Určitý integrál

Newonův integrál.

Nechť je $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak se číslo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a) \tag{1}$$

nazývá Newtonův integrál funkce $f(x)$ přes interval (a,b).

Riemannův určitý integrál.

Nechť je funkce $f(x)$ omezená na intervalu (a,b). Nechť jsou dány body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ a body $\xi_i \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle$ Označme $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ a

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = S(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,.$$

Pokud existuje konečná limita $\lim\limits_{\max \Delta_i \to 0} S(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$, která nezávisí na volbě bodů $\mathbf{x}$ a $\boldsymbol{\xi}$, nazývá se Riemannův integrál funkce $f(x)$ přes interval (a,b) a značí se $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta. Každá omezená po částech spojitá funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$ má Riemannův integrál.

Označení: $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0,\qquad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Věta. Pro každé body a, b, c platí

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

pokud alespoň dva z integrálů existují.

Linearita Riemannova integrálu.

Nechť existují integrály $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ a α, β jsou reálná čísla. Pak platí

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Riemannův integrál jako funkce horní meze.

Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak je funkce

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

na intervalu (a,b) primitivní funkce k funkci $f(x)$, tj. platí

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) = f(x)\,.$$

Newton–Lebnizův vzorec.

Když je funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$, je Riemannův integrál roven Newtonovu integrálu, tj. platí vztah (1).

Věta o integraci per partes pro určitý integrál.

Nechť mají funkce $f(x)$ a $g(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojité derivace. Pak je

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

První věta o substituci pro určitý integrál.

Nechť má funkce $\varphi : \langle a,b\rangle \to \langle \alpha,\beta\rangle$ spojitou derivaci a funkce $f(y)$ je spojitá na intervalu $\langle \alpha,\beta\rangle$. Pak je

$$\int_a^b f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Druhá věta o substituci pro určitý integrál.

Nechť je funkce $\psi : \langle \alpha,\beta\rangle \to \langle a,b\rangle$ funkce na interval $\langle a,b\rangle$, která má na intervalu $\langle \alpha,\beta\rangle$ spojitou nenulovou derivaci a funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\psi^{(-1)}(a)}^{\psi^{(-1)}(b)} f\big(\psi(t)\big)\psi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\big(\psi(t)\big)\,\big|\psi'(t)\big|\,\mathrm{d}t\,.$$

Příklad 1.r. Najděte integrál $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{\mathrm{e}} \big|\ln x\big|\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Funkce

$$f(x) = \big|\ln x\big| = \begin{cases} -\ln x & \text{pro} \quad x \in \langle \mathrm{e}^{-1}, 1\rangle\,, \\ \ln x & \text{pro} \quad x \in \langle 1, \mathrm{e}\rangle\,. \end{cases}$$

Proto je

$$\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{\mathrm{e}} \big|\ln x\big|\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} \ln x\,\mathrm{d}x + \int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x\,.$$

A protože primitivní funkce k funkci $\ln x$ je

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x(\ln x - 1)\,,$$

je

$$\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{\mathrm{e}} \big|\ln x\big|\,\mathrm{d}x = \Big[-x(\ln x - 1)\Big]_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} + \Big[x(\ln x - 1)\Big]_1^{\mathrm{e}} = \big(1 - 2\mathrm{e}^{-1}\big) + \big(0 + 1\big) = 2\big(1 - \mathrm{e}^{-1}\big)\,.$$

Příklad 2.r. Najděte integrál $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{1 + \sin 2x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Integrovaná funkce je

$$f(x) = \sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x} = \big|\sin x + \cos x\big|\,,$$

neboli

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x & \text{pro} \quad 0 \le x \le \frac{3}{4}\pi\,, \\ -\sin x - \cos x & \text{pro} \quad \frac{3}{4}\pi \le x \le \pi\,. \end{cases}$$

Tedy

$$\int_0^\pi \sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} (\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} (\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \Big[-\cos x + \sin x\Big]_0^{\frac{3}{4}\pi} - \Big[-\cos x + \sin x\Big]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} = \sqrt{2} + 1 - \big(1 - \sqrt{2}\big) = 2\sqrt{2}\,.$$

Příklad 3.r. Najděte integrály $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin 3x \sin x\,\mathrm{d}x$ a $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{0} \cos 2x \sin 3x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Při výpočtu těchto integrálů použijeme vztahy

$$\sin\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big)\,, \qquad \sin\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\big)\,.$$

Pomocí nich dostaneme

$$\int_0^{\pi/2} \sin 3x \sin x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \big(\cos 2x - \cos 4x\big)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{2}\,\sin 2x - \tfrac{1}{4}\,\cos 4x\Big]_0^{\pi/2} =$$
$$= -\tfrac{1}{8} - \big(-\tfrac{1}{8}\big) = 0\,,$$
$$\int_{-\pi/2}^{0} \cos 2x \sin 3x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{0} \big(\sin 5x + \sin x\big)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\Big[-\tfrac{1}{5}\,\cos 5x - \cos x\Big]_{-\pi/2}^{0} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\big(-\tfrac{1}{5} - 1\big) = -\tfrac{3}{5}\,.$$

Příklad 4.r. Najděte integrál $\displaystyle\int_0^1 x(x-1)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Tento integrál bychom mohli najít pomocí integrace per partes. Ale víme, že existují reálná čísla A, B a C taková, že

$$\int x(x-1)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \int (x^2 - x)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2x}(Ax^2 + Bx + C)\,.$$

Derivací tohoto vztahu dostaneme

$$-2Ax^2 + (2A-2B)x + (B-2C) = x^2 - x\,, \quad \text{tj.} \quad -2A = 1\,, \quad 2A - 2B = -1\,, \quad B - 2C = 0\,,$$

neboli $A = -\frac{1}{2}$, $B = C = 0$. Tedy

$$\int_0^1 x(x-1)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\tfrac{1}{2}\,x^2\mathrm{e}^{-2x}\Big]_0^1 = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2}.$$

Příklad 5.r. Najděte integrály

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{-2x}(3\cos x - 4\sin x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x}\big((x+2)\cos 2x - 3\sin 2x\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení. Nejprve najdeme primitivní funkci. K funkci $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}(3\cos x - 4\sin x)$ má primitivní funkce tvar $F(x) = \mathrm{e}^{-2x}(A\cos x + B\sin x)$, kde A a B jsou reálná čísla. Z rovnosti $F'(x) = f(x)$ plyne

$$(-2A + B)\cos x + (-A - 2B)\sin x = 3\cos x - 4\sin x\,,$$

neboli

$$-2A + B = 3\,, \quad -A - 2B = -4 \implies A = -\tfrac{2}{5}\,, \quad B = \tfrac{11}{5}\,.$$

Tedy primitivní funkce je $F(x) = \frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{-2x}(-2\cos x + 11\sin x)$, a proto

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{-2x}(3\cos x - 4\sin x)\,\mathrm{d}x = \Big[\tfrac{1}{5}\,\mathrm{e}^{-2x}(-2\cos x + 11\sin x)\Big]_0^\pi = \tfrac{2}{5}\left(1 + \mathrm{e}^{-2\pi}\right).$$

Primitivní funkce k funkci $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\big((x+2)\cos 2x - 3\sin 2x\big)$ má tvar

$$F(x) = \mathrm{e}^{-x}\big((Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x\big)\,,$$

kde A, B, C a D jsou reálná čísla. Rovnost $F'(x) = f(x)$ vede ke vztahu

$$\begin{aligned}\big((-A + 2C)x + A - B + 2D\big)\cos 2x + \big((-2A - C)x + C - 2B - D\big)\sin 2x &= \\ = (x+2)\cos 2x - 3\sin 2x\,,&\end{aligned}$$

ze kterého dostaneme soustavu rovnic

$$-A + 2C = 1\,, \quad -2A - C = 0\,, \qquad A - B + 2D = 2\,, \quad C - 2B - D = -3\,.$$

Ta má řešení $A = -\frac{1}{5}$, $C = \frac{2}{5}$, $B = \frac{23}{25}$, $D = \frac{39}{25}$. Tedy

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x}\big((x+2)\cos 2x - 3\sin 2x\big)\,\mathrm{d}x = \\ &\quad = \Big[\tfrac{1}{25}\,\mathrm{e}^{-x}\big((-5x + 23)\cos 2x + (10x + 39)\sin 2x\big)\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \\ &= \tfrac{1}{25}\,\mathrm{e}^{-\pi/2}\big(\tfrac{5}{2}\,\pi - 23\big) - \tfrac{1}{25}\,\mathrm{e}^{\pi/2}\big(-\tfrac{5}{2}\,\pi - 23\big) = \tfrac{\pi}{10}\big(\mathrm{e}^{\pi/2} + \mathrm{e}^{-\pi/2}\big) + \tfrac{23}{25}\big(\mathrm{e}^{\pi/2} - \mathrm{e}^{-\pi/2}\big)\,.\end{aligned}$$

Příklad 6.r. Najděte integrály $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$ a $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2 - 2x + x^2}}$.

Řešení. V prvním integrálu je

$$3 - 2x - x^2 = 4 - (1 + 2x + x^2) = 4 - (x+1)^2\,.$$

Proto je

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4 - (x+1)^2}} = \left[\arcsin\frac{x+1}{2}\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}\,\pi - \tfrac{1}{6}\,\pi = \tfrac{1}{3}\,\pi\,.$$

Pro druhý integrál máme

$$2 - 2x + x^2 = 1 + (1 - 2x + x^2) = 1 + (x-1)^2\,,$$

a tedy

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-2x+x^2}} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+(x-1)^2}} = \Big[\ln\big(x-1+\sqrt{(x-1)^2+1}\big)\Big]_1^2 = \ln\Big(1+\sqrt{2}\Big)\,.$$

Příklad 7.r. Najděte integrál $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^2 x}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Tento integrál lze najít integrací per partes. Jestliže označíme

$$f'(x) = x^{-3}\,, \quad g(x) = \ln^2 x\,, \quad \text{je} \quad f(x) = -\tfrac{1}{2}\,x^{-2}\,, \quad g'(x) = \frac{2\ln x}{x}\,,$$

a vzorec pro integraci per partes dává

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^2 x}{x^3} = \left[-\frac{\ln^2 x}{2x^2}\right]_1^{\mathrm{e}} + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\mathrm{e}^2} + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^3}\,\mathrm{d}x\,.$$

Na zbývající integrál použijeme opět metodu integrace per partes. Položíme

$$f'(x) = x^{-3}\,, \quad g(x) = \ln x\,, \quad \text{je} \quad f(x) = -\tfrac{1}{2}\,x^{-2}\,, \quad g'(x) = \frac{1}{x}\,,$$

a dostaneme

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^2 x}{x^3} = -\frac{1}{2\mathrm{e}^2} + \left[-\frac{\ln x}{2x^2}\right]_1^{\mathrm{e}} + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{2x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\mathrm{e}^2} - \frac{1}{2\mathrm{e}^2} + \left[-\frac{1}{4x^2}\right]_1^{\mathrm{e}} =$$
$$= -\frac{1}{\mathrm{e}^2} - \frac{1}{4\mathrm{e}^2} + \frac{1}{4} = \tfrac{1}{4}\left(1-5\mathrm{e}^{-2}\right).$$

Příklad 8.r. Najděte integrál $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg}\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Tento integrál lze najít integrací per partes. Když položíme

$$f'(x) = x\,, \quad g(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{3} \implies f(x) = \frac{x^2}{2}\,, \quad g'(x) = \frac{1}{1+(\frac{x}{3})^2}\,\frac{1}{3} = \frac{3}{9+x^2}\,,$$

dostaneme

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg}\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{3}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{9+x^2} =$$
$$= \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \left(1-\frac{9}{9+x^2}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}\left[x - 3\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2}\,\frac{\pi}{6} = \pi - \tfrac{3}{2}\sqrt{3}\,.$$

Příklad 9.r. Ukažte, že pro každé $n = 2, 3, \ldots$ platí

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x\,. \tag{2}$$

Řešení. Použijeme metodu integrace per partes, ve které položíme

$$f'(x) = \sin x\,, \quad g(x) = \sin^{n-1} x \implies f(x) = -\cos x\,, \quad g'(x) = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,.$$

To vede ke vztahu

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x \sin^{n-1} x\Big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x\,.$$

Protože pro $n \geq 2$ platí $\cos \frac{1}{2}\pi = \sin^{n-1} 0 = 0$ a $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, je

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x = (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x = (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x =$$
$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x\,.$$

Dostali jsme tak vztah

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x\,,$$

ze kterého už plyne (2).

Podobně lze ukázat, že pro $n = 2, 3, \ldots$ platí

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x \,\mathrm{d}x\,. \tag{3}$$

Příklad 10.r. Najděte integrály

a. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \,\mathrm{d}x\,,$ **b.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin^2 x \,\mathrm{d}x\,.$

Řešení. Když použieje pro výpečet integrálu **a.** několikrát vztah (2), dostaneme

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \,\mathrm{d}x = \frac{5}{6}\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{5}{6}\frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^0 x \,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}\,.$$

Pokud v příkladě **b.** použijeme rovnosti $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, dostaneme

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^4 x(1-\cos^2 x) \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^4 x \,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \cos^6 x \,\mathrm{d}x\,.$$

Podle vztahu (3) pro $n = 6$ je

$$\int_0^{\pi/2} \cos^6 x \,\mathrm{d}x = \frac{5}{6}\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \,\mathrm{d}x\,.$$

Tedy

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^4 x \,\mathrm{d}x - \frac{5}{6}\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \,\mathrm{d}x$$

a vztah (3) dává

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{32}\,.$$

Příklad 11.r. Najděte integrály

a. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} (x^3 - 2x)\sin x^2 \,\mathrm{d}x\,,$ **b.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x\,,$ **c.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{3-2x}{x^3}\,\mathrm{e}^{2/x}\,\mathrm{d}x\,,$

d. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin 2x\, \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x\,,$ **e.** $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}-1}\,,$ **f.** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x(\ln x - 2)^2}\,.$

Řešení. Když v integrálu **a.** uděláme substituci

$$y = x^2 \implies \mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x \implies x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}y\,, \qquad 0 \mapsto 0\,, \quad \sqrt{\pi} \mapsto \pi\,,$$

dostaneme integrál

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} (x^3 - 2x)\sin x^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{\pi}} (x^2 - 2)\sin x^2\,(x\,\mathrm{d}x) = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} (y-2)\sin y\,\mathrm{d}y\,,$$

který lze najít například pomocí integrace per partes. Ta dává

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} (x^3 - 2x)\sin x^2 \,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} (y-2)\sin y\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}\Big[-(y-2)\cos y\Big]_0^{\pi} + \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos y\,\mathrm{d}y = \\ &= \tfrac{1}{2}\Big((\pi-2)-2\Big) + \tfrac{1}{2}\Big[\sin y\Big]_0^{\pi} = \tfrac{1}{2}\,\pi - 2\,.\end{aligned}$$

V integrálu **b.** použijeme substituci

$$y = \sqrt{x}\,, \quad \text{tj.} \quad x = y^2 \implies \mathrm{d}x = 2y\,\mathrm{d}y\,, \qquad 0 \mapsto 0\,, \quad 1 \mapsto 1\,.$$

po ní dostaneme

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{y-1}{y+1}\,2y\,\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \frac{y^2-y}{y+1}\,\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \left(y - 2 + \frac{2}{y+1}\right)\mathrm{d}y = \\ &= 2\Big[\tfrac{1}{2}\,(y-2)^2 + 2\,\ln|y+1|\Big]_0^1 = 2\big(\tfrac{1}{2} + 2\ln 2\big) - 4 = 4\ln 2 - 3\,.\end{aligned}$$

V integrálu **c.** je výhodná substituce

$$y = \frac{1}{x}\,, \quad \text{tj.} \quad x = \frac{1}{y} \implies \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}y}{y^2}\,, \qquad 1 \mapsto 1\,, \quad 2 \mapsto \tfrac{1}{2}\,.$$

Protože

$$\frac{3-2x}{x^3}\mathrm{e}^{2/x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{e}^{2y}\left(-\frac{\mathrm{d}y}{y^2}\right) = -\frac{3y^3-2y^2}{y^2}\,\mathrm{e}^{2y}\,\mathrm{d}y = (2-3y)\mathrm{e}^{2y}\,\mathrm{d}y\,,$$

dostaneme po této substituci

$$\int_1^2 \frac{3-2x}{x^3}\,\mathrm{e}^{2/x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{1/2}(2-3y)\mathrm{e}^{2y}\,\mathrm{d}y = \left[\tfrac{1}{2}\,(2-3y)\mathrm{e}^{2y}\right]_1^{1/2} + \tfrac{3}{2}\int_1^{1/2}\mathrm{e}^{2y}\,\mathrm{d}y =$$
$$= \tfrac{1}{4}\,\mathrm{e} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^2 + \left[\tfrac{3}{4}\,\mathrm{e}^{2y}\right]_1^{1/2} = \mathrm{e} - \tfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^2\,.$$

Protože $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, je v případě **d.** výhodné použít substituci

$$y=\cos x \implies \mathrm{d}y = -\sin x\,\mathrm{d}x\,, \qquad 0\mapsto 1\,, \quad \tfrac{1}{4}\,\pi\mapsto \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Po této substituci dostaneme

$$\int_0^{\pi/4}\sin 2x\,\ln(\cos x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\pi/4} 2\cos x\,\ln(\cos x)\,\big(-\sin x\,\mathrm{d}x\big) =$$
$$= -\int_1^{1/\sqrt{2}} 2y\ln y\,\mathrm{d}y = \int_{1/\sqrt{2}}^1 2y\ln y\,\mathrm{d}y\,.$$

Poslední integrál lze najít pomocí integrace per partes:

$$\int_0^{\pi/4}\sin 2x\,\ln(\cos x)\,\mathrm{d}x = \int_{1/\sqrt{2}}^1 2y\ln y\,\mathrm{d}y = \Big[y^2\ln y\Big]_{1/\sqrt{2}}^1 - \int_{1/\sqrt{2}}^1 y\,\mathrm{d}y =$$
$$= -\tfrac{1}{2}\ln\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \left[\tfrac{1}{2}\,y^2\right]_{1/\sqrt{2}}^1 = \tfrac{1}{4}\,\ln 2 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}\,(\ln 2 - 1)\,.$$

V případě **e.** se jedná o integrál typu $\int R(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$, kde $R(x)$ je racionální funkce. Proto použijeme substituci

$$y=\mathrm{e}^x \implies \mathrm{d}y = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\,, \qquad \tfrac{1}{2}\mapsto 0\sqrt{\mathrm{e}}\,, \quad 1\mapsto \mathrm{e}\,.$$

Po ní dostaneme

$$\int_{1/2}^1 \frac{2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}-1} = \int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\frac{2\,\mathrm{d}y}{y^2-1} = \int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}\right)\mathrm{d}y =$$
$$= \Big[\ln|y-1| - \ln|y+1|\Big]_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} = \ln\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}+1} - \ln\frac{\sqrt{\mathrm{e}}-1}{\sqrt{\mathrm{e}}+1} = \ln\frac{\big(\sqrt{\mathrm{e}}+1\big)^2}{\mathrm{e}+1}\,.$$

Integrál v příkladu **f.** je typu $\int R(\ln x)\,\frac{\mathrm{d}x}{x}$, kde $R(x)$ je racionální funkce. Proto použijeme substituci

$$y=\ln x \implies \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x}\,, \qquad 1\mapsto 0\,, \quad \mathrm{e}\mapsto 1\,,$$

která vede k integrálu

$$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x(\ln x-2)^2} = \int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{(\ln x-2)^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_0^1\frac{y\,\mathrm{d}y}{(y-2)^2} = \int_0^1\left(\frac{1}{y-2}+\frac{2}{(y-2)^2}\right)\mathrm{d}y =$$
$$= \left[\ln|y-2| - \frac{2}{y-2}\right]_0^1 = 2 - (\ln 2 + 1) = 1 - \ln 2\,.$$

Příklad 12.r. Spočítejte integrály

a. $\displaystyle\int_0^2 \frac{(x+15)\,\mathrm{d}x}{9+3x-2x^2}$, **b.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{30\,\mathrm{d}x}{(x-2)(x^2+4x+3)}$,

c. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(4x-5)\,\mathrm{d}x}{(x-2)(x^2-x-2)}$, **d.** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$,

e. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{(3x-1)\,\mathrm{d}x}{(x+2)(x^2+3)}$, **f.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x^2-2x+2)}$.

Řešení.

a. Protože rovnice $2x^2-3x-9=0$ má kořeny $x_1=3$ a $x_2=-\frac{3}{2}$, je

$$9+3x-2x^2=-2(x-3)(x+\tfrac{2}{3})=(3-x)(2x+3)\,.$$

Proto rozložíme zlomek v integrálu na parciální zlomky

$$\frac{x+15}{9+3x-2x^2}=\frac{x+15}{(3-x)(2x+3)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{2x+3}\,.$$

Po vynásobení této rovnosti výrazem $(3-x)(2x+3)$ dostaneme

$$x+15=A(2x+3)+B(3-x)=(2A-B)x+(3A+3B)\,.$$

Pro $x=3$ máme $18=9A$, tj. $A=2$, a z rovnice $2A-B=1$ pak plyne $B=3$. Hledaný integrál tedy je

$$\int_0^2 \frac{(x+15)\,\mathrm{d}x}{9+3x-2x^2}=\int_0^2\left(\frac{2}{3-x}+\frac{3}{2x+3}\right)\mathrm{d}x=\Big[-2\ln|3-x|+\tfrac{3}{2}\ln|2x+3|\Big]_0^2=$$
$$=\tfrac{3}{2}\ln 9-\big(-2\ln 3+\tfrac{3}{2}\ln 3\big)=\tfrac{7}{2}\ln 3\,.$$

b. Integrovaný výraz rozložíme na parciální zlomky. Protože $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$ je

$$\frac{30}{(x-2)(x^2+4x+3)}=\frac{30}{(x-2)(x+1)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+3}\,,$$

neboli

$$30=A(x+1)(x+3)+B(x-2)(x+3)+C(x-2)(x+1)\,.$$

Tato rovnost dává pro $x=2$, $x=-1$ a $x=-3$ vztahy

$$30=15A\,,\quad 30=-6B\,,\quad 30=10C\,,\quad \text{tj.}\quad A=2\,,\quad B=-5\,,\quad C=3\,.$$

Proto je hledaný integrál roven

$$\int_0^1 \frac{30\,\mathrm{d}x}{(x-2)(x^2+4x+3)}=\int_0^1\left(\frac{2}{x-2}-\frac{5}{x+1}+\frac{3}{x+3}\right)\mathrm{d}x=$$
$$=\Big[2\ln|x-2|-5\ln|x+1|+3\ln|x+3|\Big]_0^1=$$
$$=-5\ln 2+3\ln 4-(2\ln 2+3\ln 3)=-\ln 2-3\ln 3\,.$$

c. Integrovaný výraz rozložíme na parciální zlomky. Protože $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$, je

$$\frac{4x-5}{(x-2)(x^2-x-2)}=\frac{4x-5}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}\,,$$

neboli

$$4x-5=A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1)=(A+B)x^2+(-4A-B+C)x+(4A-2B+C)\,.$$

Pro $x=-1$ a $x=2$ získáme vztahy $-9=9A$ a $3=3C$. Tedy $A=-1$ a $C=1$. Z rovnosti $A+B=0$ pak plyne $B=1$. Z toho pak dostaneme

$$\int_0^1\frac{(4x-5)\,\mathrm{d}x}{(x-2)(x^2-x-2)}=\int_0^1\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}\right)\mathrm{d}x=$$
$$=\left[-\ln|x+1|+\ln|x-2|-\frac{1}{x-2}\right]_0^1=-\ln 2+1-\big(\ln 2+\tfrac12\big)=\tfrac12-2\ln 2\,.$$

d. Protože kvadratický polynom x^2+x+1 nemá reálné kořeny, jedná se o integraci jednoho z parciálních zlomků. Protože $(x^2+x+1)'=2x+1$, budeme hledat neurčitý integrál jako součet dvou integrálů

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1}=\alpha\int\frac{(2x+1)\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1}+\beta\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}\,,$$

kde reálná čísla splňují vztah $\alpha(2x+1)+\beta=x$, tj. $\alpha=\frac12$ a $\beta=-\frac12$. První integrál nalezneme pomocí substituce

$$y=x^2+x+1\implies\mathrm{d}y=(2x+1)\,\mathrm{d}x\,,\qquad -1\mapsto 1\,,\quad 1\mapsto 3$$

a při výpočtu druhého integrálu použijeme vztah $x^2+x+1=(x+\frac12)^2+\frac34$. Pak dostaneme

$$\int_{-1}^1\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1}=\tfrac12\int_1^3\frac{\mathrm{d}y}{y}-\frac12\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac12)^2+\frac34}=\tfrac12\Big[\ln y\Big]_1^3-\tfrac{1}{\sqrt3}\left[\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt3}\right]_{-1}^1=$$
$$=\tfrac12\ln 3-\tfrac{1}{\sqrt3}\Big(\operatorname{arctg}\sqrt3-\operatorname{arctg}\tfrac{1}{\sqrt3}\Big)=\tfrac12\ln 3-\tfrac{1}{\sqrt3}\big(\tfrac13\pi-\tfrac16\pi\big)=\tfrac12\ln 3-\tfrac{1}{6\sqrt3}\pi\,.$$

e. Protože kvadratický polynom x^2+3 nemá reálné kořeny, rozložíme integrand na součet parciálních zlomků

$$\frac{3x-1}{(x+2)(x^3+2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+3}\,.$$

Z toho dostaneme

$$3x-1=A(x^2+3)+(Bx+C)(x+2)=(A+B)x^2+(2B+C)x+(3A+2C)\,.$$

Pro $x=-2$ dostaneme $A=-1$ a z rovnic $A+B=0$ a $3A+2C=-1$ pak získáme $B=C=1$. Hledaný integrál tedy je

$$\int_{-1}^1\frac{(3x-1)\,\mathrm{d}x}{(x+2)(x^2+3)}=\int_{-1}^1\left(-\frac{1}{x+2}+\frac{x}{x^2+3}+\frac{1}{x^2+3}\right)\mathrm{d}x=$$
$$=\Big[-\ln|x+2|+\ln\sqrt{x^2+3}+\tfrac{1}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\tfrac{1}{\sqrt3}x\Big]_{-1}^1=$$
$$=-\ln 3+\ln 2+\tfrac{1}{\sqrt3}\tfrac{\pi}{6}-\big(\ln 2-\tfrac{1}{\sqrt3}\tfrac{\pi}{6}\big)=\tfrac{\pi}{3\sqrt3}-\ln 3\,.$$

f. Protože kvadratický polynom x^2-2x+2 nemá reálné kořeny, rozložíme integrovaný výraz na parciální zlomky

$$\frac{1}{x^2(x^2-2x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+2}\,,$$

kde A, B, C a D jsou reálná čísla, pro která platí

$$\begin{aligned}1&=Ax(x^2-2x+2)+B(x^2-2x+2)+Cx^3+Dx^2=\\&=(A+C)x^3+(-2A+B+D)x^2+(2A-2B)x+2B\,.\end{aligned}$$

Pro $x=0$ získáme $B=\frac12$. Ostatní rovnice pak dávají $A=\frac12$, $C=-\frac12$ a $D=\frac12$. Hledaný integrál tedy je

$$\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x^2(x^2-2x+2)}=\tfrac12\int_1^2\left(\frac1x+\frac1{x^2}-\frac{x-1}{x^2-2x+2}\right).$$

A protože $(x^2-2x+2)'=2x-2$, je

$$\begin{aligned}\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x^2(x^2-2x+2)}&=\tfrac12\left[\ln x-\frac1x-\ln\sqrt{x^2-2x+2}\right]_1^2=\\&=\tfrac12\Big(\ln 2-\tfrac12-\ln\sqrt2-(-1)\Big)=\tfrac14\,(1+\ln 2)\,.\end{aligned}$$

Příklad 13.r. Najděte integrály

a. $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\frac{\mathrm{d}x}{3\mathrm{e}^{2x}-8\mathrm{e}^x-3}\,,$

b. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{(\ln x+1)\,\mathrm{d}x}{x(\ln^2x-4\ln x+5)}\,,$

c. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x+\sin 2x}{1+\sin x+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\,,$

d. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x+\sin 2x}\,,$

e. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}x}{1+5\sin x\cos x+5\cos^2 x}\,,$

f. $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,.$

Řešení.

a. Jedná se o integrál typu $\int R(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$, kde $R(x)$ je racionální funkce. Proto zavedeme novou proměnnou

$$y=\mathrm{e}^x\implies\mathrm{d}y=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=y\,\mathrm{d}x\implies\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y}\,,\qquad 0\mapsto1\,,\quad \ln2\mapsto2\,.$$

Po této substituci dostaneme

$$\int_0^{\ln 2}\frac{\mathrm{d}x}{3\mathrm{e}^{2x}-8\mathrm{e}^x-3}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}y}{y(3y^2-8y-3)}\,.$$

Integrovanou funkci rozložíme na parciální zlomky. Protože kvadratický polynom $3y^2-8y-3$ má kořeny $y_1=3$ a $y_2=-\frac13$, je

$$3y^2-8y-3=3(y-3)(y+\tfrac13)=(y-3)(3y+1)\,.$$

Tedy rozklad na parciální zlomky má tvar

$$\frac{1}{y(3y^2-8y-3)} = \frac{1}{y(y-3)(3y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-3} + \frac{C}{3y+1}\,,$$

kde A, B a C jsou reálná čísla, pro která platí

$$1 = A(y-3)(3y+1)+By(3y+1)+Cy(y-3) = (3A+3B+C)y^2+(-8A+B-3C)y-3A\,.$$

Pro $y=0$, $y=3$ a $y=-\frac{1}{3}$ dostaneme přímo $A=-\frac{1}{3}$, $B=\frac{1}{30}$ a $C=\frac{9}{10}$. Tedy hledaný integrál je

$$\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}x}{3\mathrm{e}^{2x}-8\mathrm{e}^x-3} = \int_1^2 \left(-\frac{1}{3y} + \frac{1}{30(y-3)} + \frac{9}{10(3y+1)}\right)\mathrm{d}y =$$
$$= \Big[-\tfrac{1}{3}\ln|y| + \tfrac{1}{30}\ln|y-3| + \tfrac{3}{10}\ln|3y+1|\Big]_1^2 = \tfrac{3}{10}\ln 7 - \tfrac{29}{30}\ln 2\,.$$

b. Protože se jedná o integrál typu $\int R(\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x}$, kde $R(x)$ je racionální funkce, uděláme substituci

$$y = \ln x \implies \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x}\,, \qquad \mathrm{e}\mapsto 1\,, \quad \mathrm{e}^2\mapsto 2\,.$$

Po ní dostaneme

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{(\ln x+1)\,\mathrm{d}x}{x(\ln^2 x-4\ln x+5)} = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln x+1}{\ln^2 x-4\ln x+5}\,\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_1^2 \frac{(y+1)\,\mathrm{d}y}{y^2-4y+5}\,.$$

Protože kvadratický polynom y^2-4y+5 nemá reálné kořeny, jedná se o integrál jedhoho z parciálních zlomků. Protože $(y^2-4y+5)'=2y-4$, najdeme poslední integrál jako součet dvou integrálů

$$\int_1^2 \frac{(y+1)\,\mathrm{d}y}{y^2-4y+5} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(2y-4)\,\mathrm{d}y}{y^2-4y+5} + \int_1^2 \frac{3\,\mathrm{d}y}{y^2-4y+5}\,.$$

První z těchto integrálů najdeme substitucí $z=y^2-4y+5$ a při výpočtu druhého použijeme rovnost $y^2-4y+5=(y-2)^2+1$. To nám dá

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{(\ln x+1)\,\mathrm{d}x}{x(\ln^2 x-4\ln x+5)} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(2y-4)\,\mathrm{d}y}{y^2-4y+5} + \int_1^2 \frac{3\,\mathrm{d}y}{y^2-4y+5} =$$
$$= \Big[\tfrac{1}{2}\ln(y^2-4y+5) + 3\,\mathrm{arctg}(y-2)\Big]_1^2 = \tfrac{3}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\ln 2\,.$$

c. Protože $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, je daný integrál

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x+\sin 2x}{1+\sin x+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{(1+2\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos^2 x}\,.$$

Jedná se o integrál typu $\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x$, kde pro racionální funkci $R(\sin x,\cos x)$ platí $R(\sin x,-\cos x) = -R(\sin x,\cos x)$. Proto uděláme substituci

$$y=\sin x \implies \mathrm{d}y = \cos x\,\mathrm{d}x\,, \qquad 0\mapsto 0\,, \quad \tfrac{1}{2}\pi\mapsto 1\,.$$

A protože $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, dostaneme po této substituci integrál

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x + \sin 2x}{1 + \sin x + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(1+2y)\,\mathrm{d}y}{2 + y - y^2}\,.$$

Poslední integrál lze najít pomocí rozkladu na parciální zlomky. Protože $2 + y - y^2 = (1+y)(2-y)$, má tento rozklad tvar

$$\frac{2y+1}{2+y-y^2} = \frac{2y+1}{(y+1)(2-y)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{2-y}\,,$$

kde A a B jsou reálná čísla, pro která platí

$$2y + 1 = A(2-y) + B(y+1) = (-A+B)y + (2A+B)\,.$$

Pro $y = -1$ a $y = 2$ dostaneme $A = -\frac{1}{3}$ a $B = \frac{5}{3}$. Tedy hledaný integrál je

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x + \sin 2x}{1 + \sin x + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{3(y+1)} + \frac{5}{3(2-y)}\right)\mathrm{d}y = \\ &= \Big[-\tfrac{1}{3}\ln|y+1| - \tfrac{5}{3}\ln|2-y|\Big]_0^1 = -\tfrac{1}{3}\ln 2 + \tfrac{5}{3}\ln 2 = \tfrac{4}{3}\ln 2\,.\end{aligned}$$

d. Protože $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, je daný integrál

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x + \sin 2x} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x(1+\cos x)}\,.$$

To je integrál typu $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$, kde racionální funkce $R(\sin x, \cos x)$ má vlastnost $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. Proto použijeme substituci

$$y = \cos x \implies \mathrm{d}y = -\sin x\,\mathrm{d}x\,, \qquad \tfrac{1}{4}\pi \mapsto \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,, \quad \tfrac{1}{2}\pi \mapsto 0\,.$$

Po ní dostaneme

$$\begin{aligned}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x + \sin 2x} &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{2\sin^2 x(1+\cos x)} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{2(1-\cos^2 x)(1+\cos x)} = \\ &= -\int_{1/\sqrt{2}}^{0} \frac{\mathrm{d}y}{2(1-y^2)(1+y)} = \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}y}{(1-y)(1+y)^2}\,.\end{aligned}$$

Tento integrál najdeme pomocí rozkladu na parciální zlomky

$$\frac{1}{(1-y)(1+y)^2} = \frac{A}{1-y} + \frac{B}{1+y} + \frac{C}{(1+y)^2}\,,$$

kde reálná čísla A, B a C splňují pro každé y vztah

$$1 = A(1+y)^2 + B(1-y)(1+y) + C(1-y) = (A-B)y^2 + (2A-C)y + (A+B+C)\,.$$

Pro $y = 1$ a $y = -1$ dostaneme $A = \frac{1}{4}$ a $C = \frac{1}{2}$, a z rovnosti $A - B = 0$ pak plyne $B = \frac{1}{4}$.

Hledaný integrál pak je

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x + \sin 2x} = \tfrac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}y}{(1-y)(1+y)^2} =$$

$$= \tfrac{1}{8}\int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} + \frac{2}{(1+y)^2}\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \tfrac{1}{8}\left[-\ln(1-y) + \ln(1+y) - \frac{2}{1+y}\right]_0^{1/\sqrt{2}} = \tfrac{1}{8}\left[\ln\frac{1+y}{1-y} - \frac{2}{1+y}\right]_0^{1/\sqrt{2}} =$$

$$= \tfrac{1}{8}\left(\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} + 2\right) = \tfrac{1}{4}\Big(\ln\big(\sqrt{2}+1\big) + \sqrt{2} - 1\Big).$$

e. Tento integrál je typu $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$, kde racionální funkce $R(\sin x, \cos x)$ má vlastnost $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$. Proto použijeme substituci

$$y = \operatorname{tg} x \implies \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}, \qquad -\tfrac{1}{4}\pi \mapsto -1, \quad \tfrac{1}{4}\pi \mapsto 1.$$

Po této substituci dostaneme

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{1 + 5\sin x\cos x + 5\cos^2 x} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x} =$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x + 6}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\right) = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}y}{y^2 + 5y + 6}.$$

Poslední integrál najdeme pomocí rozkladu na parciální zlomky. Protože $y^2 + 5y + 6 = (y+2)(y+3)$, existují reálná čísla A a B taková, že

$$\frac{1}{y^2 + 5y + 6} = \frac{1}{(y+2)(y+3)} = \frac{A}{y+2} + \frac{B}{y+3},$$

neboli

$$1 = A(y+3) + B(y+2) = (A+B)y + (3A + 2B).$$

Pro $y = -2$ a $y = -3$ dostaneme $A = 1$ a $B = -1$. Tedy

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{1 + 5\sin x\cos x + 5\cos^2 x} = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{y+2} - \frac{1}{y+3}\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \Big[\ln(y+2) - \ln(y+3)\Big]_{-1}^{1} = \ln 3 - \ln 4 + \ln 2 = \ln\tfrac{3}{2}.$$

f. Když napíšeme integrál ve tvaru

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}}}{1 + \sqrt{\frac{x}{x+1}}}\,\mathrm{d}x,$$

můžeme vidět, že je rozumná substituce

$$y = \sqrt{\frac{x}{x+1}}, \quad \text{tj.}\quad y^2 = \frac{x}{x+1} \implies x = \frac{y^2}{1-y^2} \implies \mathrm{d}x = \frac{2y\,\mathrm{d}y}{(1-y^2)^2}.$$

Protože $0 \mapsto 0$ a $1 \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}$, dostaneme po ní

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1-y}{1+y}\,\frac{2y\,\mathrm{d}y}{(1-y^2)^2} = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{2y\,\mathrm{d}y}{(1-y)(1+y)^3}\,.$$

Poslední integrál najdeme pomocí rozkladu na parciální zlomky

$$\frac{2y}{(1-y)(1+y)^3} = \frac{A}{1-y} + \frac{B}{1+y} + \frac{C}{(1+y)^2} + \frac{D}{(1+y)^3}\,,$$

neboli

$$\begin{aligned} 2y &= A(1+y)^3 + B(1-y)(1+y)^2 + C(1-y)(1+y) + D(1-y) = \\ &= (A-B)y^3 + (3A-B-C)y^2 + (3A+B-D)y + (A+B+C+D)\,. \end{aligned}$$

Pro $y=1$ a $y=-1$ dostaname $A=\frac{1}{4}$ a $D=-1$. Rovnice $A-B=0$ a $A+B+C+D=0$ pak dávají $B=\frac{1}{4}$ a $C=\frac{1}{2}$. Hledaný integrál tedy je

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{4}\int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} + \frac{2}{(1+y)^2} - \frac{4}{(1+y)^3}\right)\mathrm{d}y = \\ &= \tfrac{1}{4}\left[\ln\frac{1+y}{1-y} - \frac{2}{1+y} + \frac{2}{(1+y)^2}\right]_0^{1/\sqrt{2}} = \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} + \frac{4}{(\sqrt{2}+1)^2} + 2 - 2\right) = \tfrac{1}{2}\Big(\ln\big(\sqrt{2}+1\big) - 3\sqrt{2} + 4\Big). \end{aligned}$$

Příklad 1. Najděte integrály

$$\textbf{a.}\quad \int_0^4 \mathrm{e}^{|2x-4|}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \textbf{b.}\quad \int_0^\pi \sqrt{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x\,.$$

$\Big[$**a.** $\mathrm{e}^4 - 1$; **b.** $2\sqrt{2}$. $\Big]$

Příklad 2. Spočítejte integrály

$$\textbf{a.}\quad \int_0^1 \cos 2\pi x\ \cos 3\pi x\,\mathrm{d}x\,, \qquad \textbf{b.}\quad \int_0^\pi \sin \tfrac{1}{2}x\ \cos 2x\,\mathrm{d}x\,.$$

$\Big[$**a.** 0; **b.** $-\frac{2}{15}$. $\Big]$

Příklad 3. Najděte integrály

$$\textbf{a.}\quad \int_0^\pi \mathrm{e}^{-2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x\,, \qquad \textbf{b.}\quad \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{4x}\cos x\,\mathrm{d}x\,.$$

$\Big[$**a.** $\frac{3}{13}\big(1+\mathrm{e}^{-2\pi}\big)$; **b.** $\frac{1}{17}\big(\mathrm{e}^{\pi}-4\big)$. $\Big]$

Příklad 4. Najděte integrály

$$\text{a.}\quad \int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4(4-x)}}\,, \qquad\qquad \text{b.}\quad \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4(x+4)}}\,.$$

$\left[\mathbf{a.}\ \sqrt{2}\,;\quad \mathbf{b.}\ \sqrt{6}-2\,.\right]$

Příklad 5. Najděte integrály

$$\text{a.}\quad \int_0^1 x(1-x)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{b.}\quad \int_0^2 (3x-2)\ln\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\text{c.}\quad \int_0^\pi \left(\pi^2-x^2\right)\sin 2x\,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{d.}\quad \int_0^\pi x\sin 2x\cos x\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\text{e.}\quad \int_{-1}^1 (2x-1)\,\mathrm{arctg}\,x\,, \qquad \text{f.}\quad \int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\tfrac{1}{2}x\,\mathrm{d}x\,.$$

$\left[\mathbf{a.}\ \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2};\quad \mathbf{b.}\ 2-\tfrac{3}{4}\ln 3\,;\quad \mathbf{c.}\ \tfrac{1}{2}\,\pi^2\,;\quad \mathbf{d.}\ \tfrac{2}{3}\,\pi\,;\quad \mathbf{e.}\ \pi-2\,;\quad \mathbf{f.}\ \sqrt{3}\,\pi-1\,.\right]$

Příklad 6. Dokažte vztah (3).

Příklad 7. Najděte integrály

$$\text{a.}\quad \int_0^1 x^3\,\mathrm{arctg}\,x^2\,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{b.}\quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2}\,, \qquad \text{c.}\quad \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

$\left[\mathbf{a.}\ \tfrac{1}{8}\,(\pi-2)\,;\quad \mathbf{b.}\ \tfrac{9}{2}-6\ln 2\,;\quad \mathbf{c.}\ \tfrac{1}{8}\,\pi^2.\right]$

Příklad 8. Najděte integrály

$$\text{a.}\quad \int_0^3 \frac{x(x+2)\,\mathrm{d}x}{(x+1)^3}\,, \qquad \text{b.}\quad \int_0^2 \frac{(4x+9)\,\mathrm{d}x}{2x^2-5x-3}\,,$$

$$\text{c.}\quad \int_{-1}^1 \frac{x(x^2+1)\,\mathrm{d}x}{x^2+x-6}\,, \qquad \text{d.}\quad \int_{-1/2}^0 \frac{(x^2+8x-1)\,\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+4x+3)}\,,$$

$$\text{e.}\quad \int_0^1 \frac{(3x+1)\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+3x+2)}\,, \qquad \text{f.}\quad \int_{-2}^{-1} \frac{(3-2x)\,\mathrm{d}x}{x^2+4x+7}\,,$$

$$\text{g.}\quad \int_2^4 \frac{(x-2)(2x+1)\,\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2-2x+4)}\,, \qquad \text{h.}\quad \int_1^2 \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{(x+1)^2}\,,$$

$$\text{i.}\quad \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{arctg}\,x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

$$\left[\begin{array}{lll} \mathbf{a.}\ \ln 4-\tfrac{15}{32}\,; & \mathbf{b.}\ -\ln 5-3\ln 3\,; & \mathbf{c.}\ 6\ln 2-2\ln 3-2 \\ \mathbf{d.}\ \ln 2-3\ln 3+2\ln 5\,; & \mathbf{e.}\ 5\ln\tfrac{4}{3}-1\,; & \mathbf{f.}\ \ln\tfrac{3}{4}+\tfrac{7}{6\sqrt{3}}\,\pi\,; \\ \mathbf{g.}\ \tfrac{1}{2}\ln 3+\tfrac{1}{6\sqrt{3}}\,\pi\,; & \mathbf{h.}\ \tfrac{5}{3}\ln 2-\ln 3\,; & \mathbf{i.}\ \tfrac{1}{4}\,\pi-\tfrac{1}{3\sqrt{3}}\,\pi+\tfrac{1}{2}\ln\tfrac{3}{2}\,. \end{array}\right]$$

Příklad 9. Najděte integrály

a. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{(2\mathrm{e}^x + 3)\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 6}$, **b.** $\displaystyle\int_0^{\ln 4} \frac{\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 4}$,

c. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{\mathrm{e}} \frac{(\ln x + 4)\,\mathrm{d}x}{x(\ln x - 2)(\ln^2 x - 4)}$, **d.** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^3} \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x(\ln^2 x - 3\ln x + 3)}$,

e. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x}{1 + \cos x + \sin^2 x}$, **f.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x}{1 + \sin x \cos x + \sin^2 x}$.

[**a.** $-\frac{13}{10}\ln 2 + \frac{1}{10}\ln 3$; **b.** $\ln 2 + \frac{1}{3\sqrt{3}}\pi$; **c.** $\frac{1}{4}\ln 3 + 1$; **d.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\pi$;
e. $-\frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{6}\ln(4\sqrt{2} + 5)$; **f.** $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{7}} + \frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{7}}$.]