qquad\qquad\qquad + \\
& + \frac{B_{s,1}x + C_{s,1}}{x^2+p_sx+q_s} + \frac{B_{s,2}x + C_{s,2}}{(x^2+p_sx+q_s)^2} + \ldots + \frac{B_{s,\ell_s}x + C_{s,\ell_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\ell_s}}\,.
\end{aligned}$$

Příklad 2.1.r. Rozložte zlomek $\dfrac{3x+4}{(x-1)(x+2)}$ na parciální zlomky.

Řešení. Uvedený zlomek napíšeme ve tvaru (7), tj.

$$\frac{3x+4}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}\,,$$

kde A a B jsou čísla. Když tuto rovnost vynásobíme nejmenším společným dělitelem $(x-1)(x+2)$, dostaneme rovnost

$$3x + 4 = A(x+2) + B(x-1) = (A+B)x + 2A - B\,. \tag{8}$$

Tyto polynomy se rovnají právě tehdy, když se rovnaji koeficienty u všech mocnim x, tj. když platí

$$A + B = 3\,, \quad 2A - B = 4\,, \quad \text{tj.} \quad A = \tfrac{7}{3}\,, \quad B = \tfrac{2}{3}\,.$$

Tedy platí

$$\frac{3x+4}{(x-1)(x+2)} = \frac{\frac{7}{3}}{x-1} + \frac{\frac{2}{3}}{x+2}\,.$$

Když rovnost (8) považeme za rovnost mezi dvěmi funkcemi, můžeme postupovat také tak, že srovnáme hodnotu těchto funkcí ve vhodných bodech. Například v bodech $x = 1$, resp. $x = -2$, dostaneme

$$7 = 3A\,, \quad \text{resp.} \quad -2 = -3B\,, \quad \text{tj.} \quad A = \tfrac{3}{7}\,, \quad B = \tfrac{2}{3}\,.$$

Příklad 2.2.r. Rozložte výraz $\dfrac{5x-1}{x^2+x-6}$ na parciální zlomky.

ŘEŠENÍ. Protože $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$, existují podle (7) čísla A a B taková, že

$$\frac{5x-1}{x^2+x-6} = \frac{5x-1}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}\,.$$

Jestliže tuto rovnost vynásobíme výrazem $x^2 + x - 6$, dostaneme rovnost

$$5x - 1 = A(x+3) + B(x-2) = (A+B)x + 3A - 2B\,.$$

Z této rovnosti dostaneme v bodech $x = 2$, resp. $x = -3$,

$$9 = 5A\,, \quad -16 = -5B\,, \quad \text{tj.} \quad A = \tfrac{9}{5}\,, \quad B = \tfrac{16}{5}\,,$$

a tedy

$$\frac{5x-1}{x^2+x-6} = \frac{9}{5(x-2)} + \frac{16}{5(x+3)}\,.$$

Příklad 2.3.r. Rozložte výraz $\dfrac{x+5}{6x^2+17x+12}$ na parciální zlomky.

ŘEŠENÍ. Protože kvadratická rovnice $6x^2 + 17x + 12 = 0$ má kořeny $x_1 = -\frac{3}{2}$ a $x_2 = -\frac{4}{3}$, je

$$6x^2 + 17x + 12 = 6\big(x + \tfrac{3}{2}\big)\big(x + \tfrac{4}{3}\big) = (2x+3)(3x+4)\,.$$

Proto budou existovat čísla A a B taková, že

$$\frac{x+5}{6x^2+17x+12} = \frac{x+5}{(2x+3)(3x+4)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{3x+4}\,.$$

Pokud tento výraz vynásobíme $6x^2 + 17x + 12$, dostaneme rovnost

$$x + 5 = A(3x+4) + B(2x+3) = (3A+2B)x + 4A + 3B\,.$$

Tedy A a B musí být řešení soustavy rovnic

$$3A + 2B = 1\,, \quad 4A + 3B = 5\,, \quad \text{tj.} \quad A = -7\,, \quad B = 11\,,$$

a platí

$$\frac{x+5}{6x^2+17x+12} = -\frac{7}{2x+3} + \frac{11}{3x+4}\,.$$

Příklad 2.4.r. Rozložte výraz $\dfrac{x+2}{(x+1)(x-2)(x+3)}$ na parciální zlomky.

ŘEŠENÍ. Podle (7) existují čísla A, B a C taková, že

$$\frac{x+2}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}\,.$$

Po vynásobení této rovnosti výrazem $(x+1)(x-2)(x+3)$, dostaneme vztah

$$x + 2 = A(x-2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x-2)\,,$$

který musí platit pro každé x. Speciálně pro $x=-1$, $x=2$ a $x=-3$ musí být

$$1=-6A\,,\quad 4=15B\,,\quad -1=10C\,,\quad \text{neboli}\quad A=-\tfrac{1}{6}\,,\quad B=\tfrac{4}{15}\,,\quad C=-\tfrac{1}{10}\,.$$

Tedy

$$\frac{x+2}{(x+1)(x-2)(x+3)}=-\frac{1}{6(x+1)}+\frac{4}{15(x-2)}-\frac{1}{10(x+3)}\,.$$

Příklad 2.5.r. Rozložte výraz $\dfrac{x^2+3x+5}{(x+1)(x-2)^2}$ na parciální zlomky.

Řešení. Podle (7) existují čísla A, B a C taková, že

$$\frac{x^2+3x+5}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}\,.$$

Pokud tuto rovnost vynásobíme výrazem $(x+1)(x-2)^2$, dostaneme rovnost

$$\begin{aligned} x^2+3x+5 &= A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1)= \\ &= (A+B)x^2+(-4A-B+C)x+4A-2B+C\,, \end{aligned} \tag{9}$$

ze které plyne soustava rovnic

$$A+B=1\,,\qquad -4A-B+C=3\,,\qquad 4A-2B+C=5\,.$$

Pokud do vztahu (9) dosadíme $x=-1$ a $x=2$, dostaneme

$$3=9A\,,\quad 15=3C\,,\quad \text{tj.}\quad A=\tfrac{1}{3}\,,\quad C=5\,.$$

Z první rovnice soustavy, tj. $A+B=1$, pak plyne, že $B=\frac{2}{3}$. Hledaný rozklad tedy je

$$\frac{x^2+3x+5}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{2}{3(x-2)}+\frac{5}{(x-2)^2}\,.$$

Příklad 2.6.r. Rozložte výraz $\dfrac{3x^2-1}{(x-1)(x^2+2x-3)}$ na parciální zlomky.

Řešení. Protože $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$, existují podle (7) čísla A, B a C taková, že

$$\frac{3x^2-1}{(x-1)(x^2+2x-3)}=\frac{3x^2-1}{(x-1)^2(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+3}\,.$$

Když tento vztah vynásobíme výrazem $(x-1)^2(x+3)$, dostaneme

$$3x^2-1=A(x-1)(x+3)+B(x+3)+C(x-1)^2=(A+C)x^2+(2A+B-2C)x-3A+3B+C\,. \tag{10}$$

Z tohoto vztahu dostaneme pro $x=1$ a $x=-3$

$$2=4B\,,\qquad 26=16C\,,\quad \text{neboli}\quad B=\tfrac{1}{2}\,,\quad C=\tfrac{13}{8}\,.$$

Abychom získali A, srovnáme v (10) koeficient u x^2. To nám dává

$$3=A+C\,,\quad \text{tj.}\quad A=3-C=\tfrac{11}{8}\,.$$

Tedy

$$\frac{3x^2-1}{(x-1)(x^2+2x-3)}=\frac{11}{8(x-1)}+\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{13}{8(x+3)}\,.$$

Příklad 2.7.r. Rozložte výraz $\dfrac{3x^4+4x^3-2x+5}{(x-1)^2(x+2)(x-3)^3}$ na parciální zlomky.

Řešení. Podle (7) existují čísla A, B, C, D, E a F taková, že

$$\frac{3x^4+4x^3-2x+5}{(x-1)^2(x+2)(x-3)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{x-3}+\frac{E}{(x-3)^2}+\frac{F}{(x-3)^3}\,.$$

Když tuto rovnost vynásobíme výrazem $(x-1)^2(x+2)(x-3)^3$, dostaneme

$$\begin{aligned}3x^4+4x^3-2x+5&=A(x-1)(x+2)(x-3)^3+B(x+2)(x-3)^3+C(x-1)^2(x-3)^3+\\&+D(x-1)^2(x+2)(x-3)^2+E(x-1)^2(x+2)(x-3)+F(x-1)^2(x+2)\,.\end{aligned}\tag{11}$$

Abychom získali neznámá čísle $A,\ldots,F$, mohli bychom (11) roznásobit a srovnat koeficienty u stejných mocnin x. Tak bychom získali soustavu šesti rovnic pro 6 nezámých.
Jiná možnost je dosadit do (11) vhodné hodnoty x. Pro $x=1$, $x=-2$ a $x=3$ dostaneme

$$10=12B\,,\quad 25=-9\cdot125\,C\,,\quad 350=20F\,,\quad \text{tj.}\quad B=\tfrac{5}{6}\,,\quad C=-\tfrac{1}{45}\,,\quad F=\tfrac{35}{2}\,.$$

Jestliže zderivujeme rovnost (11), dostaneme

$$\begin{aligned}12x^3+12x^2-2=&\,A\big((x+2)(x-3)^3+(x-1)(x-3)^3+3(x-1)(x+2)(x-3)^2\big)+\\&+B\big((x-3)^3+3(x+2)(x-3)^2\big)+\\&+C\big(2(x-1)(x-3)^3+3(x-1)^2(x-3)^2\big)+\\&+D\big(2(x-1)(x+2)(x-3)^2+(x-1)^2(x-3)^2+2(x-1)(x+2)(x-3)\big)+\\&+E\big(2(x-1)(x+2)(x-3)+(x-1)^2(x-3)+(x-1)^2(x+2)\big)+\\&+F\big(2(x-1)(x+2)+(x-1)^2\big)\,.\end{aligned}$$

Když do této rovnosti dosadíme $x=1$ a $x=3$, získáme vztahy

$$22=-24A+28B\,,\qquad 430=20E+24F\,.$$

A protože známe B a F, dostaneme $A=\frac{1}{18}$ a $E=\frac{1}{2}$.
Poslední neznámý koeficient D bychom mohli získat například z druhé derivace (11) v bodě $x=3$. Jednodušší ale je najít pro D jednu rovnici srovnáním koeficientů u jedné mocniny x v (11). Nejjednodušší je najít koeficient u nejvyšší mocniny x. V našem případě je to koeficient u x^5. To vede ke vztahu

$$0=A+C+D\,,\quad\text{neboli}\quad D=-\tfrac{1}{30}\,.$$

Hledaný rozklad na parciální zlomky tedy je

$$\begin{aligned}\frac{3x^4+4x^3-2x+5}{(x-1)^2(x+2)(x-3)^3}=&\frac{1}{18(x-1)}+\frac{5}{6(x-1)^2}-\frac{1}{45(x+2)}-\\&-\frac{1}{30(x-3)}+\frac{2}{2(x-3)^2}+\frac{35}{2(x-3)^3}\,.\end{aligned}$$

Příklad 2.8.r. Rozložte výraz $\dfrac{2x+3}{(x+2)(x^2+3x+3)}$ na parciální zlomky.

Řešení. Protože rovnice $x^2+3x+3=0$ nemá reálné kořeny ($D=3^2-4\cdot 3=-3<0$), existují podle (7) čísla A, B a C taková, že

$$\frac{2x+3}{(x+2)(x^2+3x+3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+3x+3}\,.$$

Když tuto rovnost vynásobíme vztahem $(x+2)(x^2+3x+3)$ dostaneme rovnost

$$2x+3=A(x^2+3x+3)+Bx(x+2)+C(x+2)=(A+B)x^2+(3A+2B+C)x+3A+2C\,, \tag{12}$$

ze které plyne pro A, B a C soustava rovnic

$$A+B=0\,,\qquad 3A+2B+C=2\,,\qquad 3A+2C=3\,. \tag{13}$$

Jestliže do (12) dosadíme $x=-2$, dostaneme $A=-1$. Z první a třetí rovnice v (13) pak plyne $B=1$ a $C=3$. Proto je

$$\frac{2x+3}{(x+2)(x^2+3x+3)}=-\frac{1}{x+2}+\frac{x+3}{x^2+3x+3}\,.$$

Příklad 2.1. Rozložte na parciální zlomky následující výrazy

a. $\dfrac{2x+3}{(x+1)(2x-5)}$, **b.** $\dfrac{4x-3}{6x^2+x-2}$, **c.** $\dfrac{1-4x}{6x^2+7x-3}$, **d.** $\dfrac{2}{20+3x-2x^2}$.

[**a.** $\dfrac{\frac{16}{7}}{2x-5}-\dfrac{\frac{1}{7}}{x+1}$; **b.** $\dfrac{\frac{17}{7}}{3x+2}-\dfrac{\frac{2}{7}}{2x-1}$; **c.** $-\dfrac{\frac{1}{11}}{3x-1}-\dfrac{\frac{14}{11}}{2x+3}$; **d.** $\dfrac{\frac{2}{13}}{2x+5}-\dfrac{\frac{1}{13}}{x-4}$.]

Příklad 2.2. Rozložte na parciální zlomky následující výrazy

a. $\dfrac{x^2+4x+4}{(x+1)(2x-1)(x+3)}$, **b.** $\dfrac{x+1}{x^3-2x^2+x}$, **c.** $\dfrac{x^2-6}{(2x^2-3x-2)(2x+1)}$, **d.** $\dfrac{4}{(2x+3)(3-x-2x^2)}$.

[**a.** $\dfrac{\frac{1}{14}}{x+3}-\dfrac{\frac{1}{6}}{x+1}+\dfrac{\frac{25}{21}}{2x-1}$; **b.** $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}$; **c.** $-\dfrac{\frac{2}{5}}{x-2}+\dfrac{\frac{33}{50}}{2x+1}+\dfrac{\frac{23}{10}}{(2x+1)^2}$; **d.** $-\dfrac{\frac{4}{25}}{x-1}+\dfrac{\frac{8}{25}}{2x+3}+\dfrac{\frac{8}{5}}{(2x+3)^2}$.]

Příklad 2.3. Rozložte na parciální zlomky výrazy

a. $\dfrac{x^3-2x+4}{(x-3)(x-2)^3}$, **b.** $\dfrac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2(x+2)^2}$.

$$\left[\begin{array}{l}\mathbf{a}.\ \dfrac{25}{x-3}-\dfrac{24}{x-2}-\dfrac{18}{(x-2)^2}-\dfrac{8}{(x-2)^3}\,;\\[2ex] \mathbf{b}.\ \dfrac{\frac{1}{2}}{x+1}-\dfrac{\frac{19}{54}}{x-1}+\dfrac{\frac{4}{9}}{(x-1)^2}-\dfrac{\frac{4}{27}}{x+2}+\dfrac{\frac{1}{9}}{(x+2)^2}\,.\end{array}\right]$$

Příklad 2.4. Rozložte na parciální zlomky výraz $\dfrac{3x^2-4x+5}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$.

$$\left[-\frac{\frac{6}{25}}{x-1}+\frac{\frac{4}{5}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{6}{25}\,x+\frac{73}{25}}{x^2+2x+2}\,.\right]$$

---

3. Integrace parciálních zlomků

Při intergaci jednotlivých zlomků se používají integrály

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x-a}=\ln|x-a|\,,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n}=-\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{(x-a)^{n-1}}\,,\qquad n\neq 1\,,$$

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}=\tfrac{1}{2}\ln(x^2+1)=\ln\sqrt{x^2+1}\,,\qquad \big(\text{substituce }\ y=x^2+1\big)\,,$$

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}=-\frac{1}{2(n-1)}\,\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,,\qquad n\neq 1\,,\qquad \big(\text{substituce }\ y=x^2+1\big)\,,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=\operatorname{arctg}x\,,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}=\frac{1}{2(n-1)}\,\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n-1}}\,,\qquad n=2,\,3,\,\dots\,.$$

Příklad 3.1.r. Najděte integrál $\displaystyle\int\frac{2x+3}{(x-1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Integrovaný výraz rozložíme na parciální zlomky, tj. napíšeme jej ve tvaru

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}\,,$$

kde A a B jsou reálná čísla. Po vynásonení výrazem $(x-1)(x+2)$ dostaneme

$$2x+3=A(x+2)+B(x-1)\,.$$

Když zvolíme $x=1$, resp. $x=-2$, zjistíme, že $A=\frac{5}{3}$ a $B=\frac{1}{3}$. Tedy

$$\int\frac{2x+3}{(x-1)(x+2)}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{5}{3(x-1)}+\frac{1}{3(x+2)}\right)\mathrm{d}x=\tfrac{5}{3}\ln|x-1|+\tfrac{1}{3}\ln|x+2|\,.$$

Příklad 3.2.r. Najděte integrál $\displaystyle\int\frac{x+2}{(2x+1)(3x+2)}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Integrovaný výraz rozložíme na parciální zlomky, tj. napíšeme jej ve tvaru

$$\frac{x+2}{(2x+1)(3x+2)}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{3x+2}\,,$$

kde A a B jsou reálná čísla. Po vynásobení výrazem $(2x+1)(3x+2)$ zjistíme, že pro všechna reálná čísla musí platit

$$x+2 = A(3x+2) + B(2x+1)\,, \quad \text{tj.} \quad 3A+2B=1\,, \quad 2A+B=2\,.$$

Protože tato soustava má řešení $A=3$ a $B=-4$, je

$$\int \frac{x+2}{(2x+1)(3x+2)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{3}{2x+1} - \frac{4}{3x+2}\right)\mathrm{d}x = \tfrac{3}{2}\,\ln|2x+1| - \tfrac{4}{3}\,\ln|3x+2|\,.$$

Příklad 3.3.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{x+4}{2x^2-x-3}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Protože $2x^2-x-3=(x+1)(2x-3)$, zapíšeme integrovaný výraz ve tvaru

$$\frac{x+4}{2x^2-x-3} = \frac{x+4}{(x+1)(2x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-3}\,,$$

kde A a B jsou reálná čísla. Po vynásobení výrazem $2x^2-x-3$ dostaneme

$$x+4 = A(2x-3) + B(x+1)\,, \quad \text{tj.} \quad 2A+B=1\,, \quad -3A+B=4\,.$$

Tedy $A=-\frac{3}{5}$ a $B=\frac{11}{5}$. Tedy hledaný integrál je

$$\int \frac{x+4}{2x^2-x-3}\,\mathrm{d}x = \int \left(-\frac{3}{5(x+1)} + \frac{11}{5(2x-3)}\right)\mathrm{d}x = -\tfrac{3}{5}\,\ln|x+1| + \tfrac{11}{10}\,\ln|2x-3|\,.$$

Příklad 3.4.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{x^3-4x+4}{(x-2)(x+3)}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Protože stupeň čitatele integrovaného výrazu je větší než stupeň jeho jmenovatele, výraz nejprve vydělíme. Tak dostaneme

$$\frac{x^3-4x+4}{(x-2)(x+3)} = x-1+\frac{3x-2}{(x-2)(x+3)}\,.$$

Poslední výraz již můžeme rozložit na parciální zlomky, tj. napsat jej ve tvaru

$$\frac{3x-2}{(x-2)(x+3)} = \frac{4}{5(x-2)} + \frac{11}{5(x+3)}\,.$$

Tedy hledaný integrál je například

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-4x+4}{(x-2)(x+3)}\,\mathrm{d}x &= \int \left(x-1+\frac{4}{5(x-2)}+\frac{11}{5(x+3)}\right)\mathrm{d}x = \\ &= \tfrac{1}{2}\,(x-1)^2 + \tfrac{4}{5}\,\ln|x-2| + \tfrac{11}{5}\,\ln|x-3|\,.\end{aligned}$$

Příklad 3.5.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{2x^2+5x+7}{(x-1)(x+2)(x-3)}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Integrovaný výraz rozložíme na parciální zlomky, tj. napíšeme jej ve tvaru

$$\frac{2x^2+5x+7}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}\,.$$

Po vynásobení výrazem $(x-1)(x+2)(x-3)$ získáme vztah

$$2x^2+5x+7 = A(x+2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+2)\,,$$

který musí platit pro každé x. Speciálně pro $x=1$, $x=-2$, resp. $x=3$, máme rovnosti

$$14=-6A\,,\quad 5=15B\,,\quad 40=10C\,,\quad \text{tj.}\quad A=-\tfrac{7}{3}\,,\quad B=\tfrac{1}{3}\,,\quad C=4\,.$$

Integrál tedy je

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+5x+7}{(x-1)(x+2)(x-3)}\,\mathrm{d}x &= \int \left(-\frac{7}{3(x-1)} + \frac{1}{x+2} + \frac{4}{x-3}\right)\mathrm{d}x = \\ &= -\tfrac{7}{3}\ln|x-1| + \tfrac{1}{3}\ln|x+2| + 4\ln|x-3| + c\,.\end{aligned}$$

Příklad 3.6.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{x^2-3x-3}{(x-2)^2(x+3)}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Integrovaný výraz rozložíme na parciální zlomky, tj. napíšeme jej ve tvaru

$$\frac{x^2-3x-3}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+3}\,,$$

kde A, B a C jsou reálná čísla. Po vynásobení nejmenším společným dělitelem, tj. výrazem $(x-2)^2(x+3)$, získáme rovnost

$$x^2-3x-3 = A(x-2)(x+3)+B(x+3)+C(x-2)^2 = (A+C)x^2+(A+B-4C)x-6A+3B+4C,$$

která musí platit pro každé x. Pro $x=2$, resp. $x=-3$, dostaneme

$$-5=5B\,,\quad 15=25C\,,\quad \text{tj.}\quad B=-1\,,\quad C=\tfrac{3}{5}\,.$$

Vztah pro A lze získat tak, že dosadíme třetí nějakou jinou hodnotu x nebo srovnání koeficientů u nějaké mocniny x. Například členy u x^2 dávají vztah

$$1=A+C\,,\quad \text{tj.}\quad A=\tfrac{2}{5}\,.$$

Tedy integrál je

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-3x-3}{(x-2)^2(x+3)}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{2}{5(x-2)} - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{3}{5(x+3)}\right)\mathrm{d}x = \\ &= \tfrac{2}{5}\ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + \tfrac{3}{5}\ln|x+3| + c\,.\end{aligned}$$

Příklad 3.7.r. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = \dfrac{4x+1}{(x+1)(2x^2-5x+2)}$.

Řešení. Protože $2x^2-5x+2 = (x-2)(2x-1)$, je rozklad funkce $f(x)$ na parciální zlomky

$$f(x) = \frac{4x+1}{(x+1)(2x^2-5x+2)} = \frac{4x+1}{(x+1)(x-2)(2x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{2x-1}\,,$$

kde A, B a C jsou reálná čísla. Po vynásobení této rovnosti výrazem $(x+1)(x-2)(2x-1)$ dostaneme rovnost

$$4x+1 = A(x-2)(2x-1) + B(x+1)(2x-1) + C(x+1)(x-2)\,,$$

která musí platit pro každé x. Speciálně pro $x=-1$, $x=2$ a $x=\frac{1}{2}$ musí být

$$-3 = 9A\,,\quad 9 = 9B\,,\quad 3 = -\tfrac{9}{4}C\,,\quad \text{tj.}\quad A = -\tfrac{1}{3}\,,\quad B = 1\,,\quad C = -\tfrac{4}{3}\,.$$

Proto je jedna z primitivních funkcí

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{(4x+1)\,\mathrm{d}x}{(x+1)(2x^2-5x+2)} = \int \left(-\frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{x-2} - \frac{4}{3(2x-1)}\right)\mathrm{d}x = \\ &= -\tfrac{1}{3}\ln|x+1| + \ln|x-2| - \tfrac{2}{3}\ln|2x-1|\,. \end{aligned}$$

Příklad 3.8.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{(7-3x)\,\mathrm{d}x}{(x-2)(x^2-5x+6)}$.

Řešení. Protože $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$, je rozklad integrované funkce na parciální zlomky

$$\frac{7-3x}{(x-2)(x^2-5x+6)} = \frac{7-3x}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-3}\,,$$

kde A, B a C jsou reálná čísla. Po vynásobení této rovnosti výrazem $(x-2)^2(x-3)$ získáme rovnost

$$7-3x = A(x-2)(x-3)+B(x-3)+C(x-2)^2 = (A+C)x^2+(-5A+B-4C)x+6A-2B+4C\,,$$

která platí pro všchna x. Speciálně pro $x=2$ a $x=3$ musí být

$$1 = -B\,,\quad -2 = C\,,\quad \text{tj.}\quad B = -1\,,\quad C = -2\,.$$

Jestliže srovnáme koeficienty u x^2, dostaneme vztah

$$A + C = 0\,,\quad \text{tj.}\quad A = -C = 2\,.$$

Hledaný integrál tedy je

$$\begin{aligned} \int \frac{(7-3x)\,\mathrm{d}x}{(x-2)(x^2-5x+6)} &= \int \left(\frac{2}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x-3}\right)\mathrm{d}x = \\ &= 2\ln|x-2| + \frac{1}{x-2} - 2\ln|x-3| + c = 2\ln\left|\frac{x-2}{x-3}\right| + \frac{1}{x-2} + c\,. \end{aligned}$$

Příklad 3.9.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{(x+3)\,\mathrm{d}x}{x^2+4x+13}$.

Řešení. Kvadratický polynom $x^2+4x+13$ nemá reálné kořeny. Proto je nelze zapsat jako součet dvou reálných zlomků. Integrály tohoto typu se dají počítat jako součet dvou integrálů, z nich první vede k logaritmu a druhý k arkustangens.

Protože je derivace jmenovatele $(x^2 + 4x + 13)' = 2x + 4$, napíšeme integrovanou funkci ve tvaru

$$\frac{x+3}{x^2+4x+13} = \frac{\alpha(2x+4)+\beta}{x^2+4x+13} = \frac{\alpha(2x+4)}{x^2+4x+13} + \frac{\beta}{x^2+4x+13}\,,$$

kde α a β jsou reálná čísla. Je zřejmé, že pro ně musí platit rovnosti

$$\alpha(2x+4)+\beta = 2\alpha x + 4\alpha + \beta = x+3\,, \quad \text{tj.} \quad 2\alpha = 1\,, \quad 4\alpha+\beta = 3\,,$$

neboli $\alpha = \frac{1}{2}$ a $\beta = 1$. Daný integrál tedy je

$$\int \frac{(x+3)\,\mathrm{d}x}{x^2+4x+13} = \int \frac{\frac{1}{2}\,(2x+4)\,\mathrm{d}x}{x^2+4x+13} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+13}\,.$$

Protože $(x^2+4x+13)' = 2x+4$ použijeme v prvním integrálu substituci $y = x^2+4x+13$. Podle první věty o substituci je

$$\int \frac{\frac{1}{2}\,(2x+4)\,\mathrm{d}x}{x^2+4x+13} = \frac{1}{2}\int \frac{y'(x)\,\mathrm{d}x}{y(x)} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \tfrac{1}{2}\,\ln|y| = \ln\sqrt{x^2+4x+13}\,.$$

Protože $x^2+4x+13 > 0$ pro každé x, nemusíme psát v logaritmu absolutní hodnotu. Pro výpočet druhého integrálu použijeme rovnost

$$x^2+4x+13 = (x+2)^2+9 = 9\Big(\tfrac{1}{9}\,(x+2)^2+1\Big) = 9\Big(\big(\tfrac{1}{3}\,(x+2)\big)^2+1\Big).$$

Pak dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+13} = \frac{1}{9}\int \frac{\mathrm{d}x}{\big(\frac{1}{3}\,(x+2)\big)^2+1} = \frac{1}{9}\,\frac{1}{\frac{1}{3}}\,\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} = \frac{1}{3}\,\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}\,.$$

Celkově je tedy

$$\int \frac{(x+3)\,\mathrm{d}x}{x^2+4x+13} = \ln\sqrt{x^2+4x+13} + \tfrac{1}{3}\,\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + c\,.$$

Příklad 3.10.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{x^3+3x+2}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Protože je stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele, zlomek v integrálu nejprve vydělíme, tj. napíšeme jej ve tvaru

$$\frac{x^3+3x+2}{x^2+2x+3} = x - 2 + \frac{4x+8}{x^2+2x+3}\,.$$

Hledaný integrál pak je

$$\int \frac{x^3+3x+2}{x^3+2x+3}\,\mathrm{d}x = \int (x-2)\,\mathrm{d}x + \int \frac{(4x+8)\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+3} = \tfrac{1}{2}\,(x-2)^2 + \int \frac{(4x+8)\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}\,.$$

Protože kvadratický polynom x^2+2x+3 nemá reálné kořeny a $(x^2+2x+3)' = 2x+2$, napíšeme zlomek v posledním integrálu ve tvaru

$$\frac{4x+8}{x^2+2x+3} = \frac{2(2x+2)}{x^2+2x+3} + \frac{4}{x^2+2x+3}\,.$$

Integrál pak je

$$\int \frac{x^3+3x+2}{x^3+2x+3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\,(x-2)^2 + 2\int \frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+3} + \int \frac{4\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}\,.$$

V prvním integrálu použijeme substituci $y = x^2+2x+3$ a dostaneme

$$\int \frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+3} = \int \frac{y'\,\mathrm{d}x}{y} = \ln y = \ln(x^2+2x+3)\,.$$

V posledním integrálu pak použijeme úpravu

$$x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 = 2\Big(\big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(x+1)\big)^2+1\Big)$$

a po ní je

$$\int \frac{4\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+3} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\,(x+1)\big)^2+1} = 2\sqrt{2}\,\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\,.$$

Celkově pak dostaneme

$$\int \frac{x^3+3x+2}{x^3+2x+3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\,(x-2)^2 + 2\ln(x^2+2x+3) + 2\sqrt{2}\,\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + c\,.$$

Příklad 3.11.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{(x+3)\,\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2-3x+4)}$.

Řešení. Protože kvadratický polynom x^2-3x+4 nemá reálné kořeny, rozložíme integrovaný výraz na parciální zlomky

$$\frac{x+3}{(x-1)(x^2-3x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-3x+4}\,,$$

kde A, B a C jsou reálná čísla. Po vynásobení výrazem $(x-1)(x^2-3x+4)$ dostaneme rovnost

$$x+3 = A(x^2-3x+4) + (Bx+C)(x-1) = (A+B)x^2 + (-3A-B+C)x + (4A-C)\,,$$

která musí platit pro každé x. Speciálně pro $x=1$ získáme vztah

$$4 = 2A\,, \quad \text{tj.} \quad A = 2\,.$$

Vztahy pro B a C dostaneme srovnáním koeficientů u stejných mocnin x. Proto například musí být

$$A+B=0\,, \quad 4A-C=3\,, \quad \text{tj.} \quad B=-A=-2\,, \quad C=4A-3=5\,,$$

a tedy

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+3)\,\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2-3x+4)} &= \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x-1} - \int \frac{(2x-5)\,\mathrm{d}x}{x^2-3x+4} = \\ &= 2\ln|x-1| - \int \frac{(2x-3)\,\mathrm{d}x}{x^2-3x+4} + \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2-3x+4}\,.\end{aligned}$$

A protože

$$x^2 - 3x + 4 = \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 + \tfrac{7}{4} = \tfrac{7}{4}\left(\left(\frac{2x-3}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1\right),$$

je

$$\int \frac{(x+3)\,\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2-3x+4)} = 2\ln|x-1| - \ln(x^2-3x+4) + \frac{4}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{7}} =$$
$$= \ln\frac{(x-1)^2}{x^2-3x+4} + \frac{4}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{7}} + c\,.$$

Příklad 3.12.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Protože $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$, rozložíme integovanou raciální funkci na praciální zlomky

$$\frac{x+3}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1},$$

kde A, B, C a D jsou reálná čísla. Pokud tuto rovnost vynásobíme výrazem $x^4 - 1$, dostaneme vztah

$$x + 3 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)\,,$$

který musí platit pro každé x. Speciálne pro $x = 1$ a $x = -1$ máme

$$4 = 4A\,, \quad 2 = -4B\,, \quad \text{tj.} \quad A = 1\,, \quad B = -\tfrac{1}{2}\,.$$

Čísla C a D lze pak najít srovnáním koeficientů u některých dvou mocnin x. Naříklad členy u x^3 a x^0, dávají rovnosti

$$A + B + C = 0\,, \quad A - B - D = 3\,, \quad \text{tj.} \quad C = -A - B = -\tfrac{1}{2}\,, \quad D = A - B - 3 = -\tfrac{3}{2}\,.$$

Proto je daný integrál

$$\int \frac{x+3}{x^4-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{2(x+1)} - \int \frac{x+3}{2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \ln|x-1| - \tfrac{1}{2}\ln|x+1| - \tfrac{1}{4}\ln(x^2+1) - \tfrac{3}{2}\operatorname{arctg} x + c\,.$$

Příklad 3.13.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{(x^2+3x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}$.

Řešení. Protože kvadratické polynomy $x^2 + 2x + 2$ a $x^2 - 2x + 2$ nemají reálné kořeny, je rozklad intergované funkce na parciální zlomky

$$\frac{x^2+3x+2}{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+2},$$

kde A, B, C a D jsou reálná čísla, která pro každé x splňují vztah

$$x^2 + 3x + 2 = (Ax+B)(x^2-2x+2) + (Cx+D)(x^2+2x+2) =$$
$$= (A+C)x^3 + (-2A+B+2C+D)x^2 + (2A-2B+2C+2D)x + (2B+2D)\,.$$

Srovnání koeficientů u mocnin x vede k soustavě rovnic

$$A + C = 0\,, \quad -2A + B + 2C + D = 1\,, \quad 2A - 2B + 2C + 2D = 3\,, \quad 2B + 2D = 2\,,$$

která má řešení $A = C = 0$, $B = -\frac{1}{4}$ a $D = \frac{5}{4}$. Daný integrál tedy je

$$\int \frac{(x^2+3x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)} = -\tfrac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} + \tfrac{5}{4} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+2} =$$
$$= -\tfrac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1} + \tfrac{5}{4} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2+1} = -\tfrac{1}{4}\,\mathrm{arctg}(x+1) + \tfrac{5}{4}\,\mathrm{arctg}(x-1) + c\,.$$

Příklad 3.14.r. Pomocí integrace per partes ukažte, že pro každé $n = 2, 3, \ldots$ platí

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2(n-1)}\,\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n-1}} \tag{14}$$

Řešení. Pro $f'(x) = 1$ a $g(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^{n-1}}$, kde $n \geq 2$, dostaneme integrací per partes

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n-1}} = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} =$$
$$= \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{x^2+1-1\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} =$$
$$= \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n-1}} - 2(n-1) \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$$

Když označíme

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}\,, \qquad I_{n-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n-1}}\,,$$

je poslední rovnost

$$I_{n-1} = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)I_{n-1} - 2(n-1)I_n\,,$$

neboli

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)}\,\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\,I_{n-1}\,.$$

Příklad 3.15.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{(x^2+2x+3)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3}$.

Řešení. Když rozložíme integrovaný zlomek na parciální zlomky, dostaneme

$$\frac{x^2+2x+3}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{(x^2+1)^2} + \frac{2x+2}{(x^2+1)^3}\,.$$

Hledaný integrál pak je

$$\int \frac{(x^2+2x+3)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3} = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} + \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3}\,.$$

První integrál lze najít pomocí substituce $y = x^2 + 1$, po které dostaneme

$$\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y^3} = -\frac{1}{2y^2} = -\frac{1}{2(x^2+1)^2}\,.$$

Když zavedeme označení

$$I_3 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3}, \qquad I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}, \qquad I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x,$$

lze pro daný itegrál psát

$$\int \frac{(x^2+2x+3)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3} = -\frac{1}{2(x^2+1)^2} + I_2 + 2I_3 .$$

Když použijeme (14) pro $n = 3$, dostaneme

$$I_3 = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \tfrac{3}{4}\, I_2 ,$$

a tedy

$$\int \frac{(x^2+2x+3)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3} = -\frac{1}{2(x^2+1)^2} + \frac{x}{2(x^2+1)^2} + \tfrac{5}{2}\, I_2 .$$

Pro $n = 2$ je vztah (14)

$$I_2 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \tfrac{1}{2}\, I_1 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x .$$

Z toho pak plyne, že

$$\int \frac{(x^2+2x+3)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3} = -\frac{1}{2(x^2+1)^2} + \frac{x}{2(x^2+1)^2} + \frac{5x}{4(x^2+1)} + \tfrac{5}{4}\operatorname{arctg} x + c .$$

Příklad 3.16.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{(x+3)\,\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2}$.

Řešení. Protože kvadratický polynom x^2-2x+5 nemá reálné kořeny, a $(x^2-2x+5)' = 2x-2$, budeme daný integrál hledat jako součet dvou integrálů

$$\int \frac{(x+3)\,\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2} = \int \frac{\alpha(2x-2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2} + \int \frac{\beta\,\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2},$$

kde α a β jsou reálná čísla, pro která platí

$$\alpha(2x-2) + \beta = x + 3, \quad \text{tj.} \quad \alpha = \tfrac{1}{2}, \quad \beta = 4,$$

neboli jako

$$\int \frac{(x+3)\,\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2} + \int \frac{4\,\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2} .$$

V prvním integrálu použijeme substituci $y = x^2-2x+5$ a dostaneme

$$\int \frac{(2x-2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x^2-2x+5} .$$

Abychom našli druhý integrál, napišeme

$$x^2-2x+5 = (x-1)^2 + 4 = 4\left(\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1\right).$$

Proto v tomto integrálu použijeme substituci

$$y = \frac{x-1}{2}, \quad \text{tj.} \quad x = 2y+2, \quad \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}y,$$

a po ní získáme integrál

$$\int \frac{4\,\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2} = \int \frac{8\,\mathrm{d}y}{\big(4(y^2+1)\big)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+1)^2}\,.$$

Když použijeme (14) pro $n=2$, dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+1)^2} = \frac{y}{2(y^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \frac{y}{2(y^2+1)} + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} y\,.$$

A po dosazení za y zjistíme, že

$$\int \frac{4\,\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2} = \frac{x-1}{2(x^2-2x+5)} + \tfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}\,.$$

Celkově tedy je

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+3)\,\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2} &= -\frac{1}{2(x^2-2x+5)} + \frac{x-1}{2(x^2-2x+5)} + \tfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} = \\ &= \frac{x-2}{2(x^2-2x+5)} + \tfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + c\,.\end{aligned}$$

Příklad 3.1. Najděte integrály

a. $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x+1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$, **b.** $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+4}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$, **c.** $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^3-6x+5}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$.

[**a.** $\tfrac{1}{4}\,x(3x+1) + \tfrac{3}{8}\ln|2x+1| + c$; **b.** $\displaystyle -\frac{5}{x-1} - \frac{4}{(x-1)^2} + \ln|x-1| + c$;
c. $\displaystyle \tfrac{1}{3}\,x^3 - x^2 + 4x - \frac{17}{x+2} - 14\ln|x+2| + c$.]

Píklad 3.2. Najděte primitivní funkce k funkcím

$$f_1(x) = \frac{2x-1}{(x+2)(x-1)}\,,\qquad f_2(x) = \frac{x+4}{(x+1)(3-2x)}\,,\qquad f_3(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+2)}\,,$$
$$f_4(x) = \frac{4}{2x^2+x-3}\,,\qquad f_5(x) = \frac{x+2}{4+5x-6x^2}\,,\qquad f_6(x) = \frac{2x^2-3x+8}{2x^2+7x+3}\,.$$

[$F_1(x) = \tfrac{5}{4}\ln|x+2| + \tfrac{1}{3}\ln|x-1|$; $F_2(x) = \tfrac{3}{5}\ln|x+1| - \tfrac{11}{10}\ln|2x-3|$;
$F_3(x) = x + \tfrac{4}{3}\ln|x-1| - \tfrac{1}{3}\ln|x+2|$; $F_4 = \ln\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right|$;
$F_5(x) = \tfrac{3}{22}\ln|2x+1| - \tfrac{10}{33}\ln|3x-4|$; $F_6(x) = x - 7\ln|x+3| + 2\ln|2x+1|$.]

Příklad 3.3. Najděte integrály

a. $\displaystyle\int \frac{(x^2+3x+5)\,\mathrm{d}x}{x(x-1)(x-2)}$, **b.** $\displaystyle\int \frac{(2x-5)\,\mathrm{d}x}{(x-1)(x-2)(2x-1)}$,

c. $\displaystyle\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)(x-2)}$, **d.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+4x+3)}$,

e. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+3)(x^2-3x+2)}$, **f.** $\displaystyle\int \frac{(x+2)\,\mathrm{d}x}{(x-2)(x^2-4x+3)}$.

$$\left[\begin{array}{l}
\textbf{a}.\ \ \tfrac{5}{2}\,\ln|x| - 9\ln|x-1| + \tfrac{15}{2}\,\ln|x-2| + c\,;\\
\textbf{b}.\ \ 3\ln|x-1| - \tfrac{1}{3}\,\ln|x-2| - \tfrac{8}{3}\,\ln|2x-1| + c\,;\\
\textbf{c}.\ \ \tfrac{1}{2}\,(x+2)^2 + \tfrac{1}{6}\,\ln|x+1| - \tfrac{1}{2}\,\ln|x-1| + \tfrac{16}{3}\,\ln|x-2| + c\,;\\
\textbf{d}.\ \ \tfrac{1}{8}\,\ln|x-1| - \tfrac{1}{4}\,\ln|x+1| + \tfrac{1}{8}\,\ln|x+3| + c\,;\\
\textbf{e}.\ \ -\tfrac{1}{4}\,\ln|x-1| + \tfrac{2}{5}\,\ln|x-2| - \tfrac{3}{20}\,\ln|x+3| + c\,;\\
\textbf{f}.\ \ \tfrac{3}{2}\,\ln|x-1| - 4\ln|x-2| + \tfrac{5}{2}\,\ln|x-3| + c\,.
\end{array}\right]$$

Příklad 3.4. Najděte integrály

$$\begin{array}{llll}
\text{a}. & \displaystyle\int \frac{(x^2+2)\,\mathrm{d}x}{(x-1)(x+2)^2}\,, & \text{b}. & \displaystyle\int \frac{(3x+1)\,\mathrm{d}x}{(x+3)(x-1)^2}\,,\\
\text{c}. & \displaystyle\int \frac{x^3-3x^2+8x-9}{(x-3)(x-2)^2}\,\mathrm{d}x\,, & \text{d}. & \displaystyle\int \frac{(x^2+x+1)\,\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+x-2)}\,,\\
\text{e}. & \displaystyle\int \frac{(x^2+4)\,\mathrm{d}x}{(x-2)(x^2-6x+8)}\,, & \text{f}. & \displaystyle\int \frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}\,.
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l}
\textbf{a}.\ \ \tfrac{1}{3}\,\ln|x-1| + \tfrac{2}{3}\,\ln|x+2| + \dfrac{2}{x+2} + c\,;\\
\textbf{b}.\ \ \tfrac{1}{2}\,\ln\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right| - \dfrac{1}{x-1} + c\,,\\
\textbf{c}.\ \ x + 15\ln|x-3| - 11\ln|x-2| + \dfrac{3}{x-2} + c\,;\\
\textbf{d}.\ \ \tfrac{1}{3}\,\ln|x+2| + \tfrac{2}{3}\,\ln|x-1| - \dfrac{1}{x-1} + c\,;\\
\textbf{e}.\ \ 5\ln|x-4| - 4\ln|x-2| + \dfrac{4}{x-2} + c\,;\\
\textbf{f}.\ \ \tfrac{3}{4}\,\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| - \dfrac{5}{4(x-1)} - \dfrac{1}{4(x+1)} + c\,.
\end{array}\right]$$

Příklad 3.5. Najděte primitivní funkce k funkcím

$$\begin{array}{lll}
f_1(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+4x+13}\,, & f_2(x) = \dfrac{2-3x}{x^2-3x+3}\,, & f_3(x) = \dfrac{x^2-4x+7}{x^2+4x+7}\,,\\
f_4(x) = \dfrac{1}{2x^2+2x+1}\,, & f_5(x) = \dfrac{4-5x}{5x^2-4x+1}\,, & f_6(x) = \dfrac{(x+1)^2(x-3)}{x^2-2x+3}\,.
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l}
F_1(x) - \ln\sqrt{x^2+4x+13} - \tfrac{1}{3}\,\operatorname{arctg}\tfrac{x+2}{3}\,;\\
F_2(x) = -\tfrac{3}{2}\,\ln(x^2-3x+3) - \tfrac{5}{2\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\tfrac{2x-3}{\sqrt{3}}\,;\\
F_3(x) = x - 4\ln(x^2+4x+7) + \tfrac{16}{\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\tfrac{x+2}{\sqrt{3}}\,;\\
F_4(x) = \operatorname{arctg}(2x+1)\,;\\
F_5(x) = -\ln\sqrt{5x^2-4x+1} + 2\operatorname{arctg}(5x-2)\,;\\
F_6(x) = \tfrac{1}{2}\,(x+1)^2 - 3\ln(x^2-2x+3) - 6\sqrt{2}\,\operatorname{arctg}\tfrac{x-1}{\sqrt{2}}\,.
\end{array}\right]$$

Příklad 3.6. Najděte integrály

$$\textbf{a}.\quad \int \frac{(x^2+1)\,\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2-4x+5)}\,, \qquad \textbf{b}.\quad \int \frac{(x^2+x+4)\,\mathrm{d}x}{(x+2)(x^2-2x+4)}\,,$$

$$\textbf{c}.\quad \int \frac{(2x^2+x+5)\,\mathrm{d}x}{x(x-1)(x^2-2x+5)}\,.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \textbf{a}. & \ln|x-1| + 4\operatorname{arctg}(x-2) + c\,; \\ \textbf{b}. & \frac{1}{2}\ln|x+2| + \frac{1}{4}\ln(x^2-2x+4) + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + c\,; \\ \textbf{c}. & -\ln|x| + 2\ln|x-1| - \ln\sqrt{x^2-2x+5} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + c\,. \end{array}\right]$$

Příklad 3.7. Najděte integrály

$$\textbf{a}.\quad \int \frac{(x-2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-8x+25)^2}\,, \qquad \textbf{b}.\quad \int \frac{(2x+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+10)^3}\,, \qquad \textbf{c}.\quad \int \frac{(x-1)\,\mathrm{d}x}{(x^3-1)^2}\,.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \textbf{a}. & \dfrac{2x-17}{18(x^2-8x+25)} + \dfrac{1}{27}\operatorname{arctg}\dfrac{x-4}{3} + c\,; \\ \textbf{b}. & -\dfrac{x+19}{36(x^2+2x+10)^2} - \dfrac{x+1}{216(x^2+2x+10)} - \dfrac{1}{648}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{3} + c\,; \\ \textbf{c}. & \frac{1}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{18}\ln(x^2+x+1) - \dfrac{x}{3(x^2+x+1)} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + c\,. \end{array}\right]$$
