Některé často používané substituce

Uvedeme některé substituce, které převádějí integrály určitého typu na integrály z racionálních funkcí, ale mohou být výhodné i při výpočtu jiných neurčitých integrálů. Budeme předpokládat, že funkce $R(x)$ je racionální funkce proměnné x a funkce $R(x,y)$ racionální funkce proměnných x a y, tj.

$$R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\,,$$

kde $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ jsou polynomy dvou proměnných x a y, tj.

$$P(x,y) = \sum_{i=0}^{n_1}\sum_{k=0}^{n_2} a_{i,k}x^i y^k\,, \qquad Q(x,y) = \sum_{i=0}^{m_1}\sum_{k=0}^{m_2} a_{i,k}x^i y^k\,.$$

1. Integrály typu $\int R(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$

Integrály tohoto typu převedeme na integrál racionální funkce substitucí

$$y = \mathrm{e}^x \implies \mathrm{d}y = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = y\,\mathrm{d}x \implies \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{y}\,.$$

Příklad 1.1.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+1)^3}$.

Řešení. Po substituci $y = \mathrm{e}^x$ dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+1)^3} = \int \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^3} = -\frac{1}{2(1+y)^2} = -\frac{1}{2(1+\mathrm{e}^x)^2} + c\,.$$

Příklad 1.2.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}$.

Řešení. Protože $\cosh x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$, máme najít integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \int \frac{2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,.$$

Po substituci $y = \mathrm{e}^x$ dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}y}{y^2+1} = 2\operatorname{arctg} y = 2\operatorname{arctg}\mathrm{e}^x + c\,.$$

Příklad 1.3.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{3-\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x-2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Po substituci $y = \mathrm{e}^x$ dostaneme integrál

$$\int \frac{3-\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x-2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(3-y)\,\mathrm{d}y}{y(2y^2+3y-2)} = \int \frac{(3-y)\,\mathrm{d}y}{y(y+2)(2y-1)}\,.$$

Poslední integrál najdeme pomocí rozkladu na parciální zlomky

$$\frac{(3-y)\,\mathrm{d}y}{y(y+2)(2y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+2} + \frac{C}{2y-1}\,,$$

kde A, B a C jsou reálná čísla. Pro každé y pro ně platí rovnost

$$3-y=A(y+2)(2y-1)+By(2y-1)+Cy(y+2)\,.$$

Speciálně pro $y=0$, $y=-2$ a $y=\frac12$ dostaneme

$$3=-2A\,,\quad 5=10B\,,\quad \tfrac52=\tfrac54\,C\,,\quad \text{tj.}\quad A=-\tfrac32\,,\quad B=\tfrac12\,,\quad C=2\,.$$

Protože $y=\mathrm{e}^x>0$, je

$$\int\frac{3-\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x-2}\,\mathrm{d}x=\int\left(-\frac{3}{2y}+\frac{1}{2(y+2)}+\frac{2}{2y-1}\right)\mathrm{d}y=$$
$$=-\tfrac32\ln y+\tfrac12\,\ln(y+2)+\ln|2y-1|=-\tfrac32\,x+\tfrac12\,\ln(\mathrm{e}^x+2)+\ln|2\mathrm{e}^x-1|+c\,.$$

Příklad 1.4.r. Najděte integrál $\displaystyle\int\frac{4\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+4}$.

Řešení. Po substituci $y=\mathrm{e}^x$ dostaneme integrál

$$\int\frac{4\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+4}=\int\frac{4\,\mathrm{d}y}{y(y^2+2y+4)}\,.$$

Protože kvadratický ploynom y^2+2y+4 nemá reálné kořeny, je jeho rozklad na parciální zlomky

$$\frac{4}{y(y^2+2y+4)}=\frac{A}{y}+\frac{By+C}{y^2+2y+4}\,,$$

kde A, B a C jsou reálná čísla, pro která platí

$$4=A(y^2+2y+4)+(By+C)y=(A+B)y^2+(2A+C)y+4A\,,$$

neboli $A=1$, $B=-1$ a $C=-2$. Tedy

$$\int\frac{4\,\mathrm{d}y}{y(y^2+2y+4)}=\int\frac{\mathrm{d}y}{y}-\int\frac{(y+2)\,\mathrm{d}y}{y^2+2y+4}=\ln y-\int\frac{(y+2)\,\mathrm{d}y}{y^2+2y+4}\,.$$

Protože $(y^2+2y+4)'=2y+2$ a $y^2+2y+4=(y+1)^2+3$, je poslední integrál

$$\int\frac{(y+2)\,\mathrm{d}y}{y^2+2y+4}=\frac12\int\frac{(2y+2)\,\mathrm{d}y}{y^2+2y+4}+\int\frac{\mathrm{d}y}{(y+1)^2+3}=\tfrac12\,\ln(y^2+2y+4)+\tfrac{1}{\sqrt3}\,\mathrm{arctg}\,\tfrac{y+1}{\sqrt3}\,.$$

Když přejdeme opět k proměnné x, dostaneme

$$\int\frac{4\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+4}=x-\ln\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+4}-\frac{1}{\sqrt3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{e}^x+1}{\sqrt3}+c\,.$$

Příklad 1.5.r. Najděte integrál $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{x/2}+\mathrm{e}^{x/3}+\mathrm{e}^{x/6}}$.

Řešení. Integrovaná funkce není racionální funkce proměnné x, ale je to racionální funkce proměnné $\mathrm{e}^{x/6}$. Proto uděláme substituci

$$y=\mathrm{e}^{x/6}\implies\mathrm{d}y=\tfrac16\,\mathrm{e}^{x/6}\,\mathrm{d}x=\tfrac16\,y\,\mathrm{d}x\implies\mathrm{d}x=\frac{6\,\mathrm{d}y}{y}\,.$$

Po této substituci dostaneme integrál

$$\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{x/2}+\mathrm{e}^{x/3}+\mathrm{e}^{x/6}} = \int \frac{6\,\mathrm{d}y}{y(1+y^3+y^2+y)} = \int \frac{6\,\mathrm{d}y}{y(y+1)(y^2+1)}\,,$$

který spočítáme rozkladem na parciální zlomky. Protože kvadratický polynom y^2+1 nemá reálné kořeny, má tento rozklad tvar

$$\frac{6}{y(y+1)(y^2+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} + \frac{Cy+D}{y^2+1}\,.$$

Z toho plyne, že pro každé y musí platit

$$\begin{aligned} 6 &= A(y+1)(y^2+1) + By(y^2+1) + (Cy+D)y(y+1) = \\ &= (A+B+C)y^3 + (A+C+D)y^2 + (A+B+D)y + A\,. \end{aligned}$$

Pro $y=0$ a $y=-1$ získáme $A=6$ a $B=-3$ a ostatních rovnic pak plyne $C=D=-3$. Proto je

$$\begin{aligned} \int \frac{6\,\mathrm{d}y}{y(y+1)(y^2+1)} &= \int \left(\frac{6}{y} - \frac{3}{y+1} - \frac{3y+3}{y^2+1}\right)\mathrm{d}y = \\ &= 6\ln y - 3\ln(y+1) - \tfrac{3}{2}\ln(y^2+1) - 3\operatorname{arctg} y\,. \end{aligned}$$

Po dosazeni za $y=\mathrm{e}^{x/6}$ pak dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{x/2}+\mathrm{e}^{x/3}+\mathrm{e}^{x/6}} = x - 3\ln\Big(\big(\mathrm{e}^{x/6}+1\big)\sqrt{\mathrm{e}^{x/3}+1}\Big) - 3\operatorname{arctg}\mathrm{e}^{x/6} + c\,.$$

Příklad 1.6.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}$.

Řešení. V integrálu bychom mohli použít substituci $y=\mathrm{e}^x$ a po ní získat integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{y-1}}\,,$$

který lze zjednodušit například substitucí $y-1=z^2$.
Jiná možnost je napsat

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}} = \int \frac{\mathrm{e}^{-x/2}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x}}}$$

a použít substituci

$$y=\mathrm{e}^{-x/2} \implies \mathrm{d}y = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2}\,y\,\mathrm{d}x \implies \mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x = -2\,\mathrm{d}y\,,$$

po které dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}} = \int \frac{\mathrm{e}^{-x/2}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x}}} = -2\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = 2\arccos y = 2\arccos\mathrm{e}^{-x/2} + c\,.$$

Příklad 1.1. Najděte integrály

a. $\displaystyle\int \frac{3\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-3\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x\,,$ **b.** $\displaystyle\int \frac{3\mathrm{e}^{x}-2}{\mathrm{e}^{2x}-3\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x\,,$ **c.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x}\,.$

$$\left[\begin{array}{l}\textbf{a}.\ \ 4\ln|\mathrm{e}^x-2|-\ln|\mathrm{e}^x-1|+c\,;\\ \textbf{b}.\ \ 2\ln|\mathrm{e}^x-2|-\ln|\mathrm{e}^x-1|-x+c\,;\\ \textbf{c}.\ \ \ln\left|\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right|+c.\end{array}\right]$$

Příklad 1.2. Najděte integrály

$$\textbf{a}.\quad \int \frac{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+4\mathrm{e}^x+9}\,\mathrm{d}x\,,\qquad \textbf{b}.\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x-1}\,,\qquad \textbf{c}.\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cosh x-1}\,.$$

$$\left[\textbf{a}.\ \ \ln\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+9}+c\,;\quad \textbf{b}.\ \ \frac{-2}{\mathrm{e}^x-1}+c\,;\quad \textbf{c}.\ \ \tfrac{2}{\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\tfrac{2\mathrm{e}^x-1}{\sqrt{3}}+c\,.\right]$$

Příklad 1.3. Najděte integrály

$$\textbf{a}.\quad \int \frac{\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2x+5}\,\mathrm{d}x\,,\qquad \textbf{b}.\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,,\qquad \textbf{c}.\quad \int \frac{\mathrm{e}^x+4}{\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+4}\,\mathrm{d}x\,.$$

$$\left[\begin{array}{c}\textbf{a}.\ \ \ln\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+5}+\operatorname{arctg}\tfrac{\mathrm{e}^x+1}{2}+c\,;\quad \textbf{b}.\ \ -\ln\sqrt{\mathrm{e}^{-2x}+1}+c\,;\\ \textbf{c}.\ \ x+\ln\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+4}+\tfrac{2}{\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\tfrac{\mathrm{e}^x-1}{\sqrt{3}}+c\,.\end{array}\right]$$

Příklad 1.4. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{\mathrm{e}^x}}{\left(1+\sqrt[4]{\mathrm{e}^x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$ $\quad\left[x+\dfrac{8}{\mathrm{e}^{x/4}+1}+c\,.\right]$

---

2. Integrály typu $\int R(\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x}$

Integrály tohoto typu převedeme na integrál racionální funkce substitucí

$$y=\ln x \implies \mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x}{x}\,.$$

Příklad 2.1.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{(\ln x-4)\,\mathrm{d}x}{x(3+\ln x-2\ln^2 x)}$.

Řešení. Substituce $y=\ln x$ vede k integrálu racionální funkce

$$\int \frac{(\ln x-4)\,\mathrm{d}x}{x(3+\ln x-2\ln^2 x)}=\int \frac{(y-4)\,\mathrm{d}y}{3+y-2y^2}=\int \frac{(y-4)\,\mathrm{d}y}{(y+1)(3-2y)}\,,$$

který najdeme pomocí rozkladu na parciální zlomky

$$\frac{y-4}{(y+1)(3-2y)}=\frac{A}{y+1}+\frac{B}{3-2y}\,,\quad \text{tj.}\quad y-4=A(3-2y)+B(y+1)\,.$$

Z toho plyne $A=B=-1$. Tedy daný integrál je

$$\begin{aligned}\int \frac{(\ln x-4)\,\mathrm{d}x}{x(3+\ln x-2\ln^2 x)}&=\int\left(-\frac{1}{y+1}-\frac{1}{3-2y}\right)\mathrm{d}y=\\ &=-\ln|y|+\tfrac12\ln|3-2y|=-\ln\bigl|\ln x\bigr|+\tfrac12\ln\bigl|3-2\ln x\bigr|+c\,.\end{aligned}$$

Příklad 2.2.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{(\ln^2 x - 3\ln x + 4)\,\mathrm{d}x}{x(\ln x - 1)(\ln^2 x - 4\ln x + 3)}$.

Řešení. Po substituci $y = \ln x$ dostaneme integrál

$$\int \frac{(\ln^2 x - 3\ln x + 4)\,\mathrm{d}x}{x(\ln x - 1)(\ln^2 x - 4\ln x + 3)} = \int \frac{(y^2 - 3y + 4)\,\mathrm{d}y}{(y-1)(y^2 - 4y + 3)} = \int \frac{y^2 - 3y + 4}{(y-1)^2(y-3)}\,\mathrm{d}y\,.$$

Tento integrál najdeme pomocí rozkladu na parciální zlomky

$$\frac{y^2 - 3y + 4}{(y-1)^2(y-3)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{(y-1)^2} + \frac{C}{y-3}\,,$$

kde A, B a C jsou reálná čísla, pro která platí

$$\begin{aligned} y^2 - 3y + 4 &= A(y-1)(y-3) + B(y-3) + C(y-1)^2 = \\ &= (A+C)y^2 + (-4A + B - 2C)y + (3A - 3B + C)\,. \end{aligned}$$

Pro $y = 1$ a $y = 3$ dostaneme $B = -1$ a $C = 1$. Z rovnice $A + C = 1$ zjistíme, že $A = 0$ a tedy

$$\int \frac{(y^2 - 3y + 4)\,\mathrm{d}y}{(y-1)(y^2 - 4y + 3)} = \int \left(-\frac{1}{(y-1)^2} + \frac{1}{y-3}\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{y-1} + \ln|y-3|\,.$$

Konečně po dosazení $y = \ln x$ zjistíme, že

$$\int \frac{(\ln^2 x - 3\ln x + 4)\,\mathrm{d}x}{x(\ln x - 1)(\ln^2 x - 4\ln x + 3)} = \frac{1}{\ln x - 1} + \ln\bigl|\ln x - 3\bigr| + c\,.$$

Příklad 2.3.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{(\ln x - 2)\,\mathrm{d}x}{x(\ln^2 x - 3\ln x + 7)}$.

Řešení. Substituce $y = \ln x$ vede k integrálu

$$\int \frac{(\ln x - 2)\,\mathrm{d}x}{x(\ln^2 x - 3\ln x + 7)} = \int \frac{y-2}{y^2 - 3y + 7}\,.$$

Protože kvadratický polynom $y^2 - 3y + 7$ nemá reálné kořeny a $(y^2 - 3y + 7)' = 2y - 3$, je

$$\begin{aligned} \int \frac{y-2}{y^2 - 3y + 7} &= \tfrac{1}{2}\int \frac{(2y-3)\,\mathrm{d}y}{y^2 - 3y + 7} - \tfrac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 - 3y + 7} = \\ &= \ln\sqrt{y^2 - 3y + 7} - \tfrac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{(y - \frac{3}{2})^2 + \frac{19}{4}} = \ln\sqrt{y^2 - 3y + 7} - \frac{1}{\sqrt{19}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2y-3}{\sqrt{19}}\,. \end{aligned}$$

Když se vrátíme k proměnné x dostaneme

$$\int \frac{(\ln x - 2)\,\mathrm{d}x}{x(\ln^2 x - 3\ln x + 7)} = \ln\sqrt{\ln^2 x - 3\ln x + 7} - \frac{1}{\sqrt{19}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\ln x - 3}{\sqrt{19}} + c\,.$$

Příklad 2.1. Najděte integrály

a. $\displaystyle\int \frac{(\ln x + 4)\,\mathrm{d}x}{x(3 + 7\ln x - 6\ln^2 x)}$, **b.** $\displaystyle\int \frac{2\ln^3 x + 3\ln^2 x - 4\ln x - 5}{x(2\ln^2 x - 7\ln x + 6)}\,\mathrm{d}x$,

c. $\displaystyle\int \frac{(6 + 4\ln x - \ln^2 x)\,\mathrm{d}x}{x(\ln x + 2)(\ln^2 x + \ln x - 2)}$, **d.** $\displaystyle\int \frac{(3 - 2\ln x)\,\mathrm{d}x}{x(1 + 2\ln x + 2\ln^2 x)}$.

[**a.** $\frac{1}{3}\ln|3\ln x + 1| - \frac{1}{2}\ln|2\ln x - 3| + c$;
b. $\frac{1}{2}(\ln x + 5)^2 + 15\ln|\ln x - 2| - \frac{5}{2}\ln|2\ln x - 3| + c$;
c. $\ln|\ln x - 1| - 2\ln|\ln x + 2| - \dfrac{2}{\ln x + 2} + c$;
d. $-\ln\sqrt{2\ln^2 x + 2\ln x + 1} + 4\operatorname{arctg}(2\ln x + 1) + c$.]

---

3. Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$

Jestliže je $R(x, y)$ racionální funkce dvou proměnných, vede substituce $y = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ na integrál racionální funkce. Ovšem integrály, které dostaneme po takové substituci jsou většinou poměrně složité. Proto se ve speciálních případech používají jiné substituce.

Jestliže platí rovnost

$$\underline{R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)} \quad \text{resp.} \quad \underline{R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)}, \qquad (1)$$

vede na integrál racionální funkce substituce

$$y = \cos x, \quad \text{resp.} \quad y = \sin x.$$

`Poznámka.` Pokud je funkce $R(\sin x, \cos x)$ lichá v proměnné $\sin x$, má tvar

$$R(\sin x, \cos x) = S(\sin^2 x, \cos x)\sin x = S(1 - \cos^2 x, \cos x)\sin x = \widehat{R}(\cos x)\sin x,$$

kde $\widehat{R}(x)$ je racionální funkce. Proto vede substituce $y = \cos x$, tj. $\mathrm{d}y = -\sin x\,\mathrm{d}x$, k integrálu

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int \widehat{R}(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x = -\int \widehat{R}(\cos x)(-\sin x\,\mathrm{d}x) = -\int \widehat{R}(y)\,\mathrm{d}y.$$

Z podobných důvodů vede integrál pro funkci $R(\sin x, \cos x)$, která je lichá v $\cos x$ po substituci $y = \sin t$ k integrálu z racionální funkce.

Příklad 3.1.r. Naděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

Řešení. Protože je funkce $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{1}{\sin x}$ lichá v proměnné $\sin x$, můžeme použít substituci

$$y = \cos x \implies \mathrm{d}y = -\sin x\,\mathrm{d}x \implies \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}y}{\sin x} \implies \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = -\frac{\mathrm{d}y}{\sin^2 x} = \frac{\mathrm{d}y}{y^2 - 1}.$$

Tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}y}{(y-1)(y+1)} = \tfrac{1}{2} \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right) \mathrm{d}y = \tfrac{1}{2} \big(\ln|y-1| - \ln|y+1| \big) =$$
$$= \ln \sqrt{\left| \frac{1-y}{1+y} \right|} = \ln \sqrt{\left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right|} = \ln \left| \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x \right| + c\,.$$

Příklad 3.2.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\sin x)\cos x}$.

Řešení. Protože je funkce $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{1}{(2-\sin x)\cos x}$ lichá v $\cos x$, použijeme substituci $y = \sin x$. Pak je

$$\mathrm{d}y = \cos x \, \mathrm{d}x \implies \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\cos x} \implies \frac{\mathrm{d}x}{(2+\sin x)\cos x} = \frac{\mathrm{d}y}{(2+y)\cos^2 x} = \frac{\mathrm{d}y}{(2+y)(1-y^2)}\,,$$

a tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\sin x)\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}y}{(2+y)(1-y^2)} = \int \frac{\mathrm{d}y}{(2+y)(1-y)(1+y)}\,.$$

Poslední integrál najdeme pomocí rozkladu na parciální zlomky

$$\frac{1}{(2+y)(1-y)(1+y)} = \frac{A}{2+y} + \frac{B}{1-y} + \frac{C}{1+y}\,,$$

neboli

$$A(1-y)(1+y) + B(2+y)(1+y) + C(2+y)(1-y) = 1\,.$$

Pro $y = -2$, $y = 1$ a $y = -1$ pak dostaneme $A = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{6}$ a $C = \frac{1}{2}$. Protože $|y| = |\sin x| < 1$, můžeme v logaritmech vynechat absoulutní hodnoty a dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{(2+y)(1-y)(1+y)} = \int \left(-\frac{1}{3(2+y)} + \frac{1}{6(1-y)} + \frac{1}{2(1+y)} \right) \mathrm{d}y =$$
$$= -\tfrac{1}{3} \ln(2+y) - \tfrac{1}{6} \ln(1-y) + \tfrac{1}{2} \ln(1+y)\,.$$

Pokud se vrátíme k proměnné x, vidíme, že

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\sin x)\cos x} = -\tfrac{1}{3} \ln(2+\sin x) - \tfrac{1}{6} \ln(1-\sin x) + \tfrac{1}{2} \ln(1+\sin x) + c\,.$$

Když pro funkci $R(\sin x, \cos x)$ platí rovnost

$$\underline{R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)} \tag{2}$$

vede k integrálu z racionální funkce substituce $y = \operatorname{tg} x$.

`Poznámka.` Pokud racionální funkce $R(\sin x, \cos x)$ splňuje vztah (2) lze ji vyjádřit jako racionální funkci proměnných

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\,, \\ \cos x \sin x &= \cos^2 x\ \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\,, \\ \sin^2 x &= \cos^2 x\ \operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\,, \end{aligned}$$

tj. jako racionální funkci proměnné $\operatorname{tg} x$. A protože pro $y = \operatorname{tg} x$, je

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \implies \mathrm{d}x = \cos^2 x \,\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2}\,,$$

vede substituce $y = \operatorname{tg} x$ k integrálu racionální funkce v proměnné y.

Příklad 3.3.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x}$.

Řešení. Integrovaná funkce $R(\sin x, \cos x)$ má vlastnost (2). Proto použijeme substituci $y = \operatorname{tg} x$. Tato substituce je vidět také z toho, že integrál lze napsat jako

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 4}\,.$$

Po této substituci dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 + 3y + 4}\,.$$

Protože kvadratický polynom $y^2 + 3y + 4$ nemá reálné kořeny a $y^2 + 3y + 4 = \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$, je poslední integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 + 3y + 4} = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2y + 3}{\sqrt{7}}\,.$$

A když se vrátíme k proměnné x, dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x} = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\sqrt{7}} + c\,.$$

Příklad 3.4.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x \,\mathrm{d}x}{\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x}$.

Řešení. Integrovaná funkce má vlastnost (2). Proto použijeme substituci $y = \operatorname{tg} x$. Pak je

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + y^2}\,, \quad \sin x \cos x = \frac{y}{1 + y^2}\,, \quad \sin^2 x = \frac{y^2}{1 + y^2}\,, \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2}$$

a po dosazení dostaneme

$$\int \frac{\sin^2 x \,\mathrm{d}x}{\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x} = \int \frac{y^2 \,\mathrm{d}y}{(y^2 - 3y + 2)(1 + y^2)} = \int \frac{y^2 \,\mathrm{d}y}{(y - 1)(y - 2)(1 + y^2)}.$$

Poslední integrál najdeme pomocí rozkladu na parciální zlomky

$$\frac{y^2}{(y-1)(y-2)(1+y^2)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y-2} + \frac{Cy+D}{y^2+1}\,,$$

Tím získáme rovnost

$$A(y-2)(y^2+1) + B(y-1)(y^2+1) + (Cy+D)(y-1)(y-2) = y^2\,,$$

která musí platit pro každé y. Speciálně pro $y = 1$ a $y = 2$ dostaneme $A = -\frac{1}{2}$ a $B = \frac{4}{5}$. Členy u y^3 a absolutní člen, tj. u y^0, dávají rovnice

$$A + B + C = 0\,, \quad -2A - B + 2D = 0\,, \quad \text{tj.} \quad C = -\tfrac{3}{10}\,, \quad D = -\tfrac{1}{10}\,.$$

Z toho dostaneme

$$\begin{aligned}\int \frac{y^2\,\mathrm{d}y}{(y-1)(y-2)(1+y^2)} &= \int \left(-\frac{\frac{1}{2}}{y-1} + \frac{\frac{4}{5}}{y-2} - \frac{\frac{3}{10}\,y}{y^2+1} - \frac{\frac{1}{10}}{y^2+1} \right) \mathrm{d}y = \\ &= -\tfrac{1}{2}\,\ln|y-1| + \tfrac{4}{5}\,\ln|y-2| - \tfrac{3}{10}\,\ln\sqrt{y^2+1} - \tfrac{1}{10}\,\operatorname{arctg} y\,.\end{aligned}$$

Konečně po dosazení $y = \operatorname{tg} x$ máme

$$\begin{aligned}&\int \frac{\sin^2 x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x} = \\ &\quad = -\tfrac{1}{2}\,\ln|\operatorname{tg} x - 1| + \tfrac{4}{5}\,\ln|\operatorname{tg} x - 2| - \tfrac{3}{10}\,\ln\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1} - \tfrac{1}{10}\,\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = \\ &\quad = -\tfrac{1}{2}\,\ln|\sin x - \cos x| + \tfrac{4}{5}\,\ln|\sin x - 2\cos x| - \tfrac{1}{10}\,x + c\,.\end{aligned}$$

Nemá-li funkce $R(\sin x, \cos x)$ ani jednu z vlastností (1) a (2), vede na integrál racionální funkce substituce $y = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$. Pak je

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{\cos^2\frac{1}{2}x - \sin^2\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}x + \sin^2\frac{1}{2}x} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x} = \frac{1-y^2}{1+y^2}\,,\\ \sin x &= \frac{2\sin\frac{1}{2}x\,\cos\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}x + \sin^2\frac{1}{2}x} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x} = \frac{2y}{1+y^2}\,,\\ \mathrm{d}y &= \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{1}{2}x} \implies \mathrm{d}x = \frac{2\cos^2\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}y}{\cos^2\frac{1}{2}x + \sin^2\frac{1}{2}x} = \frac{2\,\mathrm{d}y}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x} = \frac{2\,\mathrm{d}y}{1+y^2}\,.\end{aligned}$$

`Poznámka.` Pokud označíme $x = 2t$, je

$$R(\sin x, \cos x) = R(2\sin t\cos t, \cos^2 t - \sin^2 t) = \widehat{R}(\sin t, \cos t) = \widehat{R}(-\sin t, -\cos t)\,.$$

Tedy funkce $\widehat{R}(\sin t, \cos t)$ má vlastnost (2) a integrál lze převést na integrál racionální funkce substitucí $y = \operatorname{tg} t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$.

Příklad 3.5.r Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$.

Řešení. Protože funkce $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{1}{2+\cos x}$ nemá ani jednu z vlastností (1) a (2), použijeme substituci $y = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$. Pomocí výše uvedených vztahů dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}y}{y^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{\sqrt{3}} \right) + c\,.$$

Příklad 3.1. Najděte integrály

$$\textbf{a}.\quad \int \frac{(2\cos x+5)\sin x}{1+\cos x+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \textbf{b}.\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{(4+5\operatorname{tg}^2 x)\cos x}\,,$$

$$\textbf{c}.\quad \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\cos 2x}\,, \qquad \textbf{d}.\quad \int \cos x \cdot \operatorname{tg} 2x\,\mathrm{d}x\,.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \textbf{a}.\ 3\ln(2-\cos x)-\ln(1+\cos x)+c\,; & \textbf{b}.\ \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{2}+c\,; \\ \textbf{c}.\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{2}\,\sin x}{1-\sqrt{2}\,\sin x}\right|+c\,; & \textbf{d}.\ -\cos x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{2}\,\cos x}{1-\sqrt{2}\,\cos x}\right|+c\,. \end{array}\right]$$

Příklad 3.2. Najděte intergály

$$\textbf{a}.\quad \int \frac{3\sin x-\cos x}{\sin x+3\cos x}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \textbf{b}.\quad \int \frac{3\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\textbf{c}.\quad \int \operatorname{tg}^4 x\,\mathrm{d}x\,, \qquad \textbf{d}.\quad \int \operatorname{cotg}^4 x\,\mathrm{d}x\,.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \textbf{a}.\ \ -\ln|\sin x+3\cos x|+3\,; & \textbf{b}.\ x-2\ln|\sin x+\cos x|+c\,; \\ \textbf{c}.\ x-\operatorname{tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+c\,; & \textbf{d}.\ x+\operatorname{cotg} x-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x+c\,. \end{array}\right]$$

Příklad 3.3. Najděte integrály

$$\textbf{a}.\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}\,, \qquad \textbf{b}.\quad \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{2+\sin x+2\cos x}\,.$$

$$\left[\textbf{a}.\ \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+c\,; \quad \textbf{b}.\ \frac{1}{5}\,x-\frac{4}{5}\ln\left|\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\right|+c\,.\right]$$

---

4. Integrály typu $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\,\mathrm{d}x$, kde $ad-bc \neq 0$

Pro integrály tohoto typu vede na integrál racionální funkce substituce

$$y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+r}}\,, \quad \text{tj.} \quad y^n = \frac{ax+b}{cx+d}\,, \quad \text{neboli} \quad x = \frac{dy^n-b}{a-cy^n}\,.$$

Příklad 4.1.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{2x+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{(2x-1)^3}-x}\,\mathrm{d}x.$

Řešení. Když uděláme subtituci

$$y = \sqrt{2x-1}\,, \quad \text{tj.} \quad y^2 = 2x-1 \implies x = \tfrac{1}{2}(y^2+1) \implies \mathrm{d}x = y\,\mathrm{d}y\,,$$

dostaneme integrál racionální funkce

$$\int \frac{2x+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{(2x-1)^3}-x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{y^2+1+y}{y^3-\frac{1}{2}(y^2+1)}\,y\,\mathrm{d}y = \int \frac{2y^3+2y^2+2y}{2y^3-y^2-1}\,\mathrm{d}y\,.$$

Protože je stupeň čitatele stejný jako stupeň jmenovatele, zlomek nejprve vydělíme a dostaneme

$$\int \frac{2y^3+2y^2+2y}{2y^3-y^2-1}\,\mathrm{d}y = \int \left(1+\frac{3y^2+2y+1}{2y^3-y^2-1}\right)\mathrm{d}y = y + \int \frac{3y^2+2y+1}{(y-1)(2y^2+y+1)}\,\mathrm{d}y\,.$$

Poslední integrál najdeme pomocí rozkladu na parciální zlomky

$$\frac{3y^2+2y+1}{(y-1)(2y^2+y+1)} = \frac{A}{y-1} + \frac{By+C}{2y^2+y+1}$$

neboli

$$3y^2+2y+1 = A(2y^2+y+1)+(By+C)(y-1) = (2A+B)y^2+(A-B+C)y+(A-C)\,.$$

Pro $y=1$ dostaneme $A=\frac{3}{2}$ a z rovnic $2A+B=3$ a $A-C=1$ pak plyne $B=0$, $C=\frac{1}{2}$. Tedy

$$\int \frac{3y^2+2y+1}{(y-1)(2y^2+y+1)}\,\mathrm{d}y = \int \left(\frac{\frac{3}{2}}{y-1}+\frac{\frac{1}{2}}{2y^2+y+1}\right)\mathrm{d}y =$$
$$= \tfrac{3}{2}\ln|y-1| + \tfrac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{2y^2+y+1}\,.$$

A protože

$$2y^2+y+1 = 2\big(y+\tfrac{1}{4}\big)^2+\tfrac{7}{8} = \tfrac{7}{8}\Big(\tfrac{16}{7}\big(y+\tfrac{1}{4}\big)^2+1\Big) = \tfrac{7}{8}\left(\left(\frac{4y+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1\right),$$

je

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{2y^2+y+1} = \frac{8}{7}\,\frac{\sqrt{7}}{4}\,\operatorname{arctg}\frac{4y+1}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}\,\operatorname{arctg}\frac{4y+1}{\sqrt{7}}\,.$$

Tedy

$$\int \frac{2y^3+2y^2+2y}{2y^3-y^2-1}\,\mathrm{d}y = y + \frac{3}{2}\ln|y-1| + \frac{1}{\sqrt{7}}\,\operatorname{arctg}\frac{4y+1}{\sqrt{7}}$$

a původní integrál je

$$\int \frac{2x+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{(2x-1)^3}-x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2x-1} + \frac{3}{2}\ln\big|\sqrt{2x-1}-1\big| + \frac{1}{\sqrt{7}}\,\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{2x-1}+1}{\sqrt{7}} + c\,.$$

Příklad 4.2.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$.

Řešení. Tento integrál je racionální funkce proměnné $\sqrt[6]{x+1}$. Proto uděláme substituci

$$y = \sqrt[6]{x+1}\,, \quad \text{tj.} \quad y^6 = x+1 \implies \mathrm{d}x = 6y^5\,\mathrm{d}y\,.$$

Po ní dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}} = \int \frac{6y^5\,\mathrm{d}y}{y^3 - y^2} = 6\int \frac{y^3\,\mathrm{d}y}{y-1}\,.$$

A protože

$$\frac{y^3}{y-1} = y^2 + y + 1 + \frac{1}{y-1}\,,$$

je

$$6\int \frac{y^3\,\mathrm{d}y}{y-1} = 6\int \left(y^2 + y + 1 + \frac{1}{y-1}\right)\mathrm{d}y = 2y^3 + 3y^2 + 6y + 6\ln|y-1|\,.$$

A když se vrátíme k proměnné x, dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}} = 2\sqrt{x+1} + 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x+1} - 1\right| + c\,.$$

Příklad 4.3.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Poku integrál napíšeme ve tvaru

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\,\mathrm{d}x\,,$$

je zřejmé, že bude výhodná substituce

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,, \quad \text{neboli} \quad y^2 = \frac{x-1}{x+1}\,, \quad \text{tj.} \quad x = \frac{1+y^2}{1-y^2} \implies \mathrm{d}x = \frac{4y\,\mathrm{d}y}{(1-y^2)^2}\,.$$

Po ní dostaneme

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-y}{1+y}\,\frac{4y\,\mathrm{d}y}{(1-y^2)^2} = \int \frac{4y\,\mathrm{d}y}{(1-y)(1+y)^3}\,.$$

Poslední integrál lze najít pomocí rozkladu na parciální zlomky

$$\frac{4y}{(1-y)(1+y)^3} = \frac{A}{1-y} + \frac{B}{1+y} + \frac{C}{(1+y)^2} + \frac{D}{(1+y)^3}\,,$$

kde A, B, C a D jsou reálná čísla, neboli

$$\begin{aligned} 4y &= A(1+y)^3 + B(1-y)(1+y)^2 + C(1-y)(1+y) + D(1-y) = \\ &= (A-B)y^3 + (3A-B-C)y^2 + (3A+B-D)y + (A+B+C+D)\,. \end{aligned}$$

Pro $y = \pm 1$ dostaneme $A = \frac{1}{2}$ a $D = -2$. Rovnice $A - B = 0$ a $A + B + C + D = 0$ pak dávají $B = \frac{1}{2}$ a $C = 1$. Tedy

$$\int \frac{4y\,\mathrm{d}y}{(1-1)(1+y)^3} = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-y} + \frac{\frac{1}{2}}{1+y} + \frac{1}{(1+y)^2} - \frac{2}{(1+y)^3} \right) \mathrm{d}y =$$
$$= -\tfrac{1}{2} \ln|1-y| + \tfrac{1}{2} \ln|1+y| - \frac{1}{1+y} + \frac{1}{(1+y)^2} = \tfrac{1}{2} \ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| - \frac{y}{(1+y)^2}$$

a po dosazení za y dostaneme

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}\right| - \frac{\sqrt{x^2-1}}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)^2} + c\,.$$

Příklad 4.1. Najděte integrály

a. $\displaystyle\int (x+4)\sqrt[3]{x-8}\,\mathrm{d}x\,,$ **b**. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x-1}}\,,$ **c**. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3 \sqrt{x}}\,,$

d. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x+1}}{x}\,\mathrm{d}x\,,$ **e**. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{2+x}\,\mathrm{d}x}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,,$ **f**. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x\,.$

a. $\frac{3}{7}(x+13)(x-8)^{4/3} + c\,;$
b. $2\sqrt{x-1} - 2\ln\left(1+\sqrt{x-1}\right) + c\,;$
c. $\displaystyle\frac{-4}{1+\sqrt[4]{x}} + \frac{2}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2} + c\,;$
d. $\displaystyle 4\sqrt[4]{x+1} + \ln\left|\frac{\sqrt[4]{x+1}-1}{\sqrt[4]{x+1}+1}\right| - 2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[4]{x+1} + c\,;$
e. $3\sqrt[3]{x+2} + \frac{9}{8}\ln\left|\sqrt[3]{x+2} - 1\right| - \frac{3}{8}\ln\left|x + \sqrt[3]{x+2}\right| - \frac{33}{4\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[3]{x+2}+1}{\sqrt{7}} + c\,;$
f. $-\frac{6}{7}(x+1)^{7/6} + \frac{6}{5}(x+1)^{5/6} + \frac{3}{2}(x+1)^{2/3} - 2(x+1)^{1/2} - 3(x+1)^{1/3} +$
$+6(x+1)^{1/6} + 3\ln\left|(x+1)^{1/3} + 1\right| - 6\,\mathrm{arctg}(x+1)^{1/6} + c\,.$

5. Integrály typu $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$

Integrály tohoto typu lze vždy převést na integraci racionální pomocí tzv. Eulerových substitucí.

Má-li kvadratický polynom ax^2+bx+c dva reálné kořeny $x_1 < x_2$ je $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.
Proto pro $x \in (x_1, x_2)$ je $a < 0$ a platí

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{(-a)(x-x_1)(x_2-x)} = \sqrt{-a}\,(x-x_1)\sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}}$$

a lze použít substituci

$$y = \sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}}\,.$$

Naopak pro $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ je $a > 0$ a

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = \sqrt{a}\,(x - x_1)\sqrt{\frac{x - x_2}{x - x_1}}\,.$$

Proto lze použít substituci

$$y = \sqrt{\frac{x - x_2}{x - x_1}}\,.$$

Tyto substituce jsou vlastně speciálním případem substitucí z části 4.

<u>Pokud je $a > 0$</u>, lze použít substituci

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = y - \sqrt{a}\,x\,.$$

Pak je totiž

$$ax^2 + bx + c = y^2 - 2\sqrt{a}\,yx + ax^2 \implies x = \frac{y^2 - c}{2\sqrt{a}\,y + b}\,,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = y - \sqrt{a}\,x = y - \sqrt{a}\,\frac{y^2 - c}{2\sqrt{a}\,y + b} = \frac{\sqrt{a}\,y^2 + by + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,y + b}\,.$$

<u>Pokud je $c > 0$</u> lze použít substituci

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xy - \sqrt{c}\,.$$

Pak totiž je

$$ax^2 + bx + c = x^2y^2 - 2\sqrt{c}\,xy + c \implies x = \frac{2\sqrt{c}\,y + b}{y^2 - a}\,,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{2\sqrt{c}\,y + b}{y^2 - a}\,y - \sqrt{c} = \frac{\sqrt{c}\,y^2 + by + a\sqrt{c}}{y^2 - a}\,.$$

Příklad 5.1.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Řešení. Zavedeme novou proměnnou y vztahem

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = y - x \implies x^2 + x + 1 = y^2 - 2xy + x^2 \implies x = \frac{y^2 - 1}{2y + 1}\,.$$

Pak je

$$\mathrm{d}x = \frac{2(y^2 + y + 1)}{(2y + 1)^2}\,\mathrm{d}y\,, \qquad 2x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 1} = y + x + 1 = y + \frac{y^2 - 1}{2y + 1} + 1 = \frac{3y(y + 1)}{2y + 1}$$

a po substituci dostaneme integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}} = \int \frac{2y + 1}{3y(y + 1)}\,\frac{2(y^2 + y + 1)}{(2y + 1)^2}\,\mathrm{d}y = \tfrac{2}{3}\int \frac{(y^2 + y + 1)\,\mathrm{d}y}{y(y + 1)(2y + 1)}\,,$$

který můžeme spočítat pomocí rozkladu na parciální zlomky. To nám dává

$$\frac{(y^2 + y + 1)\,\mathrm{d}y}{y(y + 1)(2y + 1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y + 1} + \frac{C}{2y + 1}\,,$$

neboli

$$y^2+y+1 = A(y+1)(2y+1)+By(2y+1)+Cy(y+1) = (2A+2B+C)y^2+(3A+B+C)y+A\,.$$

Pro $y=0$ a $y=-1$ dostaneme $A=B=1$ a například z rovnice $2A+2B+C=1$ plyne $C=-3$. A tedy

$$\int \frac{(y^2+y+1)\,\mathrm{d}y}{y(y+1)(2y+1)} = \ln|y| + \ln|y+1| - \tfrac{3}{2}\ln|2y+1|$$

a po dosazení za $y = x+\sqrt{x^2+x+1}$ dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x+1+\sqrt{x^2+x+1}} =$$
$$= \tfrac{2}{3}\ln\left|x+\sqrt{x^2+x+1}\right| + \tfrac{2}{3}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+x+1}\right| - \ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right| + c\,.$$

Eulerovy substituce jsou univerzální substituce stejně jako substituce $y=\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ v případě goniometrických funkcí a často vedou k integrálům z poměrně složitých racionálních funkcí. Proto bývá mnohdy jednodušší nejprve převest kvadratický výraz pod odmocninou pomocí lineární substituce na kanonický tvar, tj. jeden z výrazů x^2+1, x^2-1 nebo $1-x^2$, a pak se zbavit odmocniny pomocí goniometrických nebo hyperbolických funkcí.

Příklad 5.2.r. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$.

Řešení. Protože je výraz pod odmocninou roven

$$x^2+x-1 = \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{5}{4}\,,$$

zavedeme nejprve proměnnou y vztahem $x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\,y$. Pak je

$$x = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{5}\,y-1\right), \qquad \mathrm{d}x = \tfrac{\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{d}y\,, \qquad x^2+x+1 = \tfrac{1}{4}\,(5y^2+3)$$

a dostaneme integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}} = \int \frac{4\,\mathrm{d}y}{(5y^2+3)\sqrt{y^2-1}}\,.$$

Abychom se zbavili odmocniny, můžeme použít například substituci

$$y = \frac{1}{\cos t} \implies \sqrt{y^2-1} = \frac{\sin t}{\cos t}\,, \quad \mathrm{d}y = \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Pak dostaneme integrál

$$\int \frac{4\,\mathrm{d}y}{(5y^2+3)\sqrt{y^2-1}} = \int \frac{4\cos t\,\mathrm{d}t}{5+3\cos^2 t}\,,$$

který nemusíme řešit univerzální substitucí $z=\operatorname{tg}\frac{1}{2}t$ (to by vedlo k jedné z Eulerových substitucí), ale substitucí $z=\sin t$. Po ní dostaneme

$$\int \frac{4\cos t\,\mathrm{d}t}{5+3\cos^2 t} = \int \frac{4\,\mathrm{d}z}{8-3z^2} = \int \left(\frac{1}{4+\sqrt{6}\,z} + \frac{1}{4-\sqrt{6}\,z}\right)\mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{4+\sqrt{6}\,z}{4-\sqrt{6}\,z}\,.$$

Při zpětném dosazení použijeme toho, že

$$z = \sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-\frac{1}{y^2}} = \frac{\sqrt{y^2-1}}{y}\,, \quad y = \frac{2x+1}{\sqrt{5}}\,, \quad z = \frac{2\sqrt{x^2+x-1}}{2x+1}\,,$$

a tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \frac{4x+2+\sqrt{6(x^2+x-1)}}{4x+2-\sqrt{6(x^2+x-1)}} + c\,.$$
