Riemannův intergál v $\mathbb{R}^n$

<u>Konstrukce Riemannova integrálu v $\mathbb{R}^n$</u>

Nechť je $\mathcal{M}$ omezená podmnožina $\mathbb{R}^n$ a $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ omezená funkce definovaná na množině $\mathcal{M}$. Nechť je $\mathcal{I} = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n\rangle$ omezený interval takový, že $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}$. Na intervalu $\mathcal{I}$ definujeme funkci

$$\widehat{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{pro} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{M}\,, \\ 0 & \text{pro} \quad \mathbf{x} \notin \mathcal{M}\,. \end{cases}$$

Každý interval $\langle a_k, b_k\rangle$, $k = 1, 2, \dots, n$, rozdělíme na N_k dílků body $x_{k,r}$, pro které je $a_k = x_{k,0} < x_{k,1} < x_{k,2} < \dots < x_{k,N_k} = b_k$. Označíme

$$\mathcal{I}_{i_1,i_2,\dots,i_n} = \langle x_{1,i_1-1}, x_{1,i_1}\rangle \times \langle x_{2,i_2-1}, x_{2,i_2}\rangle \times \dots \times \langle x_{n,i_n-1}, x_{n,i_n}\rangle$$

a n–rozměrný objem (míru) intervalu $\mathcal{I}_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ jako $\Delta\mu_{i_1,i_2,\dots,i_n} = \Delta x_{i_1}\Delta x_{i_2}\dots\Delta x_{i_n}$, kde $\Delta x_{i_k} = x_{k,i_k} - x_{k,i_k-1}$.
V každém intervalu $\mathcal{I}_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ vybereme bod $\boldsymbol{\xi}_{i_1,i_2,\dots,i_n} = (\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_n}) \in \mathcal{I}_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ a uděláme součet

$$S(\boldsymbol{\xi}_{i_1,i_2,\dots,i_n}) = \sum_{i_1=1}^{N_1} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n} \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}_{i_1,i_2,\dots,i_n})\Delta\mu_{i_1,i_2,\dots,i_n} = \sum_{i_1=1}^{N_1} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n} \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}_{i_1,i_2,\dots,i_n})\Delta x_{i_1}\dots\Delta x_{i_n}\,.$$

Pokud existuje limita

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} S(\boldsymbol{\xi}_{i_1,i_2,\dots,i_n}) = \int_{\mathcal{M}} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathcal{M}} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\dots\mathrm{d}x_n\,,$$

kde $\|\Delta\| = \max\bigl(\Delta x_{i_k}\bigr)$ a nezávisí na výberu bodů $\boldsymbol{\xi}_{i_1,i_2,\dots,i_n}$, nazývá Riemannův integrál funkce $f(\mathbf{x})$ přes množinu $\mathcal{M}$.

<u>Fubiniova věta.</u>

Nechť je $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{r+s} = \mathbb{R}^n$ omezená množina a $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$ a $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$, funkce omezená na množině $\mathcal{M}$.
Označme $\Pi^{(\mathbf{x})}$, resp. $\Pi^{(\mathbf{y})}$, kolmý průmět množiny $\mathcal{M}$ do nardoviny $\mathbf{x}$, resp. $\mathbf{y}$, tj.

$$\Pi^{(\mathbf{x})} = \bigl\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r\,;\ \exists(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{M}\bigr\}\,, \quad \text{resp.} \quad \Pi^{(\mathbf{y})} = \bigl\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s\,;\ \exists(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{M}\bigr\}\,.$$

Pro každé $\mathbf{x}_0 \in \Pi^{(\mathbf{x})}$, resp. $\mathbf{y}_0 \in \Pi^{(\mathbf{y})}$, označme $\mathcal{S}(\mathbf{x}_0)$, resp. $\mathcal{S}(\mathbf{y}_0)$, řez množiny $\mathcal{M}$ nadrovinou $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, resp. nadrovinou $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$, tj.

$$\mathcal{S}(\mathbf{x}) = \bigl\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s\,;\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{M}\bigr\}\,, \qquad \mathcal{S}(\mathbf{y}) = \bigl\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r\,;\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{M}\bigr\}\,.$$

Pokud existuje integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{M}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_r\,\mathrm{d}y_1\dots\mathrm{d}y_s$ platí rovnost

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{M}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_r\,\mathrm{d}y_1\dots\mathrm{d}y_s &= \int_{\Pi^{(\mathbf{x})}} \left(\int_{\mathcal{S}(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,\mathrm{d}y_1\dots\mathrm{d}y_s\right)\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_r = \\ &= \int_{\Pi^{(\mathbf{y})}} \left(\int_{\mathcal{S}(\mathbf{y})} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_r\right)\mathrm{d}y_1\dots\mathrm{d}y_s\,.\end{aligned}$$

Speciální případy.

Pokud je množina $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^2$ dána nerovnostmi $\varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)$ a $a < x < b$ (a pro každé $x \in (a,b)$ platí $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$), je

$$\iint_{\mathcal{M}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Jestliže je množina $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^2$ dána nerovnostmi $\psi_1(y) < x < \psi_2(y)$ a $c < y < d$ (a pro každé $y \in (c,d)$ platí $\psi_1(y) < \psi_2(y)$), je

$$\iint_{\mathcal{M}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

Je-li množina $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ dána nerovnostmi $\psi_1(x,y) < z < \psi_2(x,y)$, kde $(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ (a pro každé $(x,y) \in \Omega$ je $\psi_1(x,y) < \psi_2(x,y)$), je

$$\iiint_{\mathcal{M}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Pokud je množina $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ dána nerovností $a < z < b$ a pro dané $z \in (a,b)$ je

$$(x,y) \in \Omega_z = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x,y,z) \in \mathcal{M} \big\}\,,$$

je

$$\iiint_{\mathcal{M}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}z \iint_{\Omega_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

<u>Věta o substituci</u>

Nechť je $\mathcal{N}$ otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{\varphi} : \mathcal{N} \to \mathbb{R}^n$ prosté regulární zobrazení[1] na $\mathcal{N}$ takové, že $\mathcal{M} \subset \boldsymbol{\varphi}(\mathcal{N})$. Pak platí

$$\int_{\mathcal{M}} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_{\boldsymbol{\varphi}^{(-1)}(\mathcal{M})} f\big(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})\big) \big| J(\mathbf{y}) \big|\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2 \ldots \mathrm{d}y_n\,,$$

[1] To znamená, že $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$, neboli

$$x_1 = \varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)\,, \quad x_2 = \varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_n)\,, \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)\,,$$

kde funkce $\varphi_k(\mathbf{y})$ mají na $\mathcal{N}$ spojité parciální derivace prvního řádu a jakobián

$$J(\mathbf{y}) = \det \boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{y}) = \frac{\mathrm{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\mathrm{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1(\mathbf{y})}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \varphi_1(\mathbf{y})}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1(\mathbf{y})}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_2(\mathbf{y})}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \varphi_2(\mathbf{y})}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_2(\mathbf{y})}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_n(\mathbf{y})}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \varphi_n(\mathbf{y})}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_n(\mathbf{y})}{\partial y_n} \end{pmatrix} \neq 0$$

pro každé $\mathbf{y} \in \mathcal{N}$.

kde $J(\mathbf{y})$ je jakobián zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ a $\boldsymbol{\varphi}^{(-1)}(\mathcal{M})$ je vzor množiny $\mathcal{M}$ při zobrazení $\boldsymbol{\psi}$, tj.

$$\boldsymbol{\varphi}^{(-1)}(\mathcal{M}) = \big\{\mathbf{y} \in \mathcal{N}\,;\ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}) \in \mathcal{M}\big\}\,.$$

Příklad 1.r. Integrál $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je konečná oblast omezená přímkami

$$\tfrac{1}{2}\,x + \tfrac{1}{5}\,y = 1\,, \qquad \tfrac{1}{6}\,x + \tfrac{1}{5}\,y = 1\,, \qquad y = 0\,,$$

napište pomocí jednoduchých integrálů v obou pořadích integrace.

Řešení. Oblast Ω je trojúhelník s vrcholy $A = [2;0]$, $B = [6;0]$ a $C = [0;5]$. Lepší je si to nakreslit.

Průmět $\Pi^{(x)}$ tohoto trojúhelníka na osu x, tj. $y = 0$, je úsečka $\Pi^{(x)} = \langle 0,6\rangle$.

Pro $x \in \langle 0,2\rangle$ je řez $\mathcal{S}(x)$ úsečka $\big\langle 5(1-\tfrac{1}{2}\,x), 5(1-\tfrac{1}{6}\,x)\big\rangle$.

Pro $x \in \langle 2,6\rangle$ je řez $\mathcal{S}(x)$ úsečka $\big\langle 0, 5(1-\tfrac{1}{6}\,x)\big\rangle$.

Proto je

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_{5(1-\frac{1}{2}\,x)}^{5(1-\frac{1}{6}\,x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_2^6 \mathrm{d}x \int_0^{5(1-\frac{1}{6}\,x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Průmět $\Pi^{(y)}$ trojúhelníku Ω do osy y je interval $\Pi^{(y)} = \langle 0,5\rangle$.

Pro každé $y \in \langle 0,5\rangle$ je řez $\mathcal{S}(y)$ usečka $\big\langle 2(1-\tfrac{1}{5}\,y), 6(1-\tfrac{1}{5}\,y)\big\rangle$.

Proto je

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^5 \mathrm{d}y \int_{2(1-\frac{1}{5}\,y)}^{6(1-\frac{1}{5}\,y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

Příklad 2.r. Integrál $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast daná nerovnostmi

$$x < y + 4\,, \qquad y + 1 < 4x\,, \qquad x < 1\,,$$

napište pomocí jednoduchých integrálů v obou pořadích integrace.

Řešení. Pokud napíšeme nerovnosti, které popisují množinu Ω va tvaru

$$x - 4 < y < 4x - 1\,, \qquad x < 1\,,$$

je ihned vidět, že řez $\mathcal{S}(x)$ je interval $(x-4, 4x-1)$.

Aby tento interval nebyl prázdný, musí platit $x - 4 < 4x - 1$, tj. $-1 < x$. To spolu s podmínkou $x < 1$ dává průmět na osu x, $\Pi^{(x)} = (-1,1)$. Tedy platí

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_{x-4}^{4x-1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Pokud budeme chtít vyjádřit dvojný integrál pomocí jednoduchých v opačném pořadí, napíšeme nerovnosti, které určují Ω ve tvaru

$$x < y + 4\,, \quad \tfrac{1}{4}\,(y+1) < x\,, \quad x < 1\,, \quad \text{neboli} \quad \tfrac{1}{4}(y+1) < x < \min(1, y+4)\,.$$

Pro $y < -3$ je $y + 4 < 1$ a tedy pro $y < -3$ dostanme $\frac{1}{4}(y+1) < x < y + 4$. Aby tato množina nebyla prázdná, musí platit $\frac{1}{4}(y+1) < y + 4$, neboli $-5 < y$. Tedy pro $y \in (-5, -3)$ musí být $x \in \left(\frac{1}{4}(y+1), y+4\right)$.
Pro $y > -3$ je $1 < y + 4$, a tedy $\frac{1}{4}(y+1) < x < 1$. Aby tato množina nebyla prázdná, musí platit $\frac{1}{4}(y+1) < 1$, neboli $y < 3$. Tedy pro $y \in (-3, 3)$ musí být $x \in \left(\frac{1}{4}(y+1), 1\right)$.
Celkově tak dostaneme

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-5}^{-3} \mathrm{d}y \int_{\frac{1}{4}(y+1)}^{y+4} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{-3}^{3} \mathrm{d}y \int_{\frac{1}{4}(y+1)}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

Příklad 3.r. Integrál $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast daná nerovnostmi

$$x < 2y + 1\,, \qquad 3y < x + 2\,, \qquad 0 < y < 1\,,$$

napište pomocí jednoduchých integrálů v obou pořadích integrace.
Řešení. Když napíšeme nerovnosti, které popisují množinu Ω ve tvaru

$$3y - 2 < x < 2y + 1\,, \qquad 0 < y < 1\,,$$

ihned vidíme, že $\mathcal{S}(y)$ je interval $(3y-2, 2y+1)$. Aby tato množina nebyla prázdná, musí platit $3y - 2 < 2y + 1$, tj. $y < 3$. To je ale podmnožina intervalu $(0, 1)$. Proto lze psát

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{3y-2}^{2y+1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

Jestliže napíšeme nerovnosti, které popisují množinu Ω ve tvaru

$$\tfrac{1}{2}(x-1) < y < \tfrac{1}{3}(x+2)\,, \qquad 0 < y < 1\,,$$

vidíme, že množina Ω je popsána nerovnostmi

$$\max\left(0, \tfrac{1}{2}(x-1)\right) < y < \min\left(1, \tfrac{1}{3}(x+2)\right).$$

To znamená, že pro $x < 1$ je $0 < y < \frac{1}{3}(x+2)$ a z toho plyne $-2 < x < 1$.
Pro $x > 1$ pak musí být $\frac{1}{2}(x-1) < y < 1$, a tedy $1 < x < 3$.
Celkově lze tedy psát

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{1} \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{3}(x+2)} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_1^3 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}(x-1)}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Příklad 4.r. V integrálu $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ změňte pořadí integrace.
Řešení. Množina $\mathcal{M}$, přws kterou integrujeme je dána nerovnostmi

$$x^3 < y < x^2\,, \qquad 0 < x < 1\,.$$

Je zřejmé, že pro souřadnici y bodu $[x;y]$ množiny $\mathcal{M}$ platí $0<y<1$. Z prvních nerovnic dostaneme omezení na x při daném y ve tvaru

$$\sqrt{y}<x<\sqrt[3]{y}\,.$$

Protože $\sqrt{y}>0$ a $\sqrt[3]{y}<1$, jsou podmínky $0<x<1$ splněny. Aby nějaké takové x existovalo, musí být

$$\sqrt{y}<\sqrt[3]{y}\implies y>0\,,\quad y^3<y^2\implies 0<y<1\,.$$

Proto je

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

Příklad 5.r. V integrálu $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ změňte pořadí integrace.

Řešení. Radši si to nakreslete. Pokusím se to spočítat, ale může se to zdát nepřehledné.
Množina $\mathcal{M}$, přes kterou integrujeme, je dána nerovnostmi

$$\sqrt{2x-x^2}<y<\sqrt{x}\,,\qquad 1<x<2\,.$$

Z toho je zřejmé, že $0<y<\sqrt{2}$. Po umocnění první soustavy nerovnic dostaneme

$$2x-x^2<y^2\,,\qquad y^2<x\,.$$

Když přepíšeme první z těchto nerovností ve tvaru $1-y^2<(x-1)^2$, je vidět, že pro $y>1$ je tato nerovnost splněna automaticky. Pro $y<1$ pak dostaneme

$$0<\bigl(x-1-\sqrt{1-y^2}\bigr)\bigl(x-1+\sqrt{1-y^2}\bigr)\,.$$

A protože $x>1$, je $x-1+\sqrt{1-y^2}>0$, a tedy musí platit $x-1-\sqrt{1-y^2}>0$, neboli $x>1+\sqrt{1-y^2}$.
Celkově můžeme množinu $\mathcal{M}$ popsat jako $\mathcal{M}=\mathcal{M}_1\cup\mathcal{M}_2$, kde množiny

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1&=\bigl\{(x,y)\,;\ 0<y<1\,,\ y^2<x\,,\ 1+\sqrt{1-y^2}<x<2\bigr\}\,,\\ \mathcal{M}_2&=\bigl\{(x,y)\,;\ 1<y<\sqrt{2}\,,\ y^2<x\,,\ 1<x<2\bigr\}\end{aligned}$$

jsou navzájem disjunktní, a tedy

$$\iint_{\mathcal{M}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{\mathcal{M}_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{\mathcal{M}_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Protože pro $0<y<1$ je $y^2<1+\sqrt{1-y^2}$ a pro $y>1$ je $y^2>1$, lze množiny $\mathcal{M}_1$ a $\mathcal{M}_2$ zapsat také jako

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1&=\bigl\{(x,y)\,;\ 0<y<1\,,\ 1+\sqrt{1-y^2}<x<2\bigr\}\,,\\ \mathcal{M}_2&=\bigl\{(x,y)\,;\ 1<y<\sqrt{2}\,,\ y^2<x<2\bigr\}\,.\end{aligned}$$

Proto lze psát

$$\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}y\int_{y^2}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

Příklad 6.r. Najděte obsah oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi $x - 3y \le 10$ a $8y^2 \le x + y + 2$.

Řešení. Obsah P oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ najdeme pomocí dvojného integrálu

$$P = \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Když napíšeme nerovnosti, které popisují oblast Ω ve tvaru

$$8y^2 - y - 2 \le x \le 3y + 10\,,$$

je vidět, že pro pevné y je řez $\mathcal{S}(y)$ oblasti Ω s přímkou rovnobežnou s osu x úsečka $\mathcal{S}(y) = \langle 8y^2 - y - 2, 3y + 10\rangle$. Aby tento interval nebyl prázdný, musí platit nerovnost

$$8y^2 - y - 2 \le 3y + 10 \implies 8y^2 - 4y - 12 \le 0 \implies -1 \le y \le \tfrac{3}{2}\,.$$

To je průmět $\Pi^{(y)}$ množiny Ω do osy y. Podle Fubiniovy věty je tedy

$$P = \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\Pi^{(y)}} \mathrm{d}y \int_{\mathcal{S}(y)} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{3/2} \mathrm{d}y \int_{8y^2-y-2}^{3y+10} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{3/2} \big[x\big]_{8y^2-y-2}^{3y+10}\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_{-1}^{3/2} (12 + 4y - 8y^2)\,\mathrm{d}y = \Big[12y + 2y^2 - \tfrac{8}{3}\,y^3\Big]_{-1}^{3/2} = \tfrac{125}{6}\,.$$

Příklad 7.r. Najděte souřadnici x_T těžiště homogenní oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi $x^2 - 8x - 2y + 12 \le 0$ a $x + y \le 2$.

Řešení. Souřadnici x_T homogenní oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ najdeme ze vztahu

$$x_T = \frac{S_y}{P}\,, \quad \text{kde} \quad P = \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \quad S_y = \iint_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

tj. P je obsah oblasti Ω a S_y je tzv. statický moment oblasti Ω vzhledem k ose y.
Když zapíšeme nerovnosti, které popisují oblast Ω, ve tvaru

$$\tfrac{1}{2}\big(x^2 - 8x + 12\big) \le y \le 2 - x\,,$$

vidíme množinu, kterou může pro pevné x probíhat proměnná y. Aby tato množina nebyla prázdná, musí platit nerovnost

$$\tfrac{1}{2}\big(x^2 - 8x + 12\big) \le 2 - x\,, \quad \text{tj.} \quad x^2 - 6x + 8 \le 0 \implies 2 \le x \le 4\,.$$

Podle Fubiniovy věty jsou tedy hledané integrály

$$P = \int_2^4 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}(x^2-8x+12)}^{2-x} \mathrm{d}y = \int_2^4 (-4 + 3x - \tfrac{1}{2}x^2)\,\mathrm{d}x = \Big[-4x + \tfrac{3}{2}\,x^2 - \tfrac{1}{6}\,x^3\Big]_2^4 = \tfrac{2}{3}\,,$$
$$S_y = \int_2^4 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}(x^2-8x+12)}^{2-x} x\,\mathrm{d}y = \int_2^4 (-4x + 3x^2 - \tfrac{1}{2}x^3)\,\mathrm{d}x = \Big[-2x^2 + x^3 - \tfrac{1}{8}\,x^4\Big]_2^4 = 2$$

a x–ová souřadnice těžiště je $x_T = 3$.

Příklad 8.r. Na oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi $3x^2 + 2y^2 \leq 6$, $2 \leq 2y^2 - x^2$ a x, $y \geq 0$, působí tlak $p(x, y) = y$. Najděte celkovou sílu F, která působí na oblast Ω.
Řešení. Celkovou sílu F, která působí na oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ najdeme pomocí integrálu

$$F = \iint_\Omega p(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Pokud napíšeme nerovnosti, které popisují oblast Ω ve tvaru

$$\tfrac{1}{2}(2 + x^2) \leq y^2 \leq \tfrac{3}{2}(2 - x^2)\,, \qquad x,\, y \geq 0\,,$$

vidíme, že $x^2 \leq 2$. Protože je $y \geq 0$, je první soustava nerovností

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}(2 + x^2)} \leq y \leq \sqrt{\tfrac{3}{2}(2 - x^2)}\,,$$

což jsou pro pevné x integrační meze pro proměnnou y. Tato množina není prázdná, pokud x splňuje nerovnosti

$$\tfrac{1}{2}(2 + x^2) \leq \tfrac{3}{2}(2 - x^2)\,, \quad x \geq 0\,, \quad \text{tj.} \quad 4x^2 \leq 4\,, \quad x \geq 0\,, \quad \text{neboli} \quad 0 \leq x \leq 1\,.$$

Podle Fubiniovy věty je tedy

$$F = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{\frac{1}{2}(2+x^2)}}^{\sqrt{\frac{3}{2}(2-x^2)}} y\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}\,y^2\right]_{\sqrt{\frac{1}{2}(2+x^2)}}^{\sqrt{\frac{3}{2}(2-x^2)}} \mathrm{d}x = \int_0^1 (1 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[x - \tfrac{1}{3}\,x^3\right]_0^1 = \tfrac{2}{3}\,.$$

Příklad 9.r. Najděte objem V tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi $0 \leq z \leq xy$, $x + y \leq 1$ a $x \geq 0$.
Řešení. Objem V tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$ je dán trojným integrálem

$$V = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Z nerovností, ketré popisují tšěleso $\mathcal{T}$ je pro dané x a y ihned vidět řez $\mathcal{S}(x, y) = \langle 0, xy\rangle$. Průmět $\Pi^{(x,y)}$ tělesa $\mathcal{T}$ do roviny xy je oblast dána nerovnostmi

$$0 \leq xy\,, \quad x + y \leq 1\,, \quad x \geq 0\,.$$

Podle Fubiniovy věty tedy je

$$V = \iint_{\Pi^{(x,y)}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{xy} \mathrm{d}z = \iint_{\Pi^{(x,y)}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Protože je $x \geq 0$, plyne z nerovnosti $0 \leq xy$, že $y \geq 0$. Pokud napíšeme nerovnosti, které popisují oblast $\Pi^{(x,y)}$ ve tvaru

$$0 \leq y \leq 1 - x\,, \quad x \geq 0\,,$$

vidíme pro pevné x možné hodnoty y, tj. $0 \le y \le 1-x$. Aby tato množina nebyla prázdná, musí být $0 \le 1-x$ a $x \ge 0$, neboli $0 \le x \le 1$. Pomocí Fubiniovy věty pak dostaneme

$$V = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} xy \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \tfrac{1}{2}\, x(1-x)^2 \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{2}\, x^2 - \tfrac{2}{3}\, x^3 + \tfrac{1}{4}\, x^4\Big]_0^1 = \tfrac{1}{24}\,.$$

Příklad 10.r. Najděte objem tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi $x^2 \le y \le 1$ a $0 \le z \le 4-x-y$.

Řešení. Objem V tělesa $\mathcal{T}$ spočítáme trojným integrálem

$$V = \iiint_{\mathcal{T}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Z nerovností, které určují množinu $\mathcal{T}$ je vidět, že pro dané x a y probíhá proměnná z interval $\langle 0, 4-x-y\rangle$. Podle Fubiniovy věty tedy je

$$V = \iint_{\Pi^{(x,y)}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{4-x-y} \mathrm{d}z = \iint_{\Pi^{x,y)}} (4-x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde je oblast $\Pi^{(x,y)} \subset \mathbb{R}^2$ určena nerovnostmi

$$x^2 \le y \le 1 \qquad 0 \le 4-x-y\,, \quad \text{tj.} \quad x+y \le 4\,.$$

Tyto nerovnosti napíšeme ve tvaru

$$x^2 \le y \le 1\,, \quad y \le 4-x\,, \quad \text{tj.} \quad x^2 \le y \le \min(1, 4-x)\,.$$

Pokud je $4-x < 1$, tj. $x > 3$, je první nerovnost $x^2 \le y \le 4-x$. Z ní plyne $x^2 \le 4-x$. Ale tato nerovnost nemá pro $x > 3$ žádné řešení.
Proto musí být $1 \le 4-x$, tj. musí platit

$$x^2 \le y \le 1\,, \quad x \le 3\,.$$

Důsledek první soustavy nerovností je $x^2 \le 1$, tj. $-1 \le x \le 1$, a podmínka $x \le 3$ je pak splněna vždy. Fubiniova věta pak vede k rovnosti

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1} 1\,\mathrm{d}x \int_{x^2}^1 (4-x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \Big[4y - xy - \tfrac{1}{2}\, y^2\Big]_{x^2}^1 = \\ &= \int_{-1}^1 \Big(4 - x - \tfrac{1}{2} - \big(4x^2 - x^3 - \tfrac{1}{2}\, x^4\big)\Big)\,\mathrm{d}x = \Big[\tfrac{7}{2}x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{10}x^5\Big]_{-1}^1 = \tfrac{68}{15}\,. \end{aligned}$$

Příklad 11.r. Najděte objem tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi a $0 \le z \le 4-x-y$, $0 \le x \le 3$ a $0 \le y \le 2$.

Řešení. Objem V daného tělesa je roven

$$V = \iiint_{\mathcal{T}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{4-x-y} \mathrm{d}z = \iint_{\Omega} (4-x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je dána nerovnostmi

$$x+y \le 4\,, \quad 0 \le x \le 3\,, \quad 0 \le y \le 2\,.$$

Tyto nerovnosti zapšeme ve tvaru

$$y \le 4 - x\,, \quad 0 \le x \le 3\,, \quad 0 \le y \le 2\,, \quad \text{tj.} \quad 0 \le y \le \min(2, 4 - x)\,, \quad 0 \le x \le 3\,.$$

Pro $2 \le 4 - x$, tj. pro $x \le 2$, jsou tyto nerovnice

$$0 \le y \le 2\,, \quad 0 \le x \le 2$$

a pro $4 - x < 2$, tj. pro $x > 2$, dostaneme z uvedených nerovností

$$0 \le y \le 4 - x\,, \quad 2 \le x \le 3\,.$$

Hledaný objem tělesa $\mathcal{T}$ pak můžeme najít jako součet dvou integrálů

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^2 (4 - x - y)\,\mathrm{d}y + \int_2^3 \mathrm{d}x \int_0^{4-x} (4 - x - y)\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_0^2 \big(6 - 2x\big)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \big(8 - 4x + \tfrac{1}{2}\,x^2\big)\,\mathrm{d}x = 8 + \tfrac{7}{6} = \tfrac{55}{6}\,. \end{aligned}$$

Příklad 12.r. Najděte souřadnici těžiště x_T homogenního tělesa $\mathcal{T}$, které je dáno nerovnostmi $x^2 + y^2 \le 4$, $x^2 + z^2 \le 4$ a $0 \le x \le 1$.

Řešení. Souřadnice těžiště x_T homogenního tělesa $\mathcal{T}$ najdeme pomocí vztahu

$$x_T = \frac{S_{yz}}{V}\,, \quad \text{kde} \quad V = \iiint_{\mathcal{T}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,, \quad S_{yz} = \iiint_{\mathcal{T}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

je objem a statický moment tělesa $\mathcal{T}$ vzhledem k rovině yz.
Pokud napíšeme nerovnosti, které definují těleso $\mathcal{T}$ ve tvaru

$$z^2 \le 4 - x^2\,, \quad y^2 \le 4 - x^2\,, \quad 0 \le x \le 1\,,$$

je vidět, že tato soustava nerovnic je ekvivalentní soustavě

$$-\sqrt{4 - x^2} \le z \le \sqrt{4 - x^2}\,, \qquad -\sqrt{4 - x^2} \le y \le \sqrt{4 - x^2}\,, \qquad 0 \le x \le 1\,,$$

ze které již snadno určíme meze jednotlivých proměnných. Pomocí Fubiniovy věty pak dostaneme

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}z = \int_0^1 4(4 - x^2)\,\mathrm{d}x = 4\Big[4x - \tfrac{1}{3}\,x^3\Big]_0^1 = \tfrac{44}{3}\,, \\ S_{yz} &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x\,\mathrm{d}z = \int_0^1 4x(4 - x^2)\,\mathrm{d}x = 4\Big[2x^2 - \tfrac{1}{4}\,x^4\Big]_0^1 = 7\,. \end{aligned}$$

Tedy x–ová souřadnice daného tělesa je $x_T = \frac{21}{44}$.

Příklad 13.r. Najděte integrál $\displaystyle\iint_{\Omega} xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde oblast Ω je dána nerovnostmi $x^2 + y^2 - 2y \ge 0$ a $x^2 + y^2 - 4y \le 0$.

Řešení. V integrálu uděláme substituci $x = -u$ a $y = v$. Jakobián této substituce $J = -1$ a vzor množiny Ω je množina daná nerovnostmi

$$u^2 + v^2 - 2v \geq 0\,, \quad u^2 + v^2 - 4v \leq 0$$

tj. opět množina Ω. Věta o substituci pak vede ke vztahu

$$\iint_\Omega xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega (-uv^2)\cdot|-1|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = -\iint_\Omega uv^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,$$

tedy k rovnosti $I = -I$, neboli $I = 0$. Proto je $\displaystyle\iint_\Omega xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$.

Příklad 14.r. Pomocí polárních souřadnic najděte obsah oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi $(x^2+y^2)^2 \leq x^2 - y^2$ a $x \geq 0$.
Řešení. Polární souřadnice r a φ jsou definovány vztahy

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \qquad r > 0\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,.$$

Jakobián této substituce je

$$J = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix} = r\,.$$

Naše množina Ω přejde po této substituci na množinu $\widehat{\Omega}$, která je dána nerovnostmi

$$r^4 \leq r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,, \quad r\cos\varphi > 0\,, \qquad r > 0\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,.$$

Podle věty o substituci pak je obsah P oblasti Ω roven

$$P = \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\widehat{\Omega}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Protože je $r > 0$, je soustava nerovnic, která popisuje oblast $\widehat{\Omega}$ ekvivalentní soustavě

$$0 < r \leq \sqrt{2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}\,, \quad \cos^2\varphi - \sin^2\varphi > 0\,, \quad \cos\varphi > 0\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,,$$

neboli soustavě

$$0 < r \leq \sqrt{2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)} = \sqrt{2\cos 2\varphi}\,, \qquad -\tfrac{1}{4}\pi < \varphi < \tfrac{1}{4}\pi\,,$$

která už je vhodná pro použití Fubiniovy věty. Ta pak dává

$$P = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{2\cos 2\varphi}} r\,\mathrm{d}r = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \Big[\sin 2\varphi\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 2\,.$$

Příklad 15.r. Do integrálu $\displaystyle\iint_\Omega f\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde oblast Ω je dána nerovností $x^2 + y^2 \leq 4y$ zaveďte polární souřadnice.

Řešení. Polární souřadnice r a φ jsou definovány vztahy

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \qquad r > 0\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,.$$

Protože jakobián tohoto zobrazení je $r > 0$, a $x^2 + y^2 = r^2$, je

$$\iint_\Omega f\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\widehat{\Omega}} f(r)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

kde $\widehat{\Omega}$ je oblast definovaná nerovnostmi

$$r^2 \le 4r\sin\varphi\,, \qquad r > 0\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,.$$

Protože je $r > 0$, je tato soustava nerovnic ekvivalentní soustavě

$$0 < r < 4\sin\varphi\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,.$$

A protože z první nerovnice plyne, že $\sin\varphi > 0$, lze tyto nerovnice zapsat ve tvaru

$$0 < r < 4\sin\varphi\,, \quad 0 < \varphi < \pi\,,$$

který je již vhodný pro použití Fubiniovy věty. Ta v našem případě dáva

$$\iint_\Omega f\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\widehat{\Omega}} f(r)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^\pi \mathrm{d}\varphi \int_0^{4\sin\varphi} f(r)\,r\,\mathrm{d}r\,.$$

Příklad 16.r. Do integrálu $\displaystyle\iint_\Omega f\Big(\frac{y}{x}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde oblast Ω je dána nerovností $x^2+y^2 \le 2x$ zvaveďte polární souřadnice.

Řešení. Polární souřadnice r a φ jsou definovány vztahy

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \qquad r > 0\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,.$$

Protože jakobián tohoto zobrazení je $r > 0$, a $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi$, je

$$\iint_\Omega f\Big(\frac{y}{x}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\widehat{\Omega}} f(\operatorname{tg}\varphi)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

kde je obast $\widehat{\Omega}$ dána nerovnicemi

$$r^2 \le 2r\cos\varphi\,, \qquad r > 0\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,.$$

Protože $r > 0$ dostaneme z těchto nerovností

$$0 < r < 2\cos\varphi\,, \quad r > 0\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,, \quad \text{neboli} \quad 0 < r < 2\cos\varphi\,, \quad -\tfrac{1}{2}\pi < \varphi < \tfrac{1}{2}\pi\,.$$

Podle Fubiniovy věty pak je

$$\iint_\Omega f\Big(\frac{y}{x}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\cos\varphi} f(\operatorname{tg}\varphi)\,r\,\mathrm{d}r = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\operatorname{tg}\varphi)\,\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Pokud ještě v posledním integrálu uděláme substituci

$$t = \operatorname{tg}\varphi \implies \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi} \implies \mathrm{d}\varphi = \cos^2\varphi\,\mathrm{d}t\,, \qquad -\tfrac{1}{2}\pi \mapsto -\infty\,, \quad \tfrac{1}{2}\pi \mapsto \infty$$

a protože

$$\cos^2\varphi = \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{1+t^2}\,,$$

je daný integrál roven

$$\iint_\Omega f\Big(\frac{y}{x}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}\,.$$

Příklad 17.r. Najděte interál $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Označme $I = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Pak je

$$I^2 = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde množina Ω je dána nerovnostmi $x,\,y > 0$. Jestliže do tohoto integrálu zavedeme polární souřadnice, dostaneme

$$I^2 = \iint_{\widehat{\Omega}} \mathrm{e}^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

kde je oblast $\widehat{\Omega}$ dána nerovnostmi $r > 0$ a $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$. Podle Fubiniovy věty pak je

$$I^2 = \int_0^\infty \mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}\varphi = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^\infty r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,.$$

A pokud v posledním integrálu uděláme substituci

$$t = r^2 \implies \mathrm{d}t = 2r\,\mathrm{d}r \implies r\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t\,, \qquad 0 \mapsto 0\,, \quad \infty \mapsto \infty\,,$$

dostaneme

$$I^2 = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^\infty r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{4}\pi\Big[-\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^\infty = \tfrac{1}{4}\pi\,.$$

Tedy

$$I = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$$

Příklad 18.r. Najděte integrál $\displaystyle\iint_\Omega \big(x^2+y^2\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde Ω je vnitřek elipsy $\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{4}y^2 = 1$.

Řešení. Protože integrujeme přes vntiřek elipsy, tj. přes množinu $\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{4}y^2 < 1$, nemusí být polární souřadnice pro integraci příliš vhodné. Pokud převedeme integrál do polárních souřadnic

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \qquad r > 0\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,, \qquad J = r\,,$$

dostaneme dvojný integrál

$$\iint_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Omega_{\text{pol.}}} r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

kde $\Omega_{\text{pol.}}$ je oblast, která je popsáne nerovnostmi

$$r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{9}+\frac{\sin^2\varphi}{4}\right)<1\,,\qquad r>0\,,\quad -\pi<\varphi<\pi\,,$$

neboli

$$0<r<\frac{6}{\sqrt{4\cos^2\varphi+9\sin^2\varphi}}\,,\quad -\pi<\varphi<\pi\,.$$

Podle věty o substituci pak je

$$\iint_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{324\,\mathrm{d}\varphi}{(4\cos^2\varphi+9\sin^2\varphi)^2}\,.$$

který není úplně jednoduchý.

Pro integraci přes elipsy $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<1$ je jednodušší použít jiné souřadnice než polární. Pokud napíšeme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2<1\,,$$

nabízí se zavést nové promenné

$$\frac{x}{a}=r\cos\varphi\,,\quad \frac{y}{b}=r\sin\varphi\,,\quad \text{kde}\quad r>0\,,\quad -\pi<\varphi<\pi\,,$$

neboli souřadnice definované jako

$$x=ar\cos\varphi\,,\quad y=br\sin\varphi\,,\qquad r>0\,,\quad -\pi<\varphi<\pi\,.$$

Nerovnost $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<1$ pak přejde na nerovnost $r^2<1$, tj. $0<r<1$, a jakobián tohoto zobrazení je

$$J=\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}a\cos\varphi & -ar\sin\varphi\\ b\sin\varphi & br\cos\varphi\end{pmatrix}=abr\,.$$

Proto v našem případě použijeme substituci

$$x=3r\cos\varphi\,,\quad y=2r\sin\varphi\,,\qquad r>0\,,\quad -\pi<\varphi<\pi\,,\qquad J=6r\,.$$

A protože množina Ω přejde na množinu $0<r<1$ a $-\pi<\varphi<\pi$, je náš integrál

$$\begin{aligned}\iint_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= 6\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^3\big(9\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi\big)\,\mathrm{d}r =\\ &= \tfrac{6}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\tfrac{9}{2}\,(1+\cos 2\varphi)+\tfrac{4}{2}\,(1-\cos 2\varphi)\Big)\mathrm{d}\varphi =\\ &= \tfrac{3}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\tfrac{13}{2}+\tfrac{5}{2}\,\cos 2\varphi\Big)\mathrm{d}\varphi = \tfrac{3}{2}\Big[\tfrac{13}{2}\,\varphi+\tfrac{5}{4}\,\sin 2\varphi\Big]_{-\pi}^{\pi} = \tfrac{39}{2}\,\pi\,.\end{aligned}$$

Příklad 19.r. Pomocí substituce $x = r\cos^2\varphi$, $y = r\sin^2\varphi$, kde $r > 0$ a $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$ najděte obsah oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi $(x+y)^4 \le 4xy$, x, $y \ge 0$.

Řešení. Uvedená substituce je výhodná, protože platí $x + y = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$. Po ní přejde množina Ω na množinu $\widehat{\Omega}$, která je popsána nerovnostmi

$$r^4 \le 4r^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi = r^2\sin^2 2\varphi\,, \quad r > 0\,, \quad 0 < \varphi < \tfrac{1}{2}\pi\,,$$

neboli

$$0 \le r \le \sqrt{\sin^2 2\varphi} = \sin 2\varphi\,, \quad 0 < \varphi < \tfrac{1}{2}\pi\,,$$

protože pro $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$ je $\sin 2\varphi > 0$. Jakobián uvažovaného zobrazení je

$$J = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos^2\varphi & -r\sin 2\varphi \\ \sin^2\varphi & r\sin 2\varphi \end{pmatrix} = r\sin 2\varphi.$$

Tedy obsah oblasti Ω je

$$P = \iint_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\widehat{\Omega}} r\sin 2\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sin 2\varphi} r\sin 2\varphi\,\mathrm{d}r = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^3 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Když napíšeme $\sin^3 2\varphi = (1-\cos^2 2\varphi)\sin 2\varphi$, lze nahlednout, že bude výhodná substituce

$$t = \cos 2\varphi \implies \mathrm{d}t = -2\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \implies \sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t\,, \qquad 0 \mapsto 1\,, \quad \tfrac{1}{2}\pi \mapsto -1\,.$$

Po ní dostaneme

$$P = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\bigl(1-\cos^2 2\varphi\bigr)\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -\tfrac{1}{4}\int_1^{-1}(1-t^2)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{4}\int_{-1}^{1}(1-t^2)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{3}\,.$$

Příklad 20.r. Najděte obsah P rovnoběžníka, který je určen nerovnostmi $0 \le 2x-3y \le 4$ a $0 \le x+2y \le 3$.

Řešení. Pokud zavedeme nové proměnné

$$u = 2x - 3y\,, \qquad v = x + 2y\,, \tag{1}$$

je vidět, že rovnoběžník je určen nerovnostmi $0 \le u \le 4$ a $0 \le v \le 3$. Tedy oblast intergace $\widehat{\Omega}$ je v těchto proměnných velmi jednoduchá. Ale ve větě o substituci se vyskytuje jakobián

$$J(u,v) = \frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix},$$

tj. jakobián zobrazení $x = x(u,v)$ a $y = y(u,v)$. Toto zobrazení lze najít tak, že vyřešíme soustavu (1), tj. napíšeme

$$x = \tfrac{1}{7}\,(2u+3v)\,, \quad y = \tfrac{1}{7}\,(-u+2v)\,.$$

Odpovídající jakobián pak je

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \tfrac{1}{7}\,.$$

Podle věty o substituci je pak obsah rovnoběžníka roven

$$P = \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^4 \mathrm{d}u \int_0^3 \tfrac{1}{7}\,\mathrm{d}v = \tfrac{12}{7}\,.$$

`Poznámka.` Lineární substituci, kterou jsme udělali v předchozím příkladě, lze zobecnit na lineární substituci v $\mathbb{R}^n$

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{nebo pomocí matic} \quad \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}\,.$$

Pro větu o substituci ale potřebujeme jakobián J inverzního zobrazení, které je $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$, tj.

$$J = \det\bigl(\mathbf{A}^{-1}\bigr) = \frac{1}{\det \mathbf{A}}\,,$$

kde $\det \mathbf{A}$ je vlastnějakobián zobrazení $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.
Tento vztah mezi jakobiány vzájemně inverzních zobrazení platí obecně. Jestliže je $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ prosté regulární zobrazení s jakobiánem

$$\widehat{J}(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\mathrm{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

je jakobián inverzního zobrazení $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y})$ roven

$$J(\mathbf{y}) = \frac{\mathrm{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\mathrm{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \frac{1}{\widehat{J}(\mathbf{x})}\,.$$

Proto jsme například v předcházejícím příkladě nemuseli hledat vyjádření x a y pomocí u a v, ale najít jakobián zobrazení $u = 2x - 3y$ a $v = x + 2y$, tj.

$$J^* = \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 7$$

a pro determinant, který potřebujeme ve větě o substituci, přímo psát $J = \frac{1}{\widehat{J}} = \frac{1}{7}$.

Příklad 21.r. Najděte souřadnici y_T těžiště homogenní oblasti Ω, která je dána nerovnostmi $1 \le xy^2 \le 8$ a $x \le 27y \le 27x$, když víte, že její obsah je roven 9.
Řešení. y-ovou souřadnici těžiště homogenní oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ najdeme pomocí vztahu

$$y_T = \frac{S_x}{P}\,, \quad \text{kde} \quad S_x = \iint_\Omega y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

je statický moment oblasti Ω vzhledem k ose x a P je obsah oblasti Ω.
Z nerovností, které popisují oblast Ω, plyne, že x, $y > 0$. Proto je lze zapsat ve tvaru

$$1 \le xy^2 \le 8\,, \qquad 1 \le \frac{x}{y} \le 27\,.$$

Z tohoto vyjádření je zřejmé, že se popis oblasti Ω zjednoduššÍ pokud zavedeme proměnné

$$u = xy^2 \,, \quad v = \frac{x}{y} \,, \tag{2}$$

protože oblast Ω pak popisují nerovnosti $1 \le u \le 8$ a $1 \le v \le 27$. Podle věty o substituci pak je

$$S_x = \iint_{\Omega} y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint_{\widehat{\Omega}} y \,|J| \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \,,$$

kde oblast $\widehat{\Omega}$ je popsána nerovnostmi $1 \le u \le 8$ a $1 \le v \le 27$.
Abychom mohli použít větu o substituci, musíme ještě najít jakobián J inverzního zobrazení k zobrazení (2) a integrovaný výraz $y\,|J|$ zapsat pomocí proměnných u a v. Jakobián J můžeme najít pomocí jakobián zobrazení (2), tj.

$$\widehat{J}(x,y) = \frac{\mathrm{D}(u,v)}{\mathrm{D}(x,y)} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ \dfrac{1}{y} & -\dfrac{x}{y^2} \end{pmatrix} = -3x = \frac{1}{J} \,.$$

Pak dostaneme

$$J = \frac{1}{\widehat{J}} = -\frac{1}{3x} \,, \qquad y\,|J| = \frac{y}{3x} = \frac{1}{3v} \,.$$

Podle věty o substituci pak je

$$S_x = \int_1^8 \mathrm{d}u \int_1^{27} \frac{\mathrm{d}v}{3v} = \tfrac{7}{3} \Big[\ln v\Big]_1^{27} = \tfrac{7}{3} \,\ln 27 = 7 \ln 3 \,.$$

Tedy y–ová souřadnice těžiště je $y_T = \frac{7}{9}\,\ln 3$.

`Poznámka.` Z příkladu by se mohlo zdát, že při použití věty o substituci nemusíme hledat inverzní zobrazení k (2). Ale není tomu tak. V uvedeném příkladě jsme po substituci dostali integrál funkce $f(x,y) = \dfrac{y}{3x}$, kterou jsme jednoduše zapsali pomocí proměnných u a v. Pokud ale budeme počítat například obsah oblasti Ω, dostaneme po substituci

$$P = \iint_{\Omega} \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint_{\widehat{\Omega}} \big|J(u,v)\big| \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v = \iint_{\widehat{\Omega}} \frac{\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v}{3x(u,v)} \,,$$

což znamená, že musíme vyjádřit x jako funkci proměnných u a v. Pokud nás nenapadne nic jiného, např. to, že $x^3 = uv^2$, musíme najít inverzní zobrazení. Z rovnic (2) postupně plyne

$$x = vy \,, \quad u = vy^3 \,, \quad y^3 = uv^{-1} \,, \quad y = u^{1/3} v^{-1/3} \,, \quad x = u^{1/3} v^{2/3} \,.$$

Tedy obsah P oblasti Ω je

$$P = \iint_{\widehat{\Omega}} \frac{\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v}{3u^{1/3} v^{2/3}} = \tfrac{1}{3} \int_1^8 u^{-1/3} \,\mathrm{d}u \int_1^{27} v^{-2/3} \,\mathrm{d}v = \tfrac{1}{3} \Big[\tfrac{3}{2}\, u^{2/3}\Big]_1^8 \, \Big[3v^{1/3}\Big]_1^{27} = 9 \,.$$

Příklad 22.r. Najděte objem tělesa $\mathcal{T}$, které je dáno nerovnostmi $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ a $x^2 + y^2 \ge 1 + 2z^2$.

Řešení. Objem tělesa $\mathcal{T}$ najdeme pomocí trojného integrálu

$$V = \iiint_{\mathcal{T}} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \,.$$

Proměnné x a y se v nerovnostech, které popisují těleso $\mathcal{T}$, vyskytují pouze v kombinaci $x^2 + y^2$. Proto se jedná o rotační těleso a bude výhodné použít cylindrické souřadnice r, φ a z, které jsou definovny vztahy

$$x = r \cos \varphi \,, \quad y = r \sin \varphi \,, \quad z = z \,, \quad \text{kde} \quad r > 0 \,, \quad -\pi < \varphi < \pi \,, \quad -\infty < z < \infty \,.$$

Protože $x^2 + y^2 = r^2$ je v těchto souřadnicích těleso popsáné nerovnostmi

$$r^2 + z^2 \le 4 \,, \quad r^2 \ge 1 + 2z^2 \,, \quad r > 0 \,, \quad -\pi < \varphi < \pi \,. \tag{3}$$

Protože jakobián substutuce je $J = r$, dostaneme

$$V = \iiint_{\widehat{\mathcal{T}}} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}z \,,$$

kde množina $\widehat{\mathcal{T}}$ je popsána nerovnostmi (3). Ihned je vidět, že podle Fubinovy věty je

$$V = \iint_{\Pi^{(r,z)}} \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \int_{-\pi}^{\pi} r \, \mathrm{d}\varphi = 2\pi \iint_{\Pi^{(r,z)}} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \,,$$

kde množina $\Pi^{(r,z)} \subset \mathbb{R}^2$ je popsána prvními třemi nerovnostmi v (3). Pokud tyto nerovnosti zapíšeme ve tvaru

$$1 + 2z^2 \le r^2 \le 4 - z^2 \,, \quad r > 0 \,, \quad \text{tj.} \quad \sqrt{1 + 2z^2} \le r \le \sqrt{4 - z^2} \,, \quad 4 - z^2 \ge 0 \,,$$

můžeme opět použít Fubiniovu větu ve tvaru

$$V = 2\pi \int_{\Pi^{(z)}} \mathrm{d}z \int_{\sqrt{1+2z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} r \, \mathrm{d}r = \pi \int_{\Pi^{(z)}} (3 - 3z^2) \, \mathrm{d}z \,,$$

kde množina $\Pi^{(z)} \subset \mathbb{R}$ je dána nerovnostmi

$$\sqrt{1 + 2z^2} \le \sqrt{4 - z^2} \,, \quad z^2 \le 4 \,, \quad \text{neboli} \quad 1 + 2z^2 \le 4 - z^2 \,, \quad \text{tj} \quad -1 < z < 1 \,.$$

Pak dostaneme

$$V = 3\pi \int_{-1}^{1} (1 - z^2) \, \mathrm{d}z = 4\pi \,.$$

Příklad 23.r. Najděte objem tělesa $\mathcal{T}$, které je dáno nerovnostmi $x^2 + y^2 \ge z^2$, $x^2 + y^2 \le 2y$ a $z \ge 0$.

Řešení. Protože je $z \ge 0$, lze nerovnosti, které popisují těleso $\mathcal{T}$ zapsat ve tvaru

$$0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2} \,, \quad x^2 + y^2 \le 2y \,,$$

který je výhodný pro použití Fubiniovy věty ve tvaru

$$V = \iiint_{\mathcal{T}} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \iint_{\Pi^{(x,y)}} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}z = \iint_{\Pi^{(x,y)}} \sqrt{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \,,$$

kde oblast $\Pi^{(x,y)} \subset \mathbb{R}^2$ je definována nerovností $x^2 + y^2 \le 2y$.
Tento integrál je možné najít například pomocí polárních souřadnic

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \qquad r > 0\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,,$$

ve kterých mají nerovnosti, které popisují oblast $\Pi^{(x,y)}$, tvar

$$r^2 \le 2r\sin\varphi\,, \quad r > 0\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,, \quad \text{tj.} \quad 0 < r \le 2\sin\varphi\,, \quad 0 < \varphi < \pi\,,$$

neboť $\sin\varphi > 0$. Protože $x^2 + y^2 = r^2$ a jakobián substituce je $J = r$, dostaneme pomocí věty o substituci a Fubiniovy věty

$$V = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r^2\,\mathrm{d}r = \tfrac{8}{3}\int_0^{\pi} \sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Po substituci $t = \cos\varphi$ pak je

$$V = \tfrac{8}{3}\int_1^{-1} (1 - t^2)(-\,\mathrm{d}t) = \tfrac{8}{3}\int_{-1}^{1} (1 - t^2)\,\mathrm{d}t = \tfrac{32}{9}\,.$$

Příklad 24.r. Najděte souřadnici x_T homogenního tělesa $\mathcal{T}$, které je popsáno nerovnostmi $x^2 + y^2 \le 2x$, $y - z \ge 0$ a $z \ge 0$.
Řešení. x–ovou souřadnici x_T homogenního tělesa $\mathcal{T}$ najdeme pomocí vztahu

$$x_T = \frac{S_{yz}}{V}\,, \quad \text{kde} \quad V = \iiint_{\mathcal{T}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad \text{a} \quad S_{yz} = \iiint_{\mathcal{T}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

jsou objem tělesa $\mathcal{T}$ a jeho statický moment vzhledem k rovině yz.
Pokud zapíšeme nerovnosti, které popisují těleso $\mathcal{T}$ ve tvaru

$$0 \le z \le y\,, \quad x^2 + y^2 \le 2x\,,$$

můžeme použít Fubiniovu větu ve tvaru

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Pi^{(x,y)}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{d}z = \iint_{\Pi^{(x,y)}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \\ S_{yz} &= \iint_{\Pi^{(x,y)}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^y x\,\mathrm{d}z = \iint_{\Pi^{(x,y)}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \end{aligned}$$

kde $\Pi^{(x,y)} \subset \mathbb{R}^2$ je dána nerovnostmi

$$x^2 + y^2 \le 2x\,, \quad y \ge 0\,.$$

Jestliže pro integraci použijeme polární souřadnice

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \qquad r > 0\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,,$$

dostaneme popis oblasti $\Pi^{(x,y)}$ ve tvaru

$$r^2 \le 2r\cos\varphi\,, \quad \sin\varphi > 0\,, \quad r > 0\,, \quad \text{tj.} \quad 0 < r < 2\cos\varphi\,, \quad 0 < \varphi < \tfrac{1}{2}\pi\,.$$

A protože jakobián substituce je $J = r$ platí

$$V = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r = \tfrac{8}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3\varphi \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \tfrac{2}{3}\,,$$
$$S_{yz} = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^3 \cos\varphi \sin\varphi \,\mathrm{d}r = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^5\varphi \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \tfrac{2}{3}\,.$$

Tedy x–ová souřadnice tělěsa $\mathcal{T}$ je $x_T = 1$.

Příklad 25.r. Najděte souřadnici z_T homogenního tělesa $\mathcal{T}$, které je popsáno nerovnostmi $x^2 + y^2 + z^2 \le 9$ a $-2 \le z \le 1$.

Řešení. z–ovou souřadnici z_T homogenního tělesa $\mathcal{T}$ najdeme pomocí vztahu

$$z_T = \frac{S_{xy}}{V}\,, \quad \text{kde} \quad V = \iiint_{\mathcal{T}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad \text{a} \quad S_{xy} = \iiint_{\mathcal{T}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

jsou objem tělesa $\mathcal{T}$ a jeho statický moment vzhledem k rovině xy.
Pokud zapíšeme nerovnosti, které popisují těleso $\mathcal{T}$ ve tvaru

$$x^2 + y^2 \le 9 - z^2\,, \quad -2 \le z \le 1\,,$$

můžeme použít Fubiniovu větu ve tvaru

$$V = \int_{\Pi^{(z)}} \mathrm{d}z \iint_{\mathcal{S}(z)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \qquad S_{xy} = \int_{\Pi^{(z)}} \mathrm{d}z \iint_{\mathcal{S}(z)} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde $\Pi^{(z)}$ je průmět tělesa $\mathcal{T}$ a osu z a $\mathcal{S}(z)$ je řez tělesa $\mathcal{T}$ s rovinou $z = \text{konst.}$ Tento řez je dán nerovností $x^2 + y^2 \le 9 - z^2$. Proto pro integraci použijeme polární souřadnice

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi,\,, \qquad r > 0\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,.$$

Pak dostaneme $0 < r < \sqrt{9 - z^2}$ a protože jakobián substituce je $J = r$, máme

$$V = \int_{\Pi^{(z)}} \mathrm{d}z \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{9-z^2}} r\,\mathrm{d}r = \pi \int_{\Pi^{(z)}} (9 - z^2)\,\mathrm{d}z\,,$$
$$S_{xy} = \int_{\Pi^{(z)}} \mathrm{d}z \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{9-z^2}} zr\,\mathrm{d}r = \pi \int_{\Pi^{(z)}} z(9 - z^2)\,\mathrm{d}z\,.$$

Průmět $\Pi^{(z)}$ tělesa $\mathcal{T}$ do osy z najdeme z nerovnic

$$-2 \le z \le 1\,, \quad z^2 \le 9\,, \quad \text{tj.} \quad \Pi^{(z)} = \langle -2, 1\rangle\,.$$

Z toho pak plyne

$$V = \pi \int_{-2}^{1} (9 - z^2)\,\mathrm{d}z = 24\pi\,, \qquad S_{x,y} = \pi \int_{-2}^{1} z(9 - z^2)\,\mathrm{d}z = -\tfrac{39}{4}\,\pi\,, \qquad z_T = -\tfrac{13}{32}\,.$$

Příklad 26.r. Najděte hmotnost tělesa $\mathcal{T}$, které je popsáno nerovnostmi $x^2 + y^2 + 4 \le 2z$, $x^2 + y^2 + z \le 8$ a $x^2 + y^2 \ge 1$, jestliže je jeho hustota $\rho = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

Řešení. Hmotnost M tělesa $\mathcal{T}$ s hustotou ρ najdeme trojným integrálem

$$M = \iiint_{\mathcal{T}} \rho \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \iiint_{\mathcal{T}} \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z}{x^2 + y^2} \, .$$

Pokud napíšeme nerovnosti, které popisují těleso $\mathcal{T}$ ve tvaru

$$\tfrac{1}{2} \, (x^2 + y^2 + 4) \leq z \leq 8 - x^2 - y^2 \, , \qquad x^2 + y^2 \geq 1 \, ,$$

vidíme, že můžeme použít Fubiniovu větu ve tvaru

$$M = \iint_{\Pi^{(x,y)}} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \int_{\frac{1}{2}(x^2+y^2+4)}^{8-x^2-y^2} \frac{\mathrm{d}z}{x^2 + y^2} = \iint_{\Pi^{(x,y)}} \frac{6 - \frac{3}{2}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, ,$$

kde $\Pi^{(x,y)}$ ja průmět tělesa $\mathcal{T}$ do roviny xy, který je dán nerovnostmi

$$\tfrac{1}{2} \, (x^2 + y^2 + 4) \leq 8 - x^2 - y^2 \, , \qquad x^2 + y^2 \geq 1 \, .$$

Protože se jak v mezích, tak v integrované funkci vyskytují proměnné x a y pouze v kombinaci $x^2 + y^2$, je výhodné použit pro výpočet polární souřadnice

$$x = r \cos \varphi \, , \quad y = r \sin \varphi \, , \qquad r > 0 \, , \quad -\pi < \varphi < \pi \, , \qquad J = r \, .$$

Pak je

$$M = \iint_{\Pi^{(r,\varphi)}} \frac{6 - \frac{3}{2} r^2}{r^2} \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = \iint_{\Pi^{(r,\varphi)}} \frac{1 - \frac{3}{2} r^2}{r} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, ,$$

kde $\Pi^{(r,\varphi)}$ je určena nerovnostmi

$$\tfrac{1}{2} \, (r^2 + 4) \leq 8 - r^2 \, , \quad r^2 \geq 1 \, , \quad r > 0 \, , \quad -\pi < \varphi < \pi \, .$$

Tyto nerovnosti jsou ekvivalentní nerovnostem

$$1 \leq r \leq 2 \, , \quad -\pi < \varphi < \pi \, .$$

Podle Fubiniovy věty tedy je

$$M = \int_1^2 \frac{6 - \frac{3}{2} r^2}{r} \, \mathrm{d}r \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \Big[6 \ln r - \tfrac{3}{4} r^2 \Big]_1^2 = 2\pi \left(6 \ln 2 - \tfrac{9}{4} \right) .$$

Příklad 27.r. Najděte náboj Q tělesa $\mathcal{T}$, které je popsáno nerovnostmi $z^2 \leq x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} + x$ a $y, z \geq 0$, jestliže je hustota náboje $\rho = x$.
Řešení. Náboj Q tělesa $\mathcal{T}$ najdeme pomocí trojného integrálu

$$Q = \iiint_{\mathcal{T}} \rho \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \iiint_{\mathcal{T}} x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, ,$$

kde ρ je hustota náboje. Jestliže napíšeme nerovnosti, které popisují těleso $\mathcal{T}$ ve tvaru

$$0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \, , \qquad x^2 + y^2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} + x \, , \quad y \geq 0 \, ,$$

můžeme použít Fubinuiovu větu ve tvaru

$$Q = \iiint_{\mathcal{T}} x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \iint_{\Pi^{(x,y)}} \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} x \,\mathrm{d}z = \iint_{\Pi^{(x,y)}} x\sqrt{x^2+y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,,$$

kde $\Pi^{(x,y)}$ je průmět tělesa $\mathcal{T}$ do roviny xy, který je popsán nerovnostmi

$$x^2 + y^2 \le \sqrt{x^2+y^2} + x \,, \quad y \ge 0 \,.$$

Integrál se můžeme pokusit najít pomocí polárních souřadnic

$$x = r\cos\varphi \,, \quad y = r\sin\varphi \,, \qquad r > 0 \,, \quad -\pi < \varphi < \pi \,, \qquad J = r \,.$$

Po této substituci dostaneme

$$Q = \iint_{\Pi^{(r,\varphi)}} r^3 \cos\varphi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,,$$

kde oblast $\Pi^{(r,\varphi)} \subset \mathbb{R}^2$ je dána nerovnostmi

$$r^2 \le r + r\cos\varphi \,, \quad r\sin\varphi > 0 \,, \qquad r > 0 \,, \quad -\pi < \varphi < \pi \,,$$

neboli

$$0 < r < 1 + \cos\varphi \,, \quad \sin\varphi > 0 \,, \quad -\pi < \varphi < \pi \,, \quad \text{tj.} \quad 0 < r < 1 + \cos\varphi \,, \quad 0 < \varphi < \pi \,.$$

Toto vyjádření je výhodné pro použití Fubiniovy věty, která dává

$$Q = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{1+\cos\varphi} r^3 \cos\varphi \,\mathrm{d}r = \tfrac{1}{4} \int_0^{\pi} (1+\cos\varphi)^4 \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,.$$

Podobně jako v příkladě **9.r.** v určitých integrálech lze pomocí metody integrace per partes odvodit, že pro každé $n = 2, 3, \ldots$ platí

$$\int_0^{\pi} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi} \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x \,, \qquad \int_0^{\pi} \cos^n x \,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi} \cos^{n-2} x \,\mathrm{d}x \,.$$

Pomocí tohoto vztahu pak dostaneme

$$Q = \tfrac{1}{4} \int_0^{\pi} \big(\cos\varphi + 4\cos^2\varphi + 6\cos^3\varphi + 4\cos^4\varphi + \cos^5\varphi\big) \,\mathrm{d}\varphi = \tfrac{7}{8}\pi \,.$$

Příklad 28.r. Najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose z tělesa $\mathcal{T}$, které je popsáno nerovnostmi $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$, $x^2 + y^2 - 2z^2 \ge 1$ a $z \ge 0$, jestliže je jeho hustota $\rho = z$.

Řešení. Moment setrvačnosti tělesa $\mathcal{T}$, které má hustotu ρ vzhledem k ose z najdeme pomocí trojného integrálu

$$J_z = \iiint_{\mathcal{T}} \rho\,(x^2+y^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \iiint_{\mathcal{T}} z(x^2+y^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \,.$$

které popisují těleso $\mathcal{T}$ lze zapsat ve tvaru

$$1 + 2z^2 \le x^2 + y^2 \le 4 - z^2 \,, \quad z \ge 0 \,.$$

Tento zápis je vhodný pro použití Fubiniovy věty ve tvaru

$$J_z = \int_{\Pi^{(z)}} \mathrm{d}z \int_{\mathcal{S}(z)} z(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde $\mathcal{S}(z)$ je řez tělesa $\mathcal{T}$ s rovinou $z =$ konst., který je dán nerovnostmi

$$1 + 2z^2 \le x^2 + y^2 \le 4 - z^2$$

a $\Pi^{(z)}$ je průmět tělesa $\mathcal{T}$ do osy z, pro který platí

$$1 + 2z^2 \le 4 - z^2\,, \quad z \ge 0\,, \quad \text{tj.} \quad 0 \le z \le 1\,.$$

Integrál přes množinu $\mathcal{S}(z)$ můžeme spočítat pomocí polárních souřadnic

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \qquad r > 0\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,, \qquad J = r\,.$$

V těchto souřadnicích je množina $\mathcal{S}(z)$ popsána nerovnostmi

$$\sqrt{1+2z^2} \le r \le \sqrt{4-z^2}\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,,$$

a tedy

$$J_z = \int_0^1 \mathrm{d}z \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{\sqrt{1+2z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} zr^3\,\mathrm{d}r = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^1 z\Big((4-z^2)^2 - (1+2z^2)^2\Big)\,\mathrm{d}z =$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi \int_0^1 (15z - 12z^3 - 3z^5)\,\mathrm{d}z = 2\pi\,.$$

Příklad 29.r. Najděte objem tělesa $\mathcal{T}$, které je dáno nerovnostmi $x^2 + 4y^2 \le z \le 3$.
Řešení. Objem V tělesa $\mathcal{T}$ najdeme pomocí trojného integrálu

$$V = \iiint_{\mathcal{T}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Nerovnosti, které popisují těleso $\mathcal{T}$ jsou zapsány ve tvaru vhodném pro použití Fubiniovy věty ve tvaru

$$V = \iint_{\Pi^{(x,y)}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{x^2+4y^2}^{3} \mathrm{d}z = \iint_{\Pi^{(x,y)}} (3 - x^2 - 4y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde oblast $\Pi^{(x,y)} \subset \mathbb{R}^2$ je dána nerovnostmi $x^2 + 4y^2 \le 3$.
Protože $\Pi^{(x,y)}$ je vnitřek elipsy se středem v počátku a poloosami $a = \sqrt{3}$ a $b = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, bude vhodné použít souřadnice

$$x = \sqrt{3}\,r\cos\varphi\,, \quad y = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,r\sin\varphi\,, \qquad r > 0\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,, \qquad J = abr = \tfrac{3}{2}\,r\,.$$

Po této substituci přejde oblast $\Pi^{(x,y)}$ na obdélník

$$0 < r < 1\,, \quad -\pi < \varphi < \pi$$

a integrál je

$$V = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 (3 - 3r^2)\, \tfrac{3}{2}\, r\, \mathrm{d}r = 9\pi \int_0^1 (r - r^3)\, \mathrm{d}r = \tfrac{9}{4}\, \pi\,.$$

Příklad 30.r. Najděte souřadnici x_T homogenního tělesa $\mathcal{T}$, které je popsáno nerovnostmi $9x^2 + 4y^2 \le z^2$, $0 \le z \le 3$ a $x \ge 0$.

ŘEŠENÍ. x–ovou souřadnici těžiště homogenního tělesa $\mathcal{T}$ najdeme ze vztahu

$$x_T = \frac{S_{yz}}{V}\,, \quad \text{kde} \quad V = \iiint_{\mathcal{T}} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \quad \text{a} \quad S_{yz} = \iiint_{\mathcal{T}} x\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

jsou objem a statický moment vzhledem k rovině yz tělesa $\mathcal{T}$.
Oba integrály budeme hledat pomocí Fubiniovy věty ve tvaru

$$V = \int_{\Pi^{(z)}} \mathrm{d}z \iint_{\mathcal{S}(z)} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,, \qquad S_{yz} = \int \Pi^{(z)}\, \mathrm{d}z \iint_{\mathcal{S}(z)} x\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,,$$

kde je $\mathcal{S}(z)$ je řez tělesa $\mathcal{T}$ rovinou $z =$ konst., tj. množina

$$9x^2 + 4y^2 \le z^2\,, \qquad x \ge 0\,,$$

a $\Pi^{(z)}$ je průmět tělesa $\mathcal{T}$ na osu z, tj. interval $0 \le z \le 3$.
Integrál přes množinu $\mathcal{S}(z)$ můžeme najít pomocí souřadnic

$$x = \tfrac{1}{3}\, r \cos\varphi\,, \quad y = \tfrac{1}{2}\, r \sin\varphi\,, \qquad r > 0\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,, \qquad J = \tfrac{1}{6}\, r\,.$$

V těchto souřadnicích je řez $\mathcal{S}(z)$ dán nerovnostmi

$$r^2 \le z^2\,, \quad \tfrac{1}{3}\, r \cos\varphi > 0\,, \qquad r > 0\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,.$$

A protože $z \ge 0$, lze tyto nerovnosti zapsat jako

$$0 < r < z\,, \quad -\tfrac{1}{2}\,\pi < \varphi < \tfrac{1}{2}\,\pi\,.$$

Po uvedené substituci tedy dostaneme

$$V = \tfrac{1}{6} \int_0^3 \mathrm{d}z \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^z r\, \mathrm{d}r = \tfrac{1}{12}\, \pi \int_0^3 z^2\, \mathrm{d}z = \tfrac{3}{4}\, \pi\,,$$

$$S_{yz} = \tfrac{1}{18} \int_0^3 \mathrm{d}z \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^z r^2 \cos\varphi\, \mathrm{d}r = \tfrac{1}{27} \int_0^3 z^3\, \mathrm{d}z = \tfrac{3}{4}\,.$$

Tedy x–ová souřadnice těžiště je $x_T = \frac{1}{\pi}$.

Příklad 31.r. Najděte hmotnost jednotkové koule, jestliže je její hustota $\rho = \mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

ŘEŠENÍ. Hmotnost tělesa $\mathcal{T}$ s hustotou ρ najdeme pomocí trojného integrálu

$$M = \iiint_{\mathcal{T}} \rho\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iiint_{\mathcal{T}} \mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\,.$$

V našem případě je těleso $\mathcal{T}$ jednotková koule, tj. množina, která je popsaná nerovností $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Protože hustota ρ i nerovnosti, které popisují těleso $\mathcal{T}$ závisí pouze na vzdálenosti od počátku souřadnic, tj. na výrazu $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, je výhodné použít sférické souřadnice, které jsou definované vztahy

$$x = r\cos\theta\cos\varphi\,, \quad y = \cos\theta\sin\varphi\,, \quad z = r\sin\theta\,, \quad r > 0, \ \ -\tfrac{1}{2}\pi < \theta < \tfrac{1}{2}\pi, \ \ 0 < \varphi < 2\pi,$$

ve kterých je $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Jakobián této substituce je

$$J = \det\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{pmatrix} = -r^2\cos\theta\,.$$

Protože $|J| = r^2\cos\theta$ přejde této substutuci integrál na

$$M = \iiint_{\widehat{\mathcal{T}}} \mathrm{e}^{-r} r^2 \cos\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi\,,$$

kde $\widehat{\mathcal{T}}$ je vzor množiny $\mathcal{T}$, tj. množina daná nerovnostmi

$$r^2 \leq 1\,, \quad r > 0\,, \quad \text{tj.} \quad 0 < r \leq 1\,, \quad -\tfrac{1}{2}\pi < \theta < \tfrac{1}{2}\pi\,, \quad 0 < \varphi < 2\pi\,.$$

Podle Fubiniovy věty pak je

$$M = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \,\mathrm{d}\theta \int_0^1 \mathrm{e}^{-r} r^2 \,\mathrm{d}r = 4\pi\Big[-\mathrm{e}^{-r}(r^2 + 2r + 2)\Big]_0^1 = 4\pi\big(2 - 5\mathrm{e}^{-1}\big)\,.$$

`Poznámka.` Sférické souřadnice je výhodné používat pokud se v nich zjednodušší nerovnosti, které popisují těleso $\mathcal{T}$, tj. hlavně v případech, ve kterých se proměnné x, y a z vyskytují hlavně v kombinaci $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Pokud si nejsme jisti, že se nám nerovnice, které popisují těleso $\mathcal{T}$ při použití sférických souřadnic nezjednodušší, je lepší použít pouze polární souřadnice

$$x = \rho\cos\varphi\,, \quad y = \rho\sin\varphi\,, \quad z = z\,, \qquad \rho > 0\,, \quad 0 < \varphi < 2\pi\,, \qquad J_1 = \rho\,.$$

Ke sférickým souřadnicím se pak dostaneme tak, že použijeme ještě jednou polární souřadnice

$$\rho = r\cos\theta\,, \quad z = r\sin\theta\,, \quad \varphi = \varphi \qquad r > 0\,, \quad -\tfrac{1}{2}\pi < \theta < \tfrac{1}{2}\pi\,, \quad 0 < \varphi < 2\pi\,, \quad J_2 = r\,.$$

Protože $\rho > 0$, musí být $\cos\theta > 0$, a tedy $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$. Jejich složením pak dostaneme sferické souřadnice, jejich jakobián je $J = J_1 J_2 = \rho r = r^2\cos\theta$.

Příklad 32.r. Najděte moment setrvačnosti homogenní koule s poloměrem R a hmotností M vzhledem k ose, která prochází jejím středem.

Řešení. Moment setrvačnosti tělesa $\mathcal{T}$ s hustotou $\rho = \rho(x, y, z)$ vzhledem k dané ose o najdeme pomocí integrálu

$$J = \iiint_{\mathcal{T}} \rho d^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z\,,$$

kde $d = d(x, y, z)$ je vzdálenost bodu $[x; y; z]$ tělesa $\mathcal{T}$ od osy o.

Homogenní koule $\mathcal{K}$ se středem v počátku a poloměrem R je popsána nerovností $x^2+y^2+z^2 \le R^2$. Nechť je její hustota $\rho = \rho_0 = \text{konst.}$ Pro její hmotnost a moment setrvačnosti vzhledem k ose o pak dostaneme

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{\mathcal{K}} \rho_0 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \rho_0 \iiint_{\mathcal{K}} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \,, \\ J &= \iiint_{\mathcal{K}} \rho_0 d^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \rho_0 \iiint_{\mathcal{K}} d^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \,, \end{aligned}$$

kde d je vzdálenost bodu koule $[x; y; z]$ od osy o. Protože se jedná o homogenní kouli, je moment setrvačnosti vzhledem ke každé ose, která prochází počátkem stejný. Speciálně platí

$$J = J_x = J_y = J_z \,,$$

kde J_x, J_y, resp. J_z, jsou momenty setrvačnosti vzhledem k osám x, y, resp. z, tj.

$$\begin{aligned} J_x &= \rho_0 \iiint_{\mathcal{K}} (y^2 + z^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \,, \\ J_y &= \rho_0 \iiint_{\mathcal{K}} (x^2 + z^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \,, \\ J_z &= \rho_0 \iiint_{\mathcal{K}} (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \,. \end{aligned}$$

Bylo by možné najít libovolný z těchto momentů setrvačnosti, ale je jednodušší spočítat jejich součet, tj.

$$3J = J_x + J_y + J_z = 2\rho_0 \iiint_{\mathcal{K}} (x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \,.$$

Protože se jedná o sféricky symetrickou úlohu, je výhodné použít sférické souřadnice

$$\begin{aligned} & x = r\cos\theta\cos\varphi \,, \quad y = r\cos\theta\sin\varphi \,, \quad z = r\sin\theta \,, \\ & r > 0 \,, \quad -\tfrac{1}{2}\pi < \theta < \tfrac{1}{2}\pi \,, \quad 0 < \varphi < 2\pi \,, \qquad |J| = r^2\cos\theta \,, \end{aligned}$$

ve kterých je $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ a vzor koule $\mathcal{K}$ je kvádr

$$0 < r \le R \,, \quad -\tfrac{1}{2}\pi < \theta < \tfrac{1}{2}\pi \,, \quad 0 < \varphi < 2\pi \,.$$

Podle věty o substituci a Fubiniovy věty je

$$\begin{aligned} M &= \rho_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^R r^2 \, \mathrm{d}r = \tfrac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 \,, \\ 3J &= 2\rho_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^R r^4 \, \mathrm{d}r = \tfrac{8}{5}\pi R^5 \rho_0 \,, \quad \text{neboli} \quad J = \tfrac{8}{15}\pi R^5 \rho_0 \,. \end{aligned}$$

Z prvního vztahu plyne, že $\rho_0 = \frac{3}{4\pi} R^{-3}$. Pokud to dosadíme do vztahu pro moment setrvačnosti J, dostaneme

$$J = \tfrac{2}{5} M R^2 \,.$$

Příklad 1. Pomocí jednoduchých integrálů v obou pořadích integrace vyjádřete integrál $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je:

a. trojúhelník s vrcholy $A = [1;1]$, $B = [5;1]$ a $C = [1;3]$;

b. trojúhelník s vrcholy $A = [1;1]$, $B = [5;1]$ a $C = [5;3]$;

c. trojúhelník s vrcholy $A = [1;1]$, $B = [5;1]$ a $C = [3;3]$;

d. lichoběžník s vrcholy $A = [0;0]$, $B = [4;0]$, $C = [6;2]$ a $D = [3;2]$;

e. čtyřúhelník s vrcholy $A = [0;2]$, $B = [3;0]$, $C = [4;1]$ a $D = [2;3]$

f. konečná oblast omezená přímkami $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{5}y = 1\,,\quad \frac{1}{4}x - \frac{1}{5}y = 1\,,\quad y = 0\,;$

g. oblast daná nerovnostmi $3x + y + 1 < 0\,,\quad x < 2y + 2\,,\quad x + 1 > 0\,;$

h. oblast daná nerovnostmi $3x < 2y + 3\,,\quad 3y < 2x + 1\,,\quad -1 < y < 1\,;$

k. oblast daná nerovnostmi $x^2 \le 4y + 4\,,\quad x + y \le 2\,;$

m. oblast daná nerovnostmi $0 < y < \sin x\,,\quad 0 < x < \pi\,;$

n. oblast daná nerovnostmi $0 < x < \mathrm{e}^y\,,\quad 0 < y < 1\,.$

a. $$\int_1^5 \mathrm{d}x \int_1^{\frac{1}{2}(7-x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_1^3 \mathrm{d}y \int_1^{7-2x} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,;$$

b. $$\int_1^5 \mathrm{d}x \int_1^{\frac{1}{2}(x+1)} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_1^3 \mathrm{d}y \int_{2y-1}^{5} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,;$$

c. $$\int_1^3 \mathrm{d}x \int_1^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_3^5 \mathrm{d}x \int_1^{6-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_1^3 f(x,y)\,\mathrm{d}y \int_y^{6-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,;$$

d. $$\int_0^3 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{2}{3}x} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_3^4 \mathrm{d}x \int_0^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_4^6 \mathrm{d}x \int_{x-4}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^2 \mathrm{d}y \int_{\frac{3}{2}y}^{4+y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,;$$

e. $$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{2-\frac{2}{3}x}^{2+\frac{1}{2}x} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_2^3 \mathrm{d}x \int_{2-\frac{2}{3}x}^{5-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_3^4 \mathrm{d}x \int_{x-3}^{5-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{3-\frac{3}{2}y}^{3+y} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}y \int_{3-\frac{3}{2}y}^{5-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \mathrm{d}y \int_{2y-4}^{5-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,;$$

f. $$\int_{-2}^0 \mathrm{d}x \int_{-5-\frac{5}{2}x}^{0} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_0^4 \mathrm{d}x \int_{-5+\frac{5}{4}x}^{0} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{-5}^0 \mathrm{d}y \int_{-2-\frac{2}{5}y}^{4+\frac{4}{5}y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,;$$

g. $$\int_{-1}^0 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}x-1}^{-3x-1} f(x,y)\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \mathrm{d}y \int_{-1}^{2y+2} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^2 \mathrm{d}y \int_{-1}^{-\frac{1}{3}(y+1)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,;$$

$$\left[\begin{array}{l}
\textbf{h}.\ \displaystyle\int_{-2}^{\frac{1}{3}} \mathrm{d}x \int_{-1}^{\frac{1}{3}(2x+1)} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{3}}^{1} \mathrm{d}x \int_{\frac{3}{2}(3-1)}^{\frac{1}{3}(2x+1)} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \\
\qquad\qquad + \displaystyle\int_{1}^{\frac{5}{3}} \mathrm{d}x \int_{\frac{3}{2}(x-1)}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_{\frac{1}{2}(3y-1)}^{\frac{1}{3}(2x+1)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,; \\
\textbf{k}.\ \displaystyle\int_{-6}^{2} \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{8} \mathrm{d}y \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,; \\
\textbf{m}.\ \displaystyle\int_{0}^{\pi} \mathrm{d}x \int_{0}^{\sin x} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{1} \mathrm{d}y \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,; \\
\textbf{n}.\ \displaystyle\int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{0}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{1}^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x \int_{\ln x}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{1} \mathrm{d}y \int_{0}^{\mathrm{e}^y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,.
\end{array}\right]$$

Příklad 2. Najděte integrál $\displaystyle\iint_\Omega xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ kde oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je definována nerovnostmi $y^2 \le 2x$ a $x - y \le 4$. $\big[90\,.\big]$

Příklad 3. Najděte obsah oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi $y^2 + 2 \le x + 4y$ a $x + y^2 + 2 \le 2y$. $\big[\frac{1}{3}\,.\big]$

Příklad 4. Najděte x–ovou souřadnici těžiště homogenní oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi $xy \ge 1$, $x + y \le \frac{5}{2}$ a $x \ge 0$. $\left[x_T = \dfrac{9}{2(15 - 16\ln 2)}\,, \quad P = \frac{1}{8}\,(15 - 16\ln 2)\,.\right]$

Příklad 5. Najděte souřadnice těžiště homogenní oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ která je popsána nerovnostmi $0 < 5x - y + 1$ a $2x^2 + 4x < y$. $\big[x_T = \frac{1}{4}\,, \quad y_T = \frac{41}{45}\,, \quad P = \frac{9}{8}\,.\big]$

Příklad 6. Najděte sílu F, která působí na plochu $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi $x^2 + y^2 \le 9$, $x^2 - y^2 \ge 1$, $x > 0$ a na kterou působí tlak $p(x, y) = x$. $\big[\frac{32}{3}\,.\big]$

Příklad 7. Najděte objem tělesa $\mathcal{T}$, které je popsáno nerovnostmi $0 \le z \le x^2 + y^2$ a $x^2 \le y \le 1$. $\big[\frac{88}{105}\,.\big]$

Příklad 8. Najděte objem tělesa $\mathcal{T}$, které je popsáno nerovnostmi $0 \le z \le x^2 + y^2$, $x + y \le 1$, $x \ge 0$ a $y \ge 0$. $\big[\frac{1}{6}\,.\big]$

Příklad 9. Najděte souřadnice těžiště homogenního tělesa $\mathcal{T}$, které je dáno nerovnicemi $0 \le z \le x^2 + y^2$, $-1 \le x \le 1$ a $-1 \le y \le 1$. $\big[x_T = y_T = 0\,, \quad z_T = \frac{7}{15}\,, \quad V = \frac{8}{3}\,.\big]$

Příklad 10. Najděte objem tělesa $\mathcal{T}$, které je popsáno nerovnostmi $x + y + z \ge 3$, $x^2 + y^2 \le 4$ a $z \le 1$. $\big[\frac{20}{3} - 2\pi\,.\big]$

Příklad 11. Najděte souřadnice těžiště homogenní oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je definována pomocí nerovnosti $x^2 + y^2 \le x + y$. $\big[x_T = y_T = \frac{1}{2}\,, \quad P = \frac{1}{2}\,\pi\,.\big]$

Příklad 12. Najděte obsah oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je popsána pomocí nerovností $2x \le x^2 + y^2 \le 4x$. $\big[3\pi\,.\big]$

Příklad 13. Pomocí polárních souřadnic najděte obsah oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je určena nerovnostmi $(x^2 + y^2)^3 \le 8xy(x^2 - y^2)$, $x, y \ge 0$. $\big[\frac{1}{2}\,.\big]$

Příklad 14. Najděte obsah oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnicí $2x^2 + 3y^2 \le 4x$. $\Big[\sqrt{\frac{2}{3}}\,\pi\,.\Big]$

Příklad 15. Pomocí substituce $x = r\cos^3\varphi$ a $y = r\sin^3\varphi$, kde $r > 0$ a $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$ najděte obsah oblasti, která je popsána nerovnicemi $x^{2/3} + y^{2/3} \le 4$, $x, y \ge 0$. $\left[\frac{3}{8}\pi\,.\right]$

Příklad 16. Najděte obsah oblasti Ω, která je definována nerovnostmi $(x-y)^2 + y^2 \le 4$. $\left[\pi\,.\right]$

Příklad 17. Najděte těžiště homogenní oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je definována nerovnostmi $x \le y^2 \le 4x$ a $2y \le x^2 \le 4y$.
$\left[x_T = \frac{3}{40}\left(4^{4/3}-1\right)\left(4^{5/3}-2^{5/3}\right), \quad y_T = \frac{3}{40}\left(4^{5/3}-1\right)\left(4^{4/3}-2^{4/3}\right), \quad P = 2\,.\right]$

Příklad 18. Najděte objem tělesa $\mathcal{T}$, které je popsáno nerovnostmi $4z \le x^2 + y^2 \le 2x$. $\left[\frac{3}{8}\pi\,.\right]$

Příklad 19. Najděte objem tělesa $\mathcal{T}$, které je popsáno nerovnostmi $4z + x^2 + y^2 \le 24$, $x^2 + y^2 \le 4z^2$, $x, z \ge 0$. $\left[\frac{64}{3}\pi\,.\right]$

Příklad 20. Najděte objem tělesa $\mathcal{T}$, které je popsáno nerovnostmi $x^2 + y^2 \le 2z$ a $z - 4 \le \sqrt{x^2+y^2}$. $\left[\frac{128}{3}\pi\,.\right]$

Příklad 21. Najděte objem tělesa $\mathcal{T}$, které je popsáno nerovnostmi $x^2 + y^2 + 2 \le 2z$, $x^2 + y^2 + z \le 4$ a $x^2 + y^2 \ge 1$. $\left[\frac{3}{4}\pi\,.\right]$

Příklad 22. Najděte hmotnost tělesa $\mathcal{T}$, které je popsáno nerovnostmi $x^2 + y^2 + z^2 \le 2$, $x^2 + y^2 \le 1$ a $z \ge 0$ a jehož hustota je $\rho = z$. $\left[\frac{3}{4}\pi\,.\right]$

Příklad 23. Najděte x–ovou souřadnici homogenního tělesa $\mathcal{T}$, které je definováno pomocí nerovností $0 \le z \le 2x^2 + 3y^2 \le 6$, $x \ge 0$. $\left[x_T = \frac{8}{5\pi}, \quad V = \frac{3\sqrt{6}}{2}\pi\,.\right]$

Příklad 24. Najděte objem tělesa $\mathcal{T}$, které je popsáno pomocí nerovností $x^2 + 2y^2 + z \le 8$ a $2x^2 + 4y^2 - z \le 4$. $\left[32\sqrt{2}\,\pi\,.\right]$

Příklad 25. Najděte z–ovou souřadnici homogenního tělesa $\mathcal{T}$, které je definováno pomocí nerovností $z^2 \le 4x^2 + y^2 \le 4$, $z \ge 0$. $\left[z_T = \frac{3}{4}, \quad V = \frac{8}{3}\pi\,.\right]$

Příklad 26. Najděte z–ovou souřadnici homogenního tělesa $\mathcal{T}$, které je definováno pomocí nerovnost $x^2 + y^2 + z^2 \le 2z$. $\left[z_T = 1, \quad V = \frac{4}{3}\pi\,.\right]$

Příklad 27. Pomocí substituce do sférických souřadnic najděte objem tělesa $\mathcal{T}$, které je popsáno nerovnostmi $(x^2 + y^2 + z^2)^3 \le 12xyz$, $x, y, z \ge 0$. $\left[\frac{2}{3}\,.\right]$

Příklad 28. Najděte x–ovou souřadnici těžiště homogenního tělesa $\mathcal{T}$, které je dáno nerovnostmi $2x \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4x$. $\left[x_T = \frac{15}{7}, \quad V = \frac{28}{3}\pi\,.\right]$

Příklad 29. Najděte objem tělesa $\mathcal{T}$, které je popsáno nerovnostmi $1 \le 2x + 3y - z \le 2$, $2 \le 3x - y + 2z \le 4$ a $3 \le x + 2y - z \le 6$. $\left[3\,.\right]$

Příklad 30. Najděte souřadnice těžiště homogenního tělesa $\mathcal{T}$, které je definováno pomocí nerovnic $x < y < 2x$, $2y < z < 4y$ a $z < x^2 < 4z$.
$\left[x_T = 17, \quad y_T = \frac{4318}{147}, \quad z_T = \frac{21590}{217}, \quad V = 7812\,.\right]$
