Nevlastní Riemannův integrál

<u>Definice nevlastního Riemannova integrálu</u>

Nechť pro každé $y > a$ existuje Riemannův integrál $\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$. Pak definujeme

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to+\infty} \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{1}$$

Pokud je tato limita konečná, říkáme, že integrál (1) konverguje. Pokud integrál nekonverguje, říkáme, že integrál diverguje.

Nechť pro každé $y \in (a, b)$ existuje Riemannův integrál $\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$. Pak definujeme

$$\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to b_-} \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{2}$$

Pokud je tato limita konečná, říkáme, že integrál (2) konverguje. Pokud integrál nekonverguje, říkáme, že integrál diverguje.

<u>Absolutně a neabsolutně konvergentní integrály</u>

Nechť pro každé $y \in (a, b)$, kde b je konečné číslo nebo $+\infty$, existuje integrál $\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$.
Pokud konverguje nevlastní integrál $\int_a^b \bigl|f(x)\bigr|\,\mathrm{d}x$, nazývá se nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně konvergentní.
Pokud nevlastní integrál $\int_a^b \bigl|f(x)\bigr|\,\mathrm{d}x$ diverguje a nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, nazývá se nevlastní integrál neabsolutně konvergentní.

<u>Věta.</u> Je-li integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně konvergentí, je konvergentní.

<u>Srovnávací kritérium absolutní konvergence</u>

Nechť je $f(x) \geq 0$ po částech spojitá funkce na intervalu (a, b).
Jestliže existuje funkce $g(x)$ taková, že $f(x) \leq g(x)$ a integrál $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, pak konverguje také integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Jestliže existuje nezáporná funkce $g(x)$ taková, že $g(x) \leq f(x)$ a integrál $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje, pak diverguje také $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

<u>Limitní srovnávací kritérium</u>

Nechť je $f(x) \geq 0$ na intervalu (a, b) a pro každé $y \in (a, b)$ existuje integrál $\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$. Nechť je $g(x) > 0$ po částech spojitá funkce na integrvalu (a, b) a existuje nenulová konečná limita

$$\lim_{x\to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} = A\,.$$

Pak integrály $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ současně konvergují nebo divergují.

Speciálně platí:
Nechť je $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = A \neq 0$, $A \in \mathbb{R}$. Jestliže je $p > 1$ integrál $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje a je-li $p \leq 1$, integrál $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje.
Nechť je $b \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{x\to b_-} (b - x)^p f(x) = A \neq 0$, $A \in \mathbb{R}$. Jestliže je $p < 1$, integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje a je-li $p \geq 1$, integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje.

Příklad 1.r. Najděte integrály

$$\textbf{a}.\quad \int_0^{\infty} x(x-3)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x\,,\qquad \textbf{b}.\quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}}\,,$$

$$\textbf{c}.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} (x+1)^2\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x\,,\qquad \textbf{d}.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení.

a. V integrálu je pouze jeden nepříjemný bod $x=+\infty$. Proto je tento integrál definován jako

$$\int_0^{\infty} x(x-3)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to+\infty}\int_0^{y} x(x-3)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Primitivní funkci $F(x)$ k funkci $f(x)=x(x-3)\mathrm{e}^{-2x}$ lze najít pomocí integrace per partes a nebo odhadem, který v tomto případě je $F(x)=\mathrm{e}^{-2x}(Ax^2+Bx+C)$, kde A, B a C jsou reálná čísla. Rovnost $F'(x)=f(x)$ dává

$$\mathrm{e}^{-2x}\Big(-2Ax^2+(2A-2B)x+(B-2C)\Big)=\mathrm{e}^{-2x}\big(x^2-3x\big)\,,$$

tj.

$$-2A=1\,,\quad 2A-2B=-3\,,\quad B-2C=0 \implies A=-\tfrac12\,,\quad B=1\,,\quad C=\tfrac12\,.$$

Tedy máme

$$\int_0^{y} x(x-3)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x=\Big[-\tfrac12\,\mathrm{e}^{-2x}\big(x^2-2x-1\big)\Big]_0^y=-\tfrac12\,\mathrm{e}^{-2y}(y^2-2y-1)-\tfrac12$$

a podle definice je

$$\int_0^{\infty} x(x-3)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x=\lim_{y\to+\infty}\Big(-\tfrac12\,\mathrm{e}^{-2y}(y^2-2y-1)-\tfrac12\Big)=-\tfrac12\,.$$

b. V integrandu $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}$ je nepříjemný pouze levý krajní bod intervalu $(0,1)$. Proto definujeme

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}}=\lim_{y\to0_+}\int_y^1\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}}\,.$$

Primitivní funkci k $f(x)$ najdeme například substitucí

$$t=\sqrt{x+1}\implies x=t^2-1\implies \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t\,.$$

Po ní dostaneme primitivní funkci

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}}=\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1}=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|=\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|.$$

Tedy pro každé $y\in(0,1)$ máme

$$\int_y^1\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}}=\left[\ln\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right]_y^1=\ln\frac{\sqrt2-1}{\sqrt2+1}-\ln\frac{\sqrt{y+1}-1}{\sqrt{y+1}+1}\,.$$

Proto je
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}} = \lim_{y\to 0_+}\left(\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \ln\frac{\sqrt{y+1}-1}{\sqrt{y+1}+1}\right) = +\infty$$
a daný integrál diverguje.

c. V tomto případě jsou nepříjemné dva body $\pm\infty$. Proto budeme tento integrál počítat jako součet
$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x+1)^2 \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x = I_+ + I_-\,,$$
kde $I_\pm$ jsou nevlastní integrály
$$\begin{aligned} I_+ &= \int_0^{+\infty} (x+1)^2\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}(x+1)^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to+\infty}\int_0^y (x+1)^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\,,\\ I_- &= \int_{-\infty}^0 (x+1)^2\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 (x+1)^2\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to-\infty}\int_y^0 (x+1)^2\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x,. \end{aligned}$$
Například integrací per partes zjistíme, že
$$\begin{aligned} \int_0^y (x+1)^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[-\mathrm{e}^{-x}(x^2+4x+5)\Big]_0^y = -\mathrm{e}^{-y}(y^2+4y+5)+5\,,\\ \int_y^0 (x+1)^2\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x &= \Big[\mathrm{e}^{x}(x^2+1)\Big]_y^0 = 1-\mathrm{e}^{y}(y^2+1)\,. \end{aligned}$$
Proto platí
$$I_+ = \lim_{y\to+\infty}\Big(-\mathrm{e}^{-y}(y^2+4y+5)+5\Big) = 5\,,\qquad I_- = \lim_{y\to-\infty}\Big(1-\mathrm{e}^{y}(y^2+1)\Big) = 1$$
a hledaný integrál je
$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x+1)^2\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x = I_+ + I_- = 6\,.$$
d. V integrálu jsou dvě nepříjemné hodnoty $\pm\infty$. Protoje definován jako součet
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = I_+ + I_-\,,$$
kde $I_\pm$ jsou nevlastní integrály
$$I_+ = \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to+\infty}\int_0^y x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\,,\qquad I_- = \int_{-\infty}^0 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to-\infty}\int_y^0 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$
Protože primitivní funkce k funkci $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$ je například $F(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2}$, je
$$I_+ = \lim_{y\to+\infty}\left(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{y^2} - \tfrac{1}{2}\right) = +\infty\,,\qquad I_- = \lim_{y\to-\infty}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{y^2}\right) = -\infty\,.$$
Protože výraz $+\infty - \infty$ není v $\mathbb{R}^*$ definován integrál neexistuje.

Příklad 2.r. Najděte integrály

$$\textbf{a}.\quad \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \textbf{b}.\quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-\sqrt{x}}\,, \qquad \textbf{c}.\quad \int_{-1}^1 \frac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{x^2}}\,, \qquad \textbf{d}.\quad \int_{-1}^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{1-x^2}\,.$$

Řešení.

a. V integrálu je nepříjemný bod $x=0$, což je levý krajní bod intervalu $(0,1)$. Proto je tento nevlastní integrál definován limitou

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to 0_+} \int_y^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Pomocí integrace per partes zjistíme, že

$$\int_y^1 \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \Big[2\sqrt{x}\ln x\Big]_y^1 - 2\int_y^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = -2\sqrt{y}\ln y - \Big[4\sqrt{x}\Big]_y^1 = -2\sqrt{y}\ln y - 4 + 4\sqrt{y}\,.$$

Pomocí l'Hospitalova pravidla pak dostaneme

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to 0_+}\Big(-2\sqrt{y}\ln y - 4 + 4\sqrt{y}\Big) = -4\,.$$

b. V integrálu je nepříjemný pouze bod $x=1$, což je pravý krajní bod intervalu $(0,1)$. Proto je tento nevlastní integrál definovaný pomocí limity

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-\sqrt{x}} = \lim_{y\to 1_-}\int_0^y \frac{\mathrm{d}x}{1-\sqrt{x}}\,.$$

Integrál najdeme například pomocí substituce

$$t=\sqrt{x} \implies x=t^2 \implies \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t\,,$$

která dává

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sqrt{x}} = \int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{1-t} = \int\left(-2+\frac{2}{1-t}\right) = -2t - 2\ln|1-t| = -2\sqrt{x} - 2\ln\big|1-\sqrt{x}\big|\,.$$

Proto je pro každé $y\in(0,1)$

$$\int_0^y \frac{\mathrm{d}x}{1-\sqrt{x}} = \Big[-2\sqrt{x} - 2\ln\big|1-\sqrt{x}\big|\Big]_0^y = -2\sqrt{y} - 2\ln\big(1-\sqrt{y}\big)$$

a integrál

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-\sqrt{x}} = \lim_{y\to 1_-}\Big(-2\sqrt{y} - 2\ln\big(1-\sqrt{y}\big)\Big) = +\infty\,,$$

tj. diverguje.

c. V integrálu je pouze jeden nepříjemný bod $x=0$, který je ale vnitřním bodem intervalu $(-1,1)$. Proto nevlastní integrál definujeme jakou součet

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{x^2}} = I_+ + I_-\,,$$

kde $I_\pm$ jsou nevlastní integrály

$$I_+ = \int_0^1 \frac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{y\to 0_+} \int_y^1 \frac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{x^2}}\,,$$
$$I_- = \int_{-1}^0 \frac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{y\to 0_-} \int_{-1}^y \frac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{x^2}}\,.$$

Protože primitivní funkce k funkci $f(x) = x^{4/3} + x^{1/3} + x^{-2/3}$ je například $F(x) = \frac{3}{7}\,x^{7/3} + \frac{3}{4}\,x^{4/3} + 3x^{1/3}$ jsou nevlastní integrály

$$I_+ = \lim_{y\to 0_+} \Big(\tfrac{3}{7} + \tfrac{4}{3} + 3 - \big(\tfrac{3}{7}\,y^{7/3} + \tfrac{3}{4}\,y^{4/3} + 3y^{1/3}\big)\Big) = \tfrac{3}{7} + \tfrac{4}{3} + 3\,,$$
$$I_- = \lim_{y\to 0_-} \Big(\tfrac{3}{7}\,y^{7/3} + \tfrac{3}{4}\,y^{4/3} + 3y^{1/3} - \big(-\tfrac{3}{7} + \tfrac{4}{3} - 3\big)\Big) = \tfrac{3}{7} - \tfrac{3}{4} + 3$$

a hledaný integrál je

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{x^2}} = I_+ + I_- = \tfrac{6}{7} + 6 = \tfrac{48}{7}\,.$$

d. V integrálu jsou nepříjemné dva body $x = \pm 1$, kter0 jsou krajními body intervalu $(-1,1)$. Proto je tento integrál definován jako součet

$$\int_{-1}^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{1-x^2} = I_+ + I_-\,,$$

kde $I_\pm$ jsou nevlastní integrály

$$I_+ = \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{1-x^2} = \lim_{y\to 1_-} \int_0^y \frac{x\,\mathrm{d}x}{1-x^2}\,,$$
$$I_- = \int_{-1}^0 \frac{x\,\mathrm{d}x}{1-x^2} = \lim_{y\to -1_+} \int_y^0 \frac{x\,\mathrm{d}x}{1-x^2}\,.$$

Protože primitivní funkce k $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ je například $F(x) = -\frac{1}{2}\ln\big|1-x^2\big|$, jsou tyto nevlastní integrály rovny

$$I_+ = \lim_{y\to 1_+} \Big(-\tfrac{1}{2}\ln\big(1-y^2\big)\Big) = +\infty\,, \qquad I_- = \lim_{y\to -1_-} \Big(\tfrac{1}{2}\ln\big(1-y^2\big)\Big) = -\infty\,.$$

A protože jsme dostali nedefinovaný výraz $\infty - \infty$, uvedený integrál neexistuje.

`Poznámka.` Při definici nevlastního integrálu se berou všechny limity na sobě nezávisle. Proto jsme v příkladech **1.r.d.** a **2.r.d.** dostali nedefinované výrazy $\infty - \infty$. Mnohdy se ukazuje výhodné nepovažovat tyto limity za nezávislé, ale definovat je symetricky kolem nepříjemných bodů. Tak se dostavají nevlastní integrály, které se nazývají integrály ve smyslu vlastní hodnoty. Tyto integrály se obvykle značí jako V.P. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.[1]

[1]značka V.P. pochází z francouzského valuer principale

Konkrétně je pro nepříjemný bod $c \in (a, b)$ definováno

$$\text{V.P.} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x \right),$$

pro nepříjenmé krajní body a, b intervalu (a, b) je

$$\text{V.P.} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a pro nepříjemne body $\pm\infty$ definujeme

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to+\infty} \int_{-y}^{y} f(x)]dx\,.$$

Například pro integrál z příkladu **1..r.d.** je

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to+\infty} \int_{-y}^{y} x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to+\infty} \left[\mathrm{e}^{x^2}\right]_{-y}^{y} = 0$$

a pro integrál z příkladu **2.4.d.** je

$$\text{V.P.} \int_{-1}^{1} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1-x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1-x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \left[-\tfrac{1}{2}\ln(1-x^2)\right]_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} = 0\,.$$

Příklad 3.r. Matematickou indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-x} = n!\,. \tag{3}$$

Řešení. Integrál v (3) je nevlastní a jediný nepříjemný bod je $+\infty$. Proto je definován jako

$$\int_0^\infty x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty} \int_0^y x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Pro $n = 1$ je

$$\int_0^y x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^y + \int_0^y \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -y\mathrm{e}^{-y} + \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^y = -\mathrm{e}^{-y}(y+1) + 1\,.$$

Tedy

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-y}(y+1)+1\right) = -\lim_{y\to\infty}\frac{y+1}{\mathrm{e}^y} + 1 = 1\,,$$

a protože $1 = 1!$, platí tvrzení (3) pro $n = 1$.
Předpokládejme, že tvrzení (3) pro $n \in \mathbb{N}$. Pomocí integrace per partes pak dostaneme

$$\int_0^y x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\right]_0^y + (n+1)\int_0^y x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -y^{n+1}\mathrm{e}^{-y} + (n+1)\int_0^y x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Proto je

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{y\to\infty}\left(-y^{n+1}\mathrm{e}^{-y} + (n+1)\int_0^y x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right) = \\ &= -\lim_{y\to\infty}\frac{y^{n+1}}{\mathrm{e}^y} + (n+1)\int_0^\infty x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = (n+1)\cdot n! = (n+1)!\,,\end{aligned}$$

protože podle l'Hospitalova pravidla je pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{y\to\infty} \frac{y^{n+1}}{\mathrm{e}^y} = (n+1) \lim_{y\to\infty} \frac{y^n}{\mathrm{e}^y} = (n+1)n \lim_{y\to\infty} \frac{y^{n-1}}{\mathrm{e}^y} = \ldots = (n+1)! \lim_{y\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^y} = 0$$

a podle indukčního předpokladu $\displaystyle\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x = n!$.

Příklad 4.r. Najděte následující integrály

$$\textbf{a}.\quad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x}(3\cos x - 2\sin x)\, \mathrm{d}x\,, \qquad \textbf{b}.\quad \int_{-\infty}^{\pi} \mathrm{e}^{2x} \cos \tfrac{3}{2}x\, \mathrm{d}x\,,$$

$$\textbf{c}.\quad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\big((x-1)\cos x + 3x\sin x\big)\, \mathrm{d}x\,.$$

Řešení.

a. V nevlastním integrálu máme jediný nepříjemný bod $x = +\infty$. Proto je tento integrál podle definice roven

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x}(3\cos x - 2\sin x)\, \mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty} \int_0^y \mathrm{e}^{-2x}(3\cos x - 2\sin x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Primitivní funkci k funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}(3\cos x - 2\sin x)$ můžeme najít pomocí integrace per partes nebo odhadem, tj. hledat reálná čísla A a B taková, že pro funkci $F(x) = \mathrm{e}^{-2x}(A\cos x + B\sin x)$ platí $F'(x) = f(x)$.
Když zvolíme druhou možnost, bude

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x}(3\cos x - 2\sin x)\, \mathrm{d}x &= \lim_{y\to\infty} \Big[\mathrm{e}^{-2x}(A\cos x + B\sin x)\Big]_0^y = \\ &= \lim_{y\to\infty} \Big(\mathrm{e}^{-2y}(A\cos x + B\sin x)\Big) - A = -A\,,\end{aligned}$$

Protože funkce $\sin y$ a $\cos y$ jsou omezené a $\lim\limits_{y\to\infty} \mathrm{e}^{-y} = 0$.
Rovnost $F'(x) = f(x)$ vede po zkrácení e^{-2x} ke vztahu

$$\begin{aligned}-2A\cos x - 2B\sin x - A\sin x + B\cos x &= (-2A + B)\cos x + (-A - 2B)\sin x = \\ &= 3\cos x - 2\sin x\,,\end{aligned}$$

neboli k soustavě lineárních rovnic

$$-2A + B = 3\,, \quad -A - 2B = -2 \quad \text{tj.} \quad A = -\tfrac{4}{5}\,, \quad B = \tfrac{7}{5}\,.$$

Tedy hledaný integrál je

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x}(3\cos x - 2\sin x)\, \mathrm{d}x = -A = \tfrac{4}{5}\,.$$

b. V nevlastním integrálu máme jediný nepříjemný bod $x = -\infty$. Proto je tento integrál podle definice roven

$$\int_{-\infty}^{\pi} \mathrm{e}^{2x} \cos \tfrac{3}{2}x\, \mathrm{d}x = \lim_{y\to-\infty} \int_y^{\pi} \mathrm{e}^{2x} \cos \tfrac{3}{2}x\, \mathrm{d}x\,.$$

Primitivní funkci k funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x} \cos \frac{3}{2}x$ můžeme najít pomocí integrace per partes nebo odhadem. Zvolíme metodu integrace per partes a během výpočtu budeme používat limity

$$\lim_{y\to-\infty} \mathrm{e}^{2y} \cos \tfrac{3}{2}y = \lim_{y\to-\infty} \mathrm{e}^{2y} \sin \tfrac{3}{2}y = 0\,.$$

Pak dostaneme

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\pi} \mathrm{e}^{2x} \cos \tfrac{3}{2}x \,\mathrm{d}x &= \lim_{y\to-\infty} \Big[\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} \cos \tfrac{3}{2}x\Big]_y^{\pi} + \frac{3}{4} \int_{-\infty}^{\pi} \mathrm{e}^{2x} \sin \tfrac{3}{2}x \,\mathrm{d}x = \\
&= \lim_{y\to-\infty} \Big(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2\pi} \cos \tfrac{3}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2y} \cos \tfrac{3}{2}y\Big) + \tfrac{3}{4} \int_{-\infty}^{\pi} \mathrm{e}^{2x} \sin \tfrac{3}{2}x \,\mathrm{d}x = \\
&= \tfrac{3}{4} \left(\lim_{y\to-\infty} \Big[\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} \sin \tfrac{3}{2}x\Big]_y^{\pi} - \tfrac{3}{4} \int_{-\infty}^{\pi} \mathrm{e}^{2x} \cos \tfrac{3}{2}x \,\mathrm{d}x \right) = \\
&= -\tfrac{3}{8}\,\mathrm{e}^{2\pi} - \tfrac{9}{16} \int_{-\infty}^{\pi} \mathrm{e}^{2x} \cos \tfrac{3}{2}x \,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

To je rovnice pro hledaný integrál, ze které plyne

$$\tfrac{25}{16} \int_{-\infty}^{\pi} \mathrm{e}^{2x} \cos \tfrac{3}{2}x \,\mathrm{d}x = -\tfrac{3}{8}\,\mathrm{e}^{2\pi}\,, \quad \text{neboli} \quad \int_{-\infty}^{\pi} \mathrm{e}^{2x} \cos \tfrac{3}{2}x \,\mathrm{d}x = -\tfrac{6}{25}\,\mathrm{e}^{2\pi}\,.$$

c. V integrálu je jediný nepříjemný bod $x = +\infty$. Podle definice proto je

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\big((x-1)\cos x + 3x \sin x\big) \,\mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty} \int_0^{y} \mathrm{e}^{-x}\big((x-1)\cos x + 3x \sin x\big) \,\mathrm{d}x\,.$$

Primitivní funkci k $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\big((x-1)\cos x + 3x\sin x\big)$ je jednodušší najít odhadem, tj. ve tvaru

$$F(x) = \mathrm{e}^{-x}\big((Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x\big)\,,$$

kde A, B, C a D jsou reálná čísla taková, že $F'(x) = f(x)$. Hledaný nevlastní integrál pak je

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\big((x-1)\cos x + 3x\sin x\big)\,\mathrm{d}x &= \lim_{y\to\infty} \Big[\mathrm{e}^{-x}\big((Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x\big)\Big]_0^y = \\
&= \lim_{y\to\infty} \Big(\mathrm{e}^{-y}\big((Ay+B)\cos y + (Cy+D)\sin y\big) - B\Big) = -B\,.
\end{aligned}$$

Rovnice $F'(x) = f(x)$ dává po zkrácení e^{-x} vztah

$$\begin{aligned}
&-(Ax+B)\cos x + A\cos x - (Ax+B)\sin x - \\
&\qquad\qquad -(Cx+D)\sin x + C\sin x + (Cx+D)\cos x = \\
&= \Big((-A+C)x + A - B + D\Big)\cos x + \Big((-A-C)x + C - B - D\Big)\sin x = \\
&= (x-1)\cos x - 3x\sin x\,,
\end{aligned}$$

ze kterého plyne soustava rovnic

$$-A + C = 1\,, \quad -A - C = -3\,, \qquad A - B + D = -1\,, \quad C - B - D = 0\,,$$

která má řešení $A = 1$, $C = 2$, $B = 2$ a $D = 0$. Tedy primitivní funkce je

$$F(x) = \mathrm{e}^{-x}\Big((x+2)\cos x + 2x\sin x\Big)$$

a pro hledaný integrál dostaneme

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\big((x-1)\cos x + 3x\sin x\big)\,\mathrm{d}x = -B = -2\,.$$

Příklad 5.r. Najděte integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{1-\sqrt{1-x}-x}$.

Řešení. Protože integrovaná funkce $f(x) = \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}-x}$ není na intervalu $(0,1)$ omezená pouze[2] v okolí bodu $x = 1$. Proto je tento nevlastní integrál definován jako

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{1-\sqrt{1-x}-x} = \lim_{y\to 1_-}\int_0^y \frac{x\,\mathrm{d}x}{1-\sqrt{1-x}-x}\,.$$

Primitivní funkci můžeme najít například substitucí

$$t = \sqrt{1-x}\,,\quad \text{tj.}\quad x = 1-t^2 \implies \mathrm{d}x = -2t\,\mathrm{d}t\,.$$

Po ní dostaneme

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1-\sqrt{1-x}-x} = \int \frac{(1-t^2)(-2t\,\mathrm{d}t)}{1-t-(1-t^2)} = \int 2(t+1)\,\mathrm{d}t = (t+1)^2 = \big(\sqrt{1-x}+1\big)^2.$$

Tedy

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{1-\sqrt{1-x}-x} = \lim_{y\to 1_-}\Big[\big(\sqrt{1-x}+1\big)^2\Big]_0^y = \lim_{y\to 1_-}\big(\sqrt{1-y}+1\big)^2 - 4 = -3\,.$$

Příklad 6.r. Najděte integrály

a. $\displaystyle\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, **b.** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{3-2x}{x^3}\,\mathrm{e}^{2/x}\,\mathrm{d}x$,

c. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{3-2x}{x^3}\,\mathrm{e}^{2/x}\,\mathrm{d}x$, **d.** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(\ln x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení.

a. V integrálu je jediný nepříjemný bod $x = +\infty$. Proto je tento nevlastní integrál definován limitou

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty}\int_0^y x\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Abychom našli poslední integrál, použijeme nejprve substituci

$$t = \sqrt{x}\,,\quad \text{tj.}\quad x = t^2 \implies \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t\,,\qquad 0\mapsto 0\,,\quad y\mapsto\sqrt{y}\,.$$

[2] v okolí bodu $x = 0$ je omezená, protože $\lim_{x\to 0_+} f(x) = -2$.

Po ní dostaneme

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty}\int_0^{\sqrt{y}} 2t^3\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty t^3\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Tento integrál lze samozřejmě počítat jako obvykle. Ale z příkladu **3.r.** víme, že pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí vztah (3). Proto je

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty t^3\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2\cdot 3! = 12\,.$$

b. V intervalu $(1,\infty)$ je jediný nepříjemný bod $x=+\infty$. Proto je tento nevlastní integrál definován limitou

$$\int_1^\infty \frac{3-2x}{x^3}\,\mathrm{e}^{2/x}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty}\int_1^y \frac{3-2x}{x^3}\,\mathrm{e}^{2/x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Zdá se, že v posledním integrálu je výhodná substituce

$$t=\frac{1}{x}\,,\quad \text{tj.}\quad x=\frac{1}{t} \implies \mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\,,\qquad 1\mapsto 1\,,\quad y\mapsto\frac{1}{y}\,.$$

Po ní získáme integrál

$$\int_1^y \frac{3-2x}{x^3}\,\mathrm{e}^{2/x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{1/y}\left(3-\frac{2}{t}\right)t^3\mathrm{e}^{2t}\left(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right) = \int_1^{1/y}(2-3t)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \int_{1/y}^1(3t-2)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t\,.$$

A protože $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{1}{y}=0$, je

$$\int_1^\infty \frac{3-2x}{x^3}\,\mathrm{e}^{2/x}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty}\int_{1/y}^1(3t-2)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1(3t-2)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t\,,$$

kde poslední integrál je již vlastní Riemannův integrál. Ten můžeme najít buď integrací per partes nebo metodou odhadu a dostaneme

$$\int_1^\infty \frac{3-2x}{x^3}\,\mathrm{e}^{2/x}\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{2t}\left(\tfrac{3}{2}t-\tfrac{7}{4}\right)\right]_0^1 = \tfrac{1}{4}\left(7-\mathrm{e}^2\right).$$

c. V integrálu je nepříjemný pouze bod $x=0$, který je pravým krajním bodem intervalu $(-1,0)$. Proto je podle definice

$$\int_{-1}^0 \frac{3-2x}{x^3}\,\mathrm{e}^{2/x}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to 0_-}\int_{-1}^y \frac{3-2x}{x^3}\,\mathrm{e}^{2/x}\,\mathrm{d}x\,.$$

V posledním integrálu je opět výhodná substituce

$$t=\frac{1}{x}\,,\quad \text{tj.}\quad x=\frac{1}{t} \implies \mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\,,\qquad -1\mapsto -1\,,\quad y\mapsto\frac{1}{y}\,.$$

Podobně jako dříve dává tato substituce integrál

$$\int_{-1}^y \frac{3-2x}{x^3}\,\mathrm{e}^{2/x}\,\mathrm{d}x = \int_{1/y}^{-1}(3t-2)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Nyní je ale $\lim\limits_{y\to 0_-} \frac{1}{y} = -\infty$, a tedy původní integrál je roven nevslatnímu integrálu

$$\int_{-1}^{y} \frac{3-2x}{x^3}\, \mathrm{e}^{2/x}\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-1} (3t-2)\mathrm{e}^{2t}\, \mathrm{d}t = \lim_{y\to-\infty} \int_{y}^{-1} (3t-2)\mathrm{e}^{2t}\, \mathrm{d}t =$$
$$= \lim_{y\to-\infty} \Big[\mathrm{e}^{2t}\big(\tfrac{3}{2}t - \tfrac{7}{4}\big)\Big]_{y}^{-1} = -\tfrac{13}{4}\, \mathrm{e}^{-2}.$$

d. V intergálu je jediný nepříjemné bod $x = +\infty$. Proto je podle definice

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\sin(\ln x)}{x^2}\, \mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty} \int_{1}^{y} \frac{\sin(\ln x)}{x^2}\, \mathrm{d}x\,.$$

V posledním integrálu se můžeme pokusit použít substituci

$$t = \ln x\,, \quad \text{tj.} \quad x = \mathrm{e}^t \implies \mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t\,, \qquad 1 \mapsto 0\,, \quad y \mapsto \ln y\,.$$

Po ní získáme integrál

$$\int_{1}^{y} \frac{\sin(\ln x)}{x^2}\, \mathrm{d}x = \int_{0}^{\ln y} \mathrm{e}^{-t} \sin t\, \mathrm{d}t\,.$$

Protože $\lim\limits_{y\to\infty} \ln y = \infty$, je

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\sin(\ln x)}{x^2}\, \mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin t\, \mathrm{d}t = \lim_{y\to\infty} \int_{0}^{y} \mathrm{e}^{-t} \sin t\, \mathrm{d}t\,.$$

Primitivní funkci $F(t)$ k funkci $f(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin t$ můžeme najít integrací per partes nebo metodou odhadu, tj. hledat reálná čísla A a B taková, aby pro funkci $F(t) = \mathrm{e}^{-t}(A\cos t + B\sin t)$ platilo $F'(t) = f(t)$. Tento vztah dá po zkrácení e^{-t} rovnost

$$-A\cos t - B\sin t - A\sin t + B\cos t = (-A+B)\cos t + (-A-B)\sin t = \sin t\,.$$

Tedy čísla A a B musí splňovat soustavu dvou lineárních rovnic

$$-A + B = 0\,, \quad -A - B = 1 \implies A = B = -\tfrac{1}{2}\,.$$

Pro hledaný integrál pak dostaneme

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\sin(\ln x)}{x^2}\, \mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty} \Big[-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}(\cos t + \sin t)\Big]_{0}^{y} = \tfrac{1}{2}\,.$$

Příklad 7.r. Najděte integrály

a. $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{2\,\mathrm{d}x}{4x^2 - 8x + 3}\,,$ **b.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{(x-3)\,\mathrm{d}x}{x^3 - 2x^2 + x}\,,$

c. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 4x + 7}\,,$ **d.** $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{(x-7)\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2 - 2x + 5)}\,.$

Řešení.

a. V intervalu $(2,\infty)$ je jediný nepříjemný bod $x=+\infty$. Podle definice je tedy

$$\int_2^\infty \frac{2\,\mathrm{d}x}{4x^2-8x+3} = \lim_{y\to\infty} \int_2^y \frac{2\,\mathrm{d}x}{4x^2-8x+3}\,.$$

Primitivní funkci spočítáme pomocí rozkladu na parciální zlomky. Protože $4x^2-8x+3 = (2x-3)(2x-1)$, je tento rozklad

$$\frac{2}{4x^2-8x+3} = \frac{2}{(2x-3)(2x-1)} = \frac{A}{2x-3} + \frac{B}{2x-1}\,,$$

kde A a B jsou reálná čísla. Pokud násobíme tento vztah výrazem $(2x-3)(2x-1)$ dostaneme

$$2 = A(2x-1)+B(2x-3) = (2A+2B)x+(-A-3B) \quad \text{tj.} \quad 2A+2B=0\,, \quad -A-3B=2\,.$$

Protože tato soustava má řešení $A=1$ a $B=-1$, je

$$\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{4x^2-8x+3} = \int \left(\frac{1}{2x-3} - \frac{1}{2x-1}\right)\mathrm{d}x = \tfrac12 \ln|2x-3| - \tfrac12 \ln|2x-1| = \tfrac12 \ln\left|\frac{2x-3}{2x-1}\right|.$$

Daný integrál tedy je

$$\int_2^\infty \frac{2\,\mathrm{d}x}{4x^2-8x+3} = \lim_{y\to\infty}\left[\tfrac12 \ln\left|\frac{2x-3}{2x-1}\right|\right]_2^y = \tfrac12 \lim_{y\to\infty} \ln\left|\frac{2y-3}{2y-1}\right| - \tfrac12 \ln\tfrac13 = \tfrac12\,\ln 3\,.$$

b. V intervalu $(-\infty,-1)$ je jediný nepříjemný bod $x=-\infty$. Proto je podle definice

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{(x-3)\,\mathrm{d}x}{x^3-2x^2+x} = \lim_{y\to-\infty} \int_y^{-1} \frac{(x-3)\,\mathrm{d}x}{x^3-2x^2+x}\,.$$

Poslední integrál najdeme pomocí rozkladu na parciální zlomky. Protože $x^3-2x^2+x = x(x-1)^2$, je má tento rozklad tvar

$$\frac{x-3}{x^3-2x^2-x} = \frac{x-3}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}\,,$$

kde A, B a C jsou reálná čísla. Po vynásobení tohoto vztahu výrazem $x(x-1)^2$ dostaneme

$$x-3 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx = (A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A\,.$$

Tedy čísla A, B a C jsou řešením soustavy lineárních rovnic

$$A+B=0\,, \quad -2A-B+C=1\,, \quad A=-3 \implies A=-3\,, \quad B=3\,, \quad C=-2\,.$$

Tedy

$$\int \frac{(x-3)\,\mathrm{d}x}{x^3-2x^2+x} = \int\left(-\frac{3}{x} + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= -3\ln|x| + 3\ln|x-1| + \frac{2}{x-1} = 3\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \frac{2}{x-1}$$

a hledaný integrál je

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{(x-3)\,\mathrm{d}x}{x^3-2x^2+x} = \lim_{y\to-\infty} \left[3\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \frac{2}{x-1}\right]_y^{-1} = 3\ln 2 - 1\,.$$

c. V intervalu $(-\infty,\infty)$ máme dva nepříjemné body $x=\pm\infty$. Proto interval rozdělíme na dva intervaly $(-\infty,x_0)$ a (x_0,∞), kde x_0 je libovolné reálné číslo. Zvolíme $x_0=0$ (i když by asi bylo lepší $x_0=2$). Uvedený integrál je pak

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+7} = I_- + I_+\,,$$

kde

$$\begin{aligned} I_- &= \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+7} = \lim_{y\to-\infty} \int_y^0 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+7}\,,\\ I_+ &= \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+7} = \lim_{y\to\infty} \int_0^y \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+7}\,. \end{aligned}$$

Protože

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+7} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-2}{\sqrt{3}}$$

a $\mathrm{arctg}\,x$ je lichá funkce, dostaneme

$$\begin{aligned} I_- &= \lim_{y\to-\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right]_y^0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\pi}{2}\,,\\ I_+ &= \lim_{y\to\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right]_0^y = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\,. \end{aligned}$$

Tedy uvedený integrál je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+7} = I_- + I_+ = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

d. V intervalu $(0,\infty)$ je pouze jeden nepříjemný bod $x=\infty$. Proto je uvedený nevlastní integrál definován jako limita

$$\int_0^{\infty} \frac{(x-7)\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2-2x+5)} = \lim_{y\to\infty} \int_0^y \frac{(x-7)\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2-2x+5)}\,.$$

Poslední integrál najdeme pomocí rozkladu na parciální zlomky. Protože kvadratický polynom x^2-2x+5 nemá reálné kořeny, je tento rozklad

$$\frac{x-7}{(x+1)(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5}\,,$$

kde A, B a C jsou reálná čísla. Po vynásobení tohoto vztahu výrazem $(x+1)(x^2-2x+5)$ dostaneme rovnost

$$x-7 = A(x^2-2x+5) + (Bx+C)(x+1) = (A+B)x^2 + (-2A+B+C)x + (5A+C)\,.$$

Pro $x = -1$ dostaneme $A = -1$. Z rovnic $A + B = 0$ a $5A + C = -7$ pak plyne $B = 1$ a $C = -2$. Tedy platí

$$\int \frac{(x-7)\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2-2x+5)} = \int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{x-2}{x^2-2x+5}\right) \mathrm{d}x = -\ln|x+1| + I\,,$$

kde I je integrál

$$I = \int \frac{(x-2)\,\mathrm{d}x}{x^2-2x+5}\,.$$

Tento integrál najdeme jako součet dvou integrálů. Protože $(x^2 - 2x + 5)' = 2x - 2$ a $x - 2 = \frac{1}{2}(2x-2) - 1$, je

$$I = \tfrac{1}{2} \int \frac{(2x-2)\,\mathrm{d}x}{x^2-2x+5} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+5}\,.$$

První integrál lze najít pomocí substituce $t = x^2 - 2x + 5$ a ve druhém integrálu použijeme rovnost $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$. Pak je

$$I = \tfrac{1}{2} \ln y - \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2+4} = \ln\sqrt{x^2-2x+5} - \tfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2}\,.$$

Z toho plyne, že

$$\begin{aligned}\int \frac{(x-7)\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2-2x+5)} &= -\ln|x+1| + \ln\sqrt{x^2-2x+5} - \tfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} = \\ &= \ln \frac{\sqrt{x^2-2x+5}}{|x+1|} - \tfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2}\end{aligned}$$

a daný nevlastní integrál je

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{(x-7)\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2-2x+5)} &= \lim_{y\to\infty} \left[\ln \frac{\sqrt{x^2-2x+5}}{|x+1|} - \tfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2}\right]_0^y = \\ &= \lim_{y\to\infty} \left(\ln \frac{\sqrt{y^2-2y+5}}{y+1} - \tfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{y-1}{2}\right) - \left(\ln\sqrt{5} - \tfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \tfrac{-1}{2}\right) = \\ &= -\tfrac{1}{4}\left(\pi + 2\ln 5 + 2 \operatorname{arctg} \tfrac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Příklad 8.r. Najděte integrály

$$\textbf{a.} \quad \int_1^\infty \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{(x+1)^2}\,, \qquad\qquad \textbf{b.} \quad \int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení.

a. V integrálu je pouze jeden nepříjemný bod $x = \infty$. Proto je podle definice

$$\int_1^\infty \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \lim_{y\to\infty} \int_1^y \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{(x+1)^2}\,.$$

Abychom našli poslední integrál, použijeme metodu integrace per partes. Vezmeme

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}\,, \quad g(x) = \ln x \implies f(x) = -\frac{1}{x+1}\,, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

a dostaneme

$$\int \frac{\ln x \, \mathrm{d}x}{(x+1)^2} = -\frac{\ln x}{x+1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}\,.$$

Poslední integrál najdeme pomocí rozkladu na parciální zlomky. Protože

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,,$$

je

$$\int \frac{\ln x \, \mathrm{d}x}{(x+1)^2} = -\frac{\ln x}{x+1} + \ln x - \ln(x+1) = -\frac{\ln x}{x+1} + \ln\frac{x}{x+1}$$

a daný nevlastní integrál

$$\int_1^\infty \frac{\ln x \, \mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \lim_{y\to\infty}\left[-\frac{\ln x}{x+1} + \ln\frac{x}{x+1}\right]_1^y = \lim_{y\to\infty}\left(-\frac{\ln y}{y+1} + \ln\frac{y}{y+1}\right) - \ln\tfrac{1}{2} = \ln 2\,.$$

b. V integrálu je jediný nepříjemný bod $x = \infty$. Proto je podle definice

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty}\int_1^y \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Abychom našli tento integrál, použijeme nejprve metodu integrace per partes, ve které položíme

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\,, \quad g(x) = \operatorname{arctg} x \implies f(x) = -\frac{1}{x}\,, \quad g'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

To nám dává

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}\,.$$

Poslední integrál najdeme pomocí rozkladu na parciální zlomky. Protože kvadratický polynom x^2+1 nemá reálné kořeny, má tento rozklad tvar

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\,.$$

Tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) = \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$$

a celý integrál je

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Pro hledaný nevlastní integrál pak dostaneme

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty}\left[-\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\right]_1^y =$$

$$= \lim_{y\to\infty}\left(-\frac{\operatorname{arctg} y}{y} + \ln\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\right) - \left(-\operatorname{arctg} 1 + \ln\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{1}{4}\,\pi + \tfrac{1}{2}\ln 2\,.$$

Příklad 9.r. Pro jaká $p > 0$ konverguje integrál

$$\textbf{a}.\quad \int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}\,,\qquad \textbf{b}.\quad \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p}\,,\qquad \textbf{c}.\quad \int_{\mathrm{e}}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}\,,\qquad \textbf{d}.\quad \int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{\ln^p x}\,.$$

Řešení.

a. Máme zjistit, pro která $p > 0$ existuje konečná limita $\lim\limits_{y\to\infty}\int_1^y \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$. Protože

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \int x^{-p}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{x^{1-p}}{1-p} & \text{pro} \quad p\neq 1\,,\\ \ln|x| & \text{pro} \quad p = 1\,,\end{cases}$$

jedná se pro $p = 1$ o limitu

$$\lim_{y\to\infty}\Big[\ln x\Big]_1^{\infty} = \lim_{y\to\infty}(\ln y) = \infty$$

a pro $p \neq 1$ o limitu

$$\lim_{y\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{1-p}\,\lim_{y\to\infty} y^{1-p} - \frac{1}{1-p} = \begin{cases}\infty & \text{pro} \quad p<1\,,\\ \frac{1}{p-1} & \text{pro} \quad p>1\,.\end{cases}$$

Tedy integrál $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ konverguje pro $p > 1$ a diverguje pro $p \leq 1$.

b. Máme zjistit, pro která $p > 0$ existuje konečná limita $\lim\limits_{y\to 0_+}\int_y^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$. Protože

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \int x^{-p}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{x^{1-p}}{1-p} & \text{pro} \quad p\neq 1\,,\\ \ln|x| & \text{pro} \quad p = 1\,,\end{cases}$$

jedná je pro $p = 1$ o limitu

$$\lim_{y\to 0_+}\Big[\ln x\Big]_y^1 = \lim_{y\to 0_+}(-\ln y) = \infty$$

a pro $p \neq 1$ o limitu

$$\lim_{y\to 0_+}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_y^1 = \frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p}\,\lim_{y\to 0_+} y^{1-p} = \begin{cases}\frac{1}{1-p} & \text{pro} \quad p<1\,,\\ \infty & \text{pro} \quad p>1\,.\end{cases}$$

Tedy integrál $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ konverguje pro $p < 1$ a diverguje pro $p \geq 1$.

c. Máme zjistit, pro která $p > 0$ existuje konečná limita $\lim\limits_{y\to\infty} \int_{\mathrm{e}}^{y} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln^p x}$. Když v tomto integrálu uděláme substituci

$$t = \ln x \implies \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x}\,, \qquad \mathrm{e} \mapsto 1\,, \quad y \mapsto \ln y\,,$$

dostaneme integrál

$$\int_{\mathrm{e}}^{y} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln^p x} = \int_1^{\ln y} \frac{\mathrm{d}t}{t^p}\,.$$

A protože $\lim\limits_{y\to\infty} \ln y = \infty$, je

$$\int_{\mathrm{e}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln^p x} = \lim_{y\to\infty} \int_1^{\ln y} \frac{\mathrm{d}t}{t^p} = \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^p}\,.$$

Podle výsledků příkladu **a.**, konverguje tento integrál pro $p > 1$ a diverguje pro $p \leq 1$.

d. Máme zjistit, pro která $p > 0$ existuje konečná limita $\lim\limits_{y\to 1_+} \int_{y}^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{\ln^p x}$. Když v tomto integrálu uděláme substituci

$$t = \ln x\,, \quad \text{tj.} \quad x = \mathrm{e}^t \implies \mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\,, \qquad y \mapsto \ln y\,, \quad \mathrm{e} \mapsto 1\,,$$

dostaneme integrál

$$\int_{y}^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{\ln^p x} = \int_{\ln y}^{1} \frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{t^p}\,.$$

A protože $\lim\limits_{y\to 1_+} \ln y = 0$, platí rovnost

$$\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{\ln^p x} = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{t^p}\,.$$

Pro $t \in \langle 0, 1\rangle$ platí nerovnosti $1 \leq \mathrm{e}^t \leq \mathrm{e}$. Proto je pro $t \in \langle 0, 1\rangle$

$$\frac{1}{t^p} \leq \frac{\mathrm{e}^t}{t^p} \leq \frac{\mathrm{e}}{t^p}\,.$$

A protože podle výsledků příkladu **b.** integrál $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^p}$ konverguje pro $p < 1$ a diverguje pro $p \geq 1$, konverguje podle srovnávacího kritéria uvedený integrál pro $p < 1$ a diverguje pro $p \geq 1$.

Příklad 10.r. Ukažte, že pro $p > 1$ integrál $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ absolutně konverguje.

Řešení. Protože zkoumáme absolutní konvergenci integrálu, zajímá nás, zda pro $p > 1$ konverguje integrál $\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}\,\mathrm{d}x$. Protože $|\sin x| \leq 1$, platí nerovnost $\frac{|\sin x|}{x^p} \leq \frac{1}{x^p}$.

A protože podle výsledku příkladu **9.r.a.** integrál $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ pro $p > 1$ konverguje, konverguje podle srovnávacího kritéria také integrál $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^p}\,\mathrm{d}x$, a tedy uvedený integrál konverguje absolutně.

Příklad 11.r. Rozhodněte, zda následující integrály konvergují nebo deivergují:

a. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$, **b.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{\sqrt{x^3+2x+3}}\,\mathrm{d}x$,

c. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$, **d.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x)(2-x-x^2)}}$,

e. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{(x-1)(x^2+x+2)}}$, **f.** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{(x-1)(x^2+x-2)}}$,

g. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x(x+1)}}\,\mathrm{d}x$, **h.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$,

k. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$, **l.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^4+1}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení.

a. V integrálu je jediný nepříjemný bod $x=\infty$. Proto nás bude zajímat, jak se chová funkce $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$ v okolí bodu nekonečna, tj. pro velká x. Pro velká x je

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}=\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^{-2}+x^{-4}}}\sim g(x)=\frac{1}{x^2}\,,\quad \text{tj.}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1\,.$$

Tedy uvedený integrál konverguje právě tehdy, když konverguje integrál $\int_A^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$, kde A je dostatečně velké reálné číslo. A protože tento integrál konverguje, viz příklad **9.r.a.**, kde $p=2$, konverguje také původní integrál.

b. Protože pro $x>0$ je $x^3+2x+3>0$, je v integrálu jediný nepříjemný bod $x=\infty$. Proto nás bude zajímat, jak se chová funkce $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{\sqrt{x^3+2x+3}}$ v okolí bodu nekonečna, tj. pro velká x. Protože pro velká x je

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{\sqrt{x^3+2x+3}}=\frac{x^{2/3}\sqrt[3]{1+x^{-1}+x^{-2}}}{x^{3/2}\sqrt{1+2x^{-1}+3x^{-2}}}\sim g(x)=\frac{x^{2/3}}{x^{3/2}}=\frac{1}{x^{5/6}}$$

a integrál $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ pro $p=\frac{5}{6}$ diverguje, viz příklad **9.r.a.**, diverguje také původní integrál.

c. Protože $\lim_{x\to1_-}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}=\infty$, není funkce $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ omezená v levém okolí bodu $x=1$. Protože pro funkci $f(x)$ platí

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}\sim g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,,\quad \text{tj.}\quad \lim_{x\to1_-}\frac{f(x)}{g(x)}=1\,,$$

konverguje uvedený integrál právě tehdy, když konverguje integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$. A protože tento integrál konverguje, konverguje také náš integrál.

d. Protože $(x-1)(2-x-x^2) = (1-x)^2(2+x)$ není integrovaná funkce na intervalu $(0,1)$ omezená v levém okolí bodu $x=1$. Proto budeme zkoumat její chování v tomto okolí. Ze vztahu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(2-x-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2(2+x)}} =$$
$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2+x}} \sim g(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{tj.} \quad \lim_{x\to 1_-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,,$$

konvegruje náš integrál právě tehdy, když konverguje integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-x}$. A protože tento integrál diveruje, diverguje také původní integrál.

e. V integrálu jsou nepříjemné pouze dva body $x=1$ a $x=\infty$. Proto rozdělíme interval $(1,\infty)$ na dva interevaly, například intervaly $(1,2)$ a $(2,\infty)$, napíšeme

$$\int_1^\infty \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{(x-1)(x^2+x+2)}} = I_1 + I_2\,,$$

kde

$$I_1 = \int_1^2 \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{(x-1)(x^2+x+2)}}\,, \qquad I_2 = \int_2^\infty \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{(x-1)(x^2+x+2)}}$$

a budeme zkoumat konvergenci integrálů I_1 a I_2.
V integrálu I_1 je již jediný nepříjemný bod $x=1$. V jeho pravém okolí je

$$f(x) = \frac{(x+1)}{x\sqrt{(x-1)(x^2+x+2)}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{(x+1)}{x\sqrt{x^2+x+2}} \sim g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,.$$

A protože integrál $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$ konverguje, konverguje také integrál I_1.
Při studiu konvergence integrálu I_2 nás bude zajímat chování funkce $f(x)$ v okolí bodu ∞, tj. pro velké hodnoty x. Funkce $f(x)$ se tam chová jako

$$f(x) = \frac{x(1+x^{-1})}{x^{5/2}\sqrt{(1-x^{-1})(1+x^{-1}+2x^{-2})}} \sim g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}\,.$$

A protože integrál $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}}$ konverguje, konverguje také integrál I_2.
Protože konvergují oba integrály I_1 i I_2, konverguje rovněž daný nevlastní integrál.

f. Stejně jako v příkladě **e.** jsou v integrálu nepříjemné pouze dva body $x=1$ a $x=\infty$. Proto rozdělíme interval $(1,\infty)$ na dva interevaly, například intervaly $(1,2)$ a $(2,\infty)$, napíšeme

$$\int_1^\infty \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{(x-1)(x^2+x-2)}} = I_1 + I_2\,,$$

kde

$$I_1 = \int_1^2 \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{(x-1)(x^2+x-2)}}\,, \qquad I_2 = \int_2^\infty \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{(x-1)(x^2+x-2)}}$$

a budeme zkoumat konvergenci integrálů I_1 a I_2.
V okolí bodu $x = \infty$, tj. pro velká x, se funkce $f(x)$ chová stejně jako v předcházejícím příkladu, tj. $f(x) \sim x^{-3/2}$. Proto integrál I_2 konverguje.
Ale v pravém okolí bodu $x = 1$ je chování funkce $f(x)$ jiné. Tam totiž je

$$f(x) = \frac{x+1}{x\sqrt{(x-1)(x^2+x-2)}} = \frac{x+1}{x\sqrt{(x-1)^2(x+2)}} = \frac{1}{x-1}\cdot\frac{x+1}{x\sqrt{x+2}} \sim \frac{1}{x-1}\,.$$

A protože integrál $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$ diverguje, diverguje také integrál I_1, a tedy i původní nevlastní integrál.

g. Protože $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x(x+1)}} = 0$, je integrovaná funkce v okolí bodu $x = 0$ omezená. Proto je v integrálu jediný nepříjemný bod $x = \infty$. Protože $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \tfrac{1}{2}\,\pi$ je pro okolí bodu ∞, tj. pro velká x

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x(x+1)}} = \frac{1}{x}\cdot\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^{-1}}} \sim \frac{1}{x}\,.$$

A protože integrál $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverguje, diverguje také daný integrál.

h. V integrálu jsou nepříjemné dva body $x = 0$ a $x = \infty$. Proto rozdělíme tento nevlastní integrál na dva integrály, tj. napíšeme jej jako součet

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2\,,$$

kde

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x\,, \qquad I_2 = \int_1^\infty \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x\,,$$

a budeme zkoumat konvergenci obou těchto integrálů.
Při zkoumání konvergence integrálu I_2 nás zajímá chování funkce $f(x)$ pro velká x. Protože je $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \tfrac{1}{2}\,\pi$, je pro velká x

$$f(x) = \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^{-1}} \sim g(x) = \frac{1}{x^2}\,,$$

protože je $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\,\pi}$. A protože integrál $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ konverguje, konverguje také integrál I_2.
Při vyšetřování konvergence integrálu I_1 si musíme uvědomit, že v pravém okolí bodu $x = 0$ se integrovaná funkce $f(x)$ nechová jako funkce $g(x) = \dfrac{1}{x}$, protože

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0_+} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{x+1} = 0\,.$$

To je důsledek toho, že $\operatorname{arctg} 0 = 0$. Abychom zjistili chování funkce $\operatorname{arctg} x$ v okolí dobu $x = 0$, můžeme ji nahradit Taylorovým polynomem stupně jedna. Pak pro malá $|x|$ dostaneme $\operatorname{arctg} x \sim x$, což v podstatě znamená, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1\,.$$

Proto můžeme psát

$$f(x) = \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{x(x+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x} \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{arctg} x}{x}}\,\frac{1}{x+1} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

A protože integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ konverguje, konverguje také integrál I_2, a tedy i náš původní nevlastní integrál.

k. V integrálu je jediný nepříjemný bod $x = \infty$. Pro velká x je

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln x}{x^{2/3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^{-2}}} \sim g(x) = \frac{\ln x}{x^{2/3}}\,.$$

Protože pro $x > \mathrm{e}$ je $\ln x > 1$, platí pro tato x nerovnost

$$\frac{\ln x}{x^{2/3}} > \frac{1}{x^{2/3}}\,.$$

A protože $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{2/3}}$ diverguje, diverguje také daný nevlastní integrál.

l. V integrálu máme dva nepříjemné body $x = 0$ a $x = \infty$. Proto napíšeme integrál jako součet dvou integrálů

$$\int_0^\infty \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4+1}} = I_1 + I_2\,,$$

kde například

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4+1}}\,, \qquad I_2 = \int_1^\infty \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4+1}}\,,$$

a budeme zkoumat jejich konvergenci.

V integrálu I_1 je nepříjemný bod $x = 0$. V jeho pravém okolí je

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^4+1}} = \ln x \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}} \sim \ln x\,.$$

A protože integrál $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ konverguje, konverguje také integrál I_1.

V integrálu I_2 je nepříjemný bod $x = \infty$. V okolí tohoto bodu, tj. pro velká x, je

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^4+1}} = \frac{\ln x}{x^{4/3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^{-4}}} \sim g(x) = \frac{\ln x}{x^{4/3}}\,.$$

Proto integrál I_2 konverguje právě tehdy, když konvergje integrál $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^{4/3}}\,\mathrm{d}x$. Pomocí l'Hospitalova pravidla lze ukázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0\,.$$

Proto pro každé $\varepsilon > 0$ a dostatečně velká x platí nerovnost $\ln x < x^{\varepsilon}$. Tedy pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$0 < \frac{\ln x}{x^{4/3}} < \frac{x^{\varepsilon}}{x^{4/3}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}-\varepsilon}} .$$

Pokud zvolíme například $\varepsilon = \frac{1}{6}$, je

$$0 < \frac{\ln x}{x^{4/3}} < \frac{1}{x^{\frac{4}{3}-\frac{1}{6}}} = \frac{1}{x^{7/6}} .$$

A protože $\frac{7}{6} > 1$, integrál $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{7/6}}$ konvegruje. Proto konverguje také integrál $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^{4/3}}\,\mathrm{d}x$, a tedy také integrál I_2.
Protože oba integrály I_1 i I_2 jsou konvergentní, konverguje také daný nevlastní integrál.

Příklad 12.r. Ukažte, že pro každé $0 < p \le 1$ konverguje integrál $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Integrál zapíšeme jako součet dvou integrálů

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2\,, \quad \text{kde} \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x\,, \qquad I_2 = \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x\,.$$

Protože platí $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} \frac{\sin x}{x} = 1$ a pro $0 < p < 1$

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\sin x}{x^p} = \lim_{x\to 0_+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0_+} \frac{x}{x^p} = \lim_{x\to 0_+} x^{1-p} = 0\,,$$

je funkce v integrálu I_1 omezená a spojitá, a integrál I_1 konverguje.
Integrál I_2 je definován pomocí limity

$$\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty} \int_{\pi/2}^{y} \frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x\,.$$

Abychom dokázali jeho konvergenci, použijeme nejprve metodu integrace per partes. Když zvolíme

$$f'(x) = \sin x\,, \quad g(x) = \frac{1}{x^p} \implies f(x) = -\cos x\,, \quad g'(x) = -\frac{p}{x^{p+1}}\,,$$

dostaneme

$$\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty} \left[-\frac{\cos x}{x^p}\right]_{\pi/2}^{y} - p \lim_{y\to\infty} \int_{\pi/2}^{y} \frac{\cos x}{x^{p+1}}\,\mathrm{d}x = -\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Protože pro $x > 0$ platí nerovnost $0 \le \dfrac{|\cos x|}{x^{p+1}} \le \dfrac{1}{x^{p+1}}$ a integrál $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{p+1}}$ konverguje, neboť předpokládáme, že $p > 0$, konverguje také integrál I_2, a tedy integrál $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$.

`Poznámka.` Lze ukázat, že intergál $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ nekonverguje pro $0 < p \le 1$ absolutně, ale pouze neabsolutně.

Příklad 1. Najděte integrály

$$\textbf{a.}\quad \int_0^\infty (x-1)(x-2)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \textbf{b.}\quad \int_{-\infty}^1 (x^2+x+1)\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\textbf{c.}\quad \int_0^\infty (2x^3-x)\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \textbf{d.}\quad \int_1^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}}}\,.$$

$\Big[$**a.** $\frac{1}{2}$; **b.** $\frac{20}{27}\mathrm{e}^3$; **c.** 3; **d.** $9\mathrm{e}^{-1}$.$\Big]$

Příklad 2. Nechť je pro $x >$ definována funkce $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Dokažte, že pro každé $x > 0$ platí $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Příklad 3. Najděte integrály

$$\textbf{a.}\quad \int_{\pi/2}^\infty \frac{\cos 3x}{\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \textbf{b.}\quad \int_{-\infty}^\pi \mathrm{e}^{4x}\sin x\,\mathrm{d}x\,, \qquad \textbf{c.}\quad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-3x}\big(2\cos 4x - 5\sin 4x\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

$\Big[$**a.** $\frac{3}{13}\,\mathrm{e}^{-\pi}$; **b.** $\frac{1}{17}\,\mathrm{e}^{4\pi}$; **c.** $-\,\frac{14}{25}$.$\Big]$

Příklad 4. Najděte integrály

$$\textbf{a.}\quad \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,, \qquad \textbf{b.}\quad \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x(2-\ln x)}}\,.$$

$\Big[$**a.** π; **b.** $\frac{1}{2}\,\pi$.$\Big]$

Příklad 5. Najděte integrály

$$\textbf{a.}\quad \int_2^\infty \frac{(x+5)\,\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+3x+2)}\,, \qquad \textbf{b.}\quad \int_{-\infty}^0 \frac{(3x-8)\,\mathrm{d}x}{(x-2)(x^2-3x+2)}$$

$$\textbf{c.}\quad \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+3}\,, \qquad \textbf{d.}\quad \int_2^\infty \frac{(3x-4)\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2-2x+4)}\,.$$

$\Big[$**a.** $2\ln\frac{3}{2}$; **b.** $5\ln 2 - \frac{1}{2}$; **c.** $\frac{1}{3\sqrt{3}}\,\pi$; **d.** $\frac{1}{3\sqrt{3}}\,\pi - \ln\frac{2}{3}$.$\Big]$

Příklad 6. Najděte integrály

$$\textbf{a.}\quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+4)\,\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x+2)}\,, \qquad \textbf{b.}\quad \int_0^\infty \frac{7\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+4\mathrm{e}^x+7}\,,$$

$$\textbf{c.}\quad \int_0^1 \frac{(2+\ln x)\,\mathrm{d}x}{x(2-\ln x)(\ln^2 x - 6\ln x + 8)}\,, \qquad \textbf{d.}\quad \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln^2 x + 3\ln x + 6)}\,.$$

$\Big[$**a.** $3 - 2\ln 2$; **b.** $\frac{1}{2}\ln 7 - \frac{1}{3\sqrt{3}}\,\pi$; **c.** $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\ln 2$; **d.** $\frac{2}{\sqrt{15}}\,\pi$.$\Big]$

Příklad 7. Zjistěte, zda následující integrály konvergují nebo divergují:

$$\textbf{a.}\quad \int_1^\infty \frac{\sqrt[4]{x^3+x-1}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+x+1}\,\sqrt[5]{x^4+x^2+12}}\,, \qquad \textbf{b.}\quad \int_1^\infty \frac{\sqrt[3]{x^4+x-1}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+x+1}\,\sqrt[5]{x^4+x^2+12}}\,,$$

$$\textbf{c.}\quad \int_0^1 \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x(2-x-x^2)(1-x^2)}}\,, \qquad \textbf{d.}\quad \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+x^2-2}}\,,$$

$$\textbf{e.}\quad \int_0^\infty \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2+x+2}}\,, \qquad \textbf{f.}\quad \int_0^1 \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{1-x^2}\,.$$

$$\begin{bmatrix} \textbf{a}.\ \text{konverguje;} & \textbf{b}.\ \text{diverguje;} & \textbf{c}.\ \text{konverguje;} \\ \textbf{d}.\ \text{konverguje;} & \textbf{e}.\ \text{diverguje;} & \textbf{f}.\ \text{konverguje;} \end{bmatrix}$$

Příklad 8. Ukažte, že integrály $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2 \, \mathrm{d}x$ a $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2 \, \mathrm{d}x$ konvergují.