Křivkové a plošné integrály prvního druhu

Intergál přes regulární křivku $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$

Nechť je $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$. Jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $\boldsymbol{\varphi} : (a,b) \to \mathcal{C}$, tj. $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ nebo ve složkách $\mathbf{x} = \big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\big)$, které má na intervalu (a,b) spojitou derivaci $\boldsymbol{\tau}(t) \neq 0$, nazývá se množina $\mathcal{C}$ prostá regulární křivka.
Zobrezení $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, neboli $x_k = x_k(t)$, kde $k = 1, 2, \ldots, n$ a $t \in (a,b)$ nazýváme parametrické rovnice křivky $\mathcal{C}$. Vektor $\boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{x}'(t) = \big(x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t)\big)$ je tečný vektor ke křivce $\mathcal{C}$ v bodě $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$.
Element délky $\mathrm{d}s$ prosté regulární křivky $\mathcal{C}$ s parametrickými rovnicemi $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ je

$$\mathrm{d}s = \big\|\mathbf{x}'(t)\big\|\,\mathrm{d}t = \sqrt{(x_1')^2(t) + (x_2')^2(t) + \ldots + (x_n')^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

a křivkový integrál prvního druhu funkce $f(\mathbf{x})$ přes prostou regulární křivku $\mathcal{C}$ je

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}s &= \int_a^b f\big(\mathbf{x}(t)\big)\,\big\|\mathbf{x}'(x)\big\|\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_a^b f\big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\big)\,\sqrt{(x_1')^2(t) + (x_2')^2(t) + \ldots + (x_n')^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Intergál přes regulární plochu $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$

Nechť je $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ a existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $\boldsymbol{\varphi} : \Omega \to \mathcal{S}$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, a funkce $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(u,v) = \mathbf{x}(u,v)$ mají na Ω spojité parciální derivace. Nechť jsou vektory

$$\boldsymbol{\tau}_u(u,v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right), \qquad \boldsymbol{\tau}_v(u,v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

pro každé $(u,v) \in \Omega$ lineárně nezávislé. Pak se $\mathcal{S}$ nazývá regulární plocha v $\mathbb{R}^3$ a rovnice $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v)$, tj.

$$x = x(u,v)\,, \quad y = y(u,v)\,, \quad z = z(u,v)\,, \qquad (u,v) \in \Omega\,,$$

nazýváme parametrické rovnice regulární plochy $\mathcal{S}$.
Vektory $\boldsymbol{\tau}_u(u,v)$ a $\boldsymbol{\tau}_v(u,v)$ jsou lineárně nezávislé tečné vektory k ploše $\mathcal{S}$. Element obsahu $\mathrm{d}S$ regulární plochy $\mathcal{S}$ je $\mathrm{d}S = P(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$, kde $P(u,v)$ je obsah rovnoběžníka se stanami $\boldsymbol{\tau}_u(u,v)$ a $\boldsymbol{\tau}_v(u,v)$, který lze najít pomocí jednoho ze vztahů

$$P(u,v) = \big\|\boldsymbol{\tau}_u \times \boldsymbol{\tau}_v\big\| \qquad \text{nebo} \qquad P^2(u,v) = \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{\tau}_u\cdot\boldsymbol{\tau}_u & \boldsymbol{\tau}_u\cdot\boldsymbol{\tau}_v \\ \boldsymbol{\tau}_v\cdot\boldsymbol{\tau}_u & \boldsymbol{\tau}_v\cdot\boldsymbol{\tau}_v\end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ je vektorový a $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ skalární součin vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.
Nechť je $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ regulární plocha s parametrickými rovnicemi $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v)$, kde $(u,v) \in \Omega$, a $f(\mathbf{x})$ funkce definovaná na $\mathcal{S}$. Pak je plošný integrál prvního druhu funkce $f(\mathbf{x})$ přes plochu $\mathcal{S}$ definován jako

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S &= \iint_{\Omega} f\big(\mathbf{x}(u,v)\big)P(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\ &= \iint_{\Omega} f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)\big\|\boldsymbol{\tau}_u \times \boldsymbol{\tau}_v\big\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\ &= \iint_{\Omega} f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)\sqrt{\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{\tau}_u\cdot\boldsymbol{\tau}_u & \boldsymbol{\tau}_u\cdot\boldsymbol{\tau}_v \\ \boldsymbol{\tau}_v\cdot\boldsymbol{\tau}_u & \boldsymbol{\tau}_v\cdot\boldsymbol{\tau}_v\end{pmatrix}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\end{aligned}$$

Pokud je regulární plocha $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ zadána rovnicí $z = z(x,y)$, kde $(x,y) \in \Omega$, je element $\mathrm{d}S$ plochy roven

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

a plošný integrál prvního duhu funkce $f(x,y,z)$ přes plochu $\mathcal{S}$ lze najít pomocí dvojného integrálu

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{\Omega} f\big(x,y,z(x,y)\big)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Intergál přes regulární k–rozměrnou nadplochu v $\mathbb{R}^n$

Nechť je $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ a existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $\boldsymbol{\varphi} : G \to \mathcal{S}$, tj. $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) = \mathbf{x}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ kde G je otevřená množina v $\mathbb{R}^k$, které je třídy $C_1(G)$. Nechť má matice

$$\mathbf{W}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_k} & \frac{\partial x_2}{\partial u_k} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_k} \end{pmatrix}$$

pro každé $\mathbf{u} \in G$ hodnost k. Pak se $\mathcal{S}$ nazývá regulární k–rozměrná nadplocha v $\mathbb{R}^n$ a rovnice $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) = \mathbf{x}(\mathbf{u})$ jsou parametrické rovnice nadplochy $\mathcal{S}$.
Geometricky jsou vektory

$$\boldsymbol{\tau}_r(\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_r}, \frac{\partial x_2}{\partial u_r}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial u_r}\right), \qquad r = 1,\, 2,\, \ldots,\, k\,,$$

v každém bodě $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ lineárně nezávislé tečné vektory k nadploše $\mathcal{S}$. Elementární k–rozměrný objem (míra) $\mu_{\mathcal{S}}$ regulární k-rozměrné plochy v $\mathbb{R}^n$ s parametrickými rovnicemi $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u})$ je

$$\mathrm{d}\mu_{\mathcal{S}} = P(\mathbf{u})\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2 \ldots \mathrm{d}u_k\,.$$

kde $P(\mathbf{u}) = P(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ je k–rozměrný objem rovnoběžnostěnu se stranami $\boldsymbol{\tau}_1,\, \boldsymbol{\tau}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{\tau}_k$, tj.

$$P^2(\mathbf{u}) = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1 & \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 & \cdots & \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_k \\ \boldsymbol{\tau}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_1 & \boldsymbol{\tau}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 & \cdots & \boldsymbol{\tau}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\tau}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_1 & \boldsymbol{\tau}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_2 & \cdots & \boldsymbol{\tau}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k \end{pmatrix} = \det\big(\mathbf{W}\mathbf{W}^T\big)\,.$$

Je-li funkce $f(\mathbf{x})$ definována na regulární k–rozměrné nadploše $\mathcal{S}$ v $\mathbb{R}^n$ s parametrickými rovnicemi $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$, kde $(u_1, u_2, \ldots, u_k) \in G$, je integrál prvního druhu funkce $f(\mathbf{x})$ přes nadplochu $\mathcal{S}$ definován jako

$$\int_{\mathcal{S}} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{S}} = \int_G f\big(\mathbf{x}(u_1, u_2, \ldots, u_k)\big)\,P(u_1, u_2, \ldots, u_k)\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2 \ldots \mathrm{d}u_k\,.$$

Příklad 1.r. Spočítejte křivkový integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \sqrt{2y}\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C}$ je oblouk cykloidy s parametrickými rovnicemi $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, kde $0 < t < 2\pi$.

ŘEŠENÍ. Protože $x'(t) = 1 - \cos t$ a $y'(t) = \sin t$, je element oblouku křivky

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Z toho plyne, že daný křivkový integrál je

$$\int_{\mathcal{C}} \sqrt{2y}\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} 2(1-\cos t)\,\mathrm{d}t = \Big[2(t-\sin t)\Big]_0^{2\pi} = 4\pi\,.$$

Příklad 2.r. Najděte délku logaritmické spirály $x = \mathrm{e}^{-4\varphi}\cos 3\varphi$, $y = \mathrm{e}^{-4\varphi}\sin 3\varphi$, kde $\varphi > 0$.

ŘEŠENÍ. Délku s křivky $\mathcal{C}$ najdeme pomocí křivkového integrálu $s = \displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s$. Protože

$$x'(\varphi) = \mathrm{e}^{-4\varphi}(-4\cos 3\varphi - 3\sin 3\varphi)\,, \quad y'(\varphi) = \mathrm{e}^{-4\varphi}(-4\sin 3\varphi + 3\cos 3\varphi)$$

je element délky křivky roven

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,\mathrm{d}\varphi = 5\mathrm{e}^{-4\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Délka křivky $\mathcal{C}$ tedy je

$$s = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s = \int_0^{\infty} 5\mathrm{e}^{-4\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \tfrac{5}{4}\,.$$

Příklad 3.r. Najděte hmotnost křivky $\mathcal{C}$, která je dána parametrickými rovnicemi $x = t\cos t$, $y = t\sin t$ a $z = t$, kde $0 \le t \le \pi$, a která má hustotu $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

ŘEŠENÍ. Hmotnost M křivky $\mathcal{C}$ s hustotou ρ najdeme pomocí křivkového integrálu

$$M = \int_{\mathcal{C}} \rho\,\mathrm{d}s = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s\,.$$

Z derivací parametrických rovnic

$$x' = \cos t - t\sin t\,, \quad y' = \sin t + t\cos t\,, \quad z' = 1$$

dostaneme

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}t\,,$$

a tedy hmotnost křivky $\mathcal{C}$ je

$$M = \int_0^{\pi} t\sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\tfrac{1}{3}\,(2+t^2)^{3/2}\Big]_0^{\pi} = \tfrac{1}{3}\Big((2+\pi^2)^{3/2} - 2\sqrt{2}\Big),$$

kde jsme v posledním integrálu udělali substituci $u = 2 + t^2$.

Příklad 4.r. Najděte náboj křivky $\mathcal{C}$, která je dána parametrickými rovnicemi $x = \mathrm{e}^{-t}\cos t$, $y = \mathrm{e}^{-t}\sin t$ a $z = \mathrm{e}^{-t}$, kde $t > 0$, a která má hustotu náboje $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

ŘEŠENÍ. Náboj Q křivky $\mathcal{C}$, která má hustotu náboje ρ najdeme křivkovým integrálem

$$Q = \int_{\mathcal{C}} \rho\,\mathrm{d}s = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}s\,.$$

Z parametrických rovnic křivky $\mathcal{C}$ dostaneme

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-t}$$

a protože

$$x' = \mathrm{e}^{-t}(-\cos t - \sin t)\,, \quad y' = \mathrm{e}^{-t}(-\sin t + \cos t)\,, \quad z' = -\mathrm{e}^{-t},$$

je

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-t}.$$

Tey náboj křivky $\mathcal{C}$ je

$$Q = \int_0^\infty \sqrt{6}\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,.$$

Příklad 5.r. Najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose z homogenní úsečky $\overline{AB}$, kde $A = [-1; 0; -2]$ a $B = [1; 1; 0]$.

Řešení. Moment setrvačnosti J_z křivky $\mathcal{C}$ vzhledem k ose z (s hustotou $\rho = 1$) najdeme pomocí křivkového integrálu

$$J_z = \int_{\mathcal{C}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s$$

Parametrické rovnice úsečky z bodu A do bodu B jsou obecně $\mathbf{x} = A + (B-A)t$, kde $0 \le t \le 1$. Naše úsečka tedy má parametrické rovnice

$$x = -1+2t\,, \quad y = t\,, \quad z = -2+2t\,, \qquad 0 \le t \le 1\,.$$

Protože $x' = 2$, $y' = 1$ a $z' = 2$ je $\mathrm{d}s = 3\,\mathrm{d}t$ a hledaný moment setrvačnosti

$$J_z = \int_0^1 \big((-1+2t)^2+t^2\big)\,3\,\mathrm{d}t = 3\int_0^1 (5t^2-4t+1)\,\mathrm{d}t = 2\,.$$

Příklad 6.r. Najděte y–ovou souřadnici těžiště homogenní rovinné křivky $\mathcal{C}$, která je dána vztahy $x^2+y^2 = 4x$, $y \le x$

Řešení. y–ovou souřadnici homogenní křivky $\mathcal{C}$ najdeme pomocí vztahu

$$y_T = \frac{S_x}{\ell}\,, \quad \text{kde} \quad \ell = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s\,, \quad S_x = \int_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}s$$

jsou délka křivky $\mathcal{C}$ a statický moment křivky $\mathcal{C}$ vzhledem k ose y.

Nejprve musíme najít parametrické rovnice křivky. To lze udělat různým způsobem. Například pokud použijeme polární souřadnice

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \qquad r > 0\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,,$$

dostaneme z rovnice křivky

$$x^2+y^2 = 4x\,, \quad y \le x \;\mapsto\; r^2 = 4r\cos\varphi\,, \quad r\sin\varphi \le r\cos\varphi\,,$$

neboli

$$r = 4\cos\varphi\,, \quad \sin\varphi \le \cos\varphi\,, \qquad \cos\varphi > 0\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,, \quad \text{tj.} \quad -\tfrac{1}{2}\pi < \varphi < \tfrac{1}{4}\pi\,.$$

Parametrické rovnice dané křivky tedy jsou

$$x = 4\cos^2\varphi\,, \quad y = 4\cos\varphi\sin\varphi\,, \qquad -\tfrac{1}{2}\,\pi < \varphi < \tfrac{1}{4}\,\pi\,.$$

A protože

$$x' = -8\cos\varphi\sin\varphi = -4\sin 2\varphi\,, \quad y' = 4(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 4\cos 2\varphi\,,$$

je element délky křivky

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,\mathrm{d}\varphi = 4\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Z toho plyne, že

$$\ell = \int_{-\pi/2}^{\pi/4} 4\,\mathrm{d}\varphi = 3\pi\,, \quad M_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/4} 16\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \Big[8\sin^2\varphi\Big]_{-\pi/2}^{\pi/4} = -4\,.$$

Tedy hledaná souřadnice těžiště je $y_T = -\frac{4}{3\pi}$.

Příklad 7.r. Najděte z–ovou souřadnici těžiště homogenní křivky $\mathcal{C}$, která je dána vztahy $2x^2 + z^2 = 2$, $x - y = 0$ a $z \geq 0$.

Řešení. z–ovou souřadnici homogenní křivky $\mathcal{C}$ najdeme ze vztahu

$$z_T = \frac{S_{xy}}{\ell}\,, \quad \text{kde} \quad \ell = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s\,, \quad S_{xy} = \int_{\mathcal{C}} z\,\mathrm{d}s\,,$$

kde ℓ je délka křivky $\mathcal{C}$ a S_{xy} je statický moment křivky vzhledem k rovině xy. Nejprve musíme najít parametrické rovnice křivky. Protože je $z \geq 0$, plyne z první rovnice $z = \sqrt{2(1 - x^2)}$, kde $-1 \leq x \leq 1$. A pokud zvolíme za parametr proměnnou x, můžeme psát parametrické rovnice křivky $\mathcal{C}$ jako

$$x = x\,, \quad y = x\,, \quad z = \sqrt{2(1 - x^2)}\,, \qquad -1 \leq x \leq 1\,.$$

Protože

$$x' = y' = 1\,, \quad z' = -\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{1 - x^2}}\,,$$

je při této parametrizaci element délky křívky

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}}\,.$$

Tedy dostaneme

$$\ell = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \Big[\sqrt{2}\arcsin x\Big]_{-1}^{1} = \sqrt{2}\,\pi\,, \quad S_{xy} = \int_{-1}^{1} 2\,\mathrm{d}x = 4\,.$$

a z–tová souřadnice těžiště křivky $\mathcal{C}$ je $z_T = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

Příklad 8.r. Najděte délku křivky $\mathcal{C}$, která je dána rovnicemi $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ a $x + 2y = 5$.

Řešení. Délku ℓ křivky $\mathcal{C}$ najdeme pomocí křivkového integrálu $\ell = \displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s$. Pro vypočet integrálu musíme nejprve najít parametrické rovnice křivky $\mathcal{C}$.

Z druhé rovnice plyne $x = 5-2y$. Pokud tento vztah dosadíme do první rovnice, dostaneme

$$25 - 20y + 4y^2 + y^2 + z^2 = 6\,, \quad \text{tj.} \quad 5y^2 - 20y + z^2 = -19\,, \quad \text{neboli} \quad 5(y-2)^2 + z^2 = 1\,.$$

Poslední rovnice popisuje elipsu se středem v bodě $S = [y_S; z_S] = [2; 0]$ a můžeme ji popsat pomocí parametrických rovnic

$$y - 2 = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \cos\varphi\,, \quad z = \sin\varphi\,, \qquad -\pi < \varphi < \pi\,.$$

A protože $x = 5 - 2y$, jsou parametrické rovnice dané křivky

$$x = 1 - \tfrac{2}{\sqrt{5}} \cos\varphi\,, \quad y = 2 + \tfrac{1}{\sqrt{5}} \cos\varphi\,, \quad z = \sin\varphi\,, \qquad -\pi < \varphi < \pi\,.$$

Pro element délky křivky $\mathrm{d}s$ dostaneme při uvedené parametrizaci $\mathrm{d}s = \mathrm{d}\varphi$, a tedy její délka je

$$\ell = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}s = 2\pi\,.$$

Příklad 9.r. Najděte x–ovou souřadnici těžiště homogenní křivky $\mathcal{C}$, která je hranice oblasti $x^2 + y^2 \le 4$ a $0 \le y \le x$.

Řešení. x–ovou souřadnici těžiště homogenní křivky $\mathcal{C}$ najdeme pomocí vztahu

$$x_T = \frac{S_y}{\ell}\,, \quad \text{kde} \quad \ell = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s\,, \quad S_y = \int_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}s\,,$$

je délka křivky $\mathcal{C}$, resp. její statický moment vzhledem k ose y.
Křivka $\mathcal{C}$ se skládá ze tří regulárních částí:

1. část $\mathcal{C}_1$ je úsečka $y = 0$ a $0 \le x \le 2$, kde lze za parametr zvolit proměnnou x, tj. $x = x$, $y = 0$, kde $0 \le x \le 2$; $\mathrm{d}s = \mathrm{d}x$;
2. část $\mathcal{C}_2$ je oblouk kružnice $x^2 + y^2 = 4$, kde $0 \le y \le x$, která má parametrické rovnice $x = 2\cos\varphi$, $y = 2\sin\varphi$, kde $0 \le \varphi \le \frac{1}{4}\pi$; $\mathrm{d}s = 2\,\mathrm{d}\varphi$;
3. část $\mathcal{C}_3$ je úsečka $x = y$ s počátečním bodem $A = [0; 0]$ a koncovým bodem $B = [\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, jejíž parametrické rovnice jsou $x = \sqrt{2}\,t$, $y = \sqrt{2}\,t$, kde $0 \le t \le 1$; $\mathrm{d}s = 2\,\mathrm{d}t$.

Pak dostaneme

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}s + \int_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}s + \int_{\mathcal{C}_3} \mathrm{d}s = \int_0^2 \mathrm{d}x + \int_0^{\pi/4} 2\,\mathrm{d}\varphi + \int_0^1 2\,\mathrm{d}t = 4 + \tfrac{1}{2}\pi\,,\\
S_y &= \int_{\mathcal{C}_1} x\,\mathrm{d}s + \int_{\mathcal{C}_2} x\,\mathrm{d}s + \int_{\mathcal{C}_3} x\,\mathrm{d}s = \int_0^2 x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/4} 4\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \int_0^1 2\sqrt{2}\,t\,\mathrm{d}t = \\
&= 2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 + 3\sqrt{2}\,,\\
x_T &= \frac{4 + 6\sqrt{2}}{8 + \pi}\,.
\end{aligned}$$

Příklad 10.r. Najděte integrál $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}S$, kde $\mathcal{S}$ je plocha daná parametrickými rovnicemi $x = u\cos v$, $y = u\sin u$, $z = v$, kde $0 < u < 1$ a $0 < v < 2\pi$.

Řešení. Z parametrických rovnic postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_u &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) = (\cos v, \sin v, 0)\,, \\ \boldsymbol{\tau}_v &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = (-u\sin v, u\cos v, 1)\,, \\ \boldsymbol{\tau}_u \times \boldsymbol{\tau}_v &= (\sin v, -\cos v, u)\,, \qquad \left\|\boldsymbol{\tau}_u \times \boldsymbol{\tau}_v\right\| = \sqrt{1+u^2}\,. \end{aligned}$$

Element plochy $\mathcal{S}$ je v těchto souřadnicích $\mathrm{d}S = \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ a protože $\sqrt{x^2+y^2} = u$, je hledaný integrál

$$\iint_{\mathcal{S}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}S = \iint_{\Omega} u\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,$$

kde Ω je obdélník $0 < u < 1$ a $0 < v < 2\pi$. Pokud použijeme Fubiniovu větu, dostaneme

$$\iint_{\mathcal{S}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}v \int_0^1 u\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \tfrac{2}{3}\,\pi\big(2\sqrt{2}-1\big)\,.$$

Příklad 11.r. Najděte obsah plochy $\mathcal{S}$, která je dána parametrickými rovnicemi $x = 2r\cos^2\varphi$, $y = r\sin^2\varphi$, $z = r$, kde $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$ a $0 < r < 1$.

Řešení. Obsah P plochy $\mathcal{S}$ najdeme pomocí plošného integrálu $P = \displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S$. Protože plochu již máme dánu pomocí parametrických rovnic, najdeme element plochy $\mathrm{d}S$. Postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_r &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r}\right) = \big(2\cos^2\varphi, \sin^2\varphi, 1\big)\,, \\ \boldsymbol{\tau}_\varphi &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) = \big(-4r\cos\varphi\sin\varphi, 2r\cos\varphi\sin\varphi, 0\big)\,, \\ \boldsymbol{\tau}_r \times \boldsymbol{\tau}_\varphi &= \big(-2r\cos\varphi\sin\varphi, -4r\cos\varphi\sin\varphi, 4r\cos\varphi\sin\varphi\big)\,, \\ \mathrm{d}S &= \left\|\boldsymbol{\tau}_r \times \boldsymbol{\tau}_\varphi\right\| = 6r\cos\varphi\sin\varphi = 3r\sin 2\varphi\,. \end{aligned}$$

Tedy

$$P = \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}s = \iint_{\Omega} 3r\sin 2\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

kde množina $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je dána nerovnostmi $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$ a $0 < r < 1$. Podle Fubiniovy věty pak je

$$P = 3\int_0^1 r\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 3\Big[\tfrac{1}{2}\,r^2\Big]_0^1\Big[-\tfrac{1}{2}\cos 2\varphi\Big]_0^{\pi/2} = \tfrac{3}{2}\,.$$

Příklad 12.r. Najděte obsah části roviny $2x - 2y + z = 1$, kde $x^2 + y^2 + z \le 1$.

Řešení. Obsah P plochy $\mathcal{S}$ najdeme pomocí plošného integrálu $P = \displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S$. Protože z rovnice, která popisuje plochu lze snadno vyjádřit z jako funkci x a y, je nejjednodušší zvolit tyto proměnné za parametry a psát

$$z = 1 - 2x + 2y\,, \qquad x^2+y^2+z = x^2+y^2+1-2x+2y \le 1\,, \quad \text{tj.} \quad x^2+y^2-2x+2y \le 0\,.$$

Protože je plocha dána jako funkce $z = z(x, y)$ lze najít okamžitě element plochy

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Tedy hledaný obsah je

$$P = \iint_\Omega 3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde Ω je oblast daná nerovností

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y \le 0 \implies (x-1)^2 + (y+1)^2 \le 2\,,$$

tj. kruh se středem v bodě $S = [1; -1]$ a poloměrem $R = \sqrt{2}$. Protože obsah tohoto kruhu je roven $\pi R^2 = 2\pi$, je obsah dané plochy $P = 6\pi$.

Příklad 13.r. Najděte obsah části kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $z > 3$.

Řešení. Obsah P plochy $\mathcal{S}$ najdeme pomocí plošného integrálu $P = \iint_\mathcal{S} \mathrm{d}S$. můsíme najít parametrické rovnice plochz $\mathcal{S}$. To můžeme udělar různě. Protože se jedná o rotační plochu, zavedeme cylindrické souřadnice

$$x = r\cos\varphi\,,\quad y = r\sin\varphi\,,\quad z = z\,,\qquad r > 0\,,\quad -\pi < \varphi < \pi\,,\quad -\infty < z < \infty\,.$$

V těchto souřadnicích dostaneme pro rovnici plochy vztah

$$r^2 + z^2 = 25\,,\qquad r > 0\,,\quad -\pi < \varphi < \pi\,,\quad z > 3\,.$$

A protože $z > 0$ lze tyto vztahy zapsat jako

$$z = \sqrt{25 - r^2}\,,\qquad r > 0\,,\quad -\pi < \varphi < \pi\,,\quad \sqrt{25 - r^2} > 3\,,\quad \text{tj.}\quad 0 < r < 4\,.$$

Tím dostaneme parametrické rovnice plochy $\mathcal{S}$ ve tvaru

$$x = r\cos\varphi\,,\quad y = r\sin\varphi\,,\quad z = \sqrt{25 - r^2}\,,\qquad 0 < r < 4\,,\quad -\pi < \varphi < \pi\,.$$

Nyní už můžeme najít element plochy $\mathrm{d}S$ standardním způsobem:

$$\boldsymbol{\tau}_r = \left(\cos\varphi, -\sin\varphi, \frac{-r}{\sqrt{25 - r^2}}\right),\qquad \boldsymbol{\tau}_\varphi = \big(-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0\big)\,,$$

$$\boldsymbol{\tau}_r \times \boldsymbol{\tau}_\varphi = \left(\frac{r^2\cos\varphi}{\sqrt{25 - r^2}}, \frac{r^2\sin\varphi}{\sqrt{25 - r^2}}, r\right),\qquad \mathrm{d}S = \big\|\boldsymbol{\tau}_r \times \boldsymbol{\tau}_\varphi\big\|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{5r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{25 - r^2}}\,.$$

Tedy obvsah dané plochy je

$$P = \iint_\Omega \frac{5r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{25 - r^2}}\,,$$

kde Ω je obdélník $0 < r < 4$ a $-\pi < \varphi < \pi$. Podle Fubiniovy věty pak je

$$P = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^4 \frac{5r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{25 - r^2}} = 2\pi\Big[-5\sqrt{25 - r^2}\Big]_0^4 = 20\pi\,.$$

Příklad 14.r. Najděte z–ovou souřadnici těžiště homogenní plochy $\mathcal{S}$, která je dána vztahy $y^2+z^2=x^2$, $y^2+z^2<2z$, $x>0$.

Řešení. z–ovou souředníci těžiště homogenní plochy $\mathcal{S}$ najdeme pomocí vztahu

$$z_T=\frac{S_{xy}}{P}\,,\quad \text{kde}\quad P=\iint_{\mathcal{S}}\mathrm{d}S\,,\quad S_{xy}=\iint_{\mathcal{S}}z\,\mathrm{d}S$$

obsah plochy $\mathcal{S}$ a statický moment plochy $\mathcal{S}$ vzhledem k rovině xy.
Pokud se podíváme na rovnice plochy, lze nahlednout, že pro její parametrizaci budou vhodné cylindrické souřadnice, pro které je ale osa válce osy x, tj. souřadnice

$$x=x\,,\quad y=r\cos\varphi\,,\quad z=r\sin\varphi\,,\qquad r>0\,,\quad -\pi<\varphi<\pi\,,\quad -\infty<x<\infty\,.$$

V těchto souřadnicích je rovnice, které popisuje plochu $r^2=x^2$, a protože $x>0$, je $x=r$. Nerovnosti, které omezují množinu parametrů r a φ, dávají $0<r<2\sin\varphi$, a tedy $0<\varphi<\pi$. Takto jsme dostali parametrické rovnice dané plochy ve tvaru

$$x=r\,,\quad y=r\cos\varphi\,,\quad z=r\sin\varphi\,,\qquad 0<r<2\sin\varphi\,,\quad 0<\varphi<\pi\,.$$

Standardní postupem pak dostaneme

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\tau}_r=\big(1,\cos\varphi,\sin\varphi\big)\,, && \boldsymbol{\tau}_\varphi=\big(0,-r\sin\varphi,r\cos\varphi\big)\,,\\
&\boldsymbol{\tau}_r\times\boldsymbol{\tau}_\varphi=\big(r,-r\cos\varphi,-r\sin\varphi\big)\,, && \mathrm{d}S=\big\|\boldsymbol{\tau}_r\times\boldsymbol{\tau}_\varphi\big\|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\sqrt{2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,,
\end{aligned}$$

a z toho máme

$$P=\iint_{\widehat{\Omega}}\sqrt{2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,,\qquad S_{xy}=\iint_{\widehat{\Omega}}\sqrt{2}\,r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

kde oblast $\widehat{\Omega}$ je popsána nerovnostmi

$$0<r<2\sin\varphi\,,\qquad 0<\varphi<\pi\,.$$

Fubiniova věta pak vede k

$$\begin{aligned}
P&=\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\sin\varphi}\sqrt{2}\,r\,\mathrm{d}r=2\sqrt{2}\int_0^\pi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\sqrt{2}\int_0^\pi(1-\cos2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi=\sqrt{2}\,\pi\,,\\
S_{xy}&=\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\sin\varphi}\sqrt{2}\,r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\tfrac{8}{3}\sqrt{2}\int_0^\pi\sin^4\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\sqrt{2}\,\pi\,,
\end{aligned}$$

kde jsem při poslední integraci použil rovnost

$$\begin{aligned}
\sin^4\varphi&=\big(\tfrac{1}{2}(1-\cos2\varphi)\big)^2=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}\cos2\varphi+\tfrac{1}{4}\cos^2 2\varphi=\\
&=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}\cos2\varphi+\tfrac{1}{8}(1-\cos4\varphi)=\tfrac{3}{8}-\tfrac{1}{2}\cos2\varphi-\tfrac{1}{8}\cos4\varphi\,.
\end{aligned}$$

Hledaná souřadnice těžiště tedy je $z_T=1$.

Příklad 15.r. Najděte hmostnost kulové plochy $x^2+y^2+z^2=4$, jestliže je její plošná hustota $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.

Řešení. Hmotnost M plochy $\mathcal{S}$ s hustotou ρ najdeme pomocí plošného integrálu

$$M = \iint_{\mathcal{S}} \rho \, \mathrm{d}S = \iint_{\mathcal{S}} \sqrt{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}S \, .$$

Nejprve ale musíme najít nějaké parametrické rovnice plochy. Protože se i příkladě často vyskytuje výraz $x^2 + y^2$, zkusím nejprve cylindrické souřadnice

$$x = r\cos\varphi \, , \quad y = r\sin\varphi \, , \quad z = z \, , \qquad r > 0 \, , \quad 0 < \varphi < 2\pi \, , \quad -\infty < z < \infty \, .$$

V těchto souřadnicích je rovnice, která popisuje plochu

$$r^2 + z^2 = 4 \, , \qquad r > 0 \, , \quad 0 < \varphi < 2\pi \, , \quad -\infty < z < \infty \, .$$

Protože $r > 0$, bylo by možné vyjádřit $r = \sqrt{4 - z^2}$. Ale také je možné zavést ještě jedny polární souřadnice pro r a z jako

$$r = R\cos\theta \, , \quad z = R\sin\theta \, , \quad \text{kde} \quad R > 0 \, , \quad -\pi < \theta < \pi \, .$$

Ale protože je $r > 0$, musí být $\cos\theta > 0$, a tedy musí být $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$. Rovnice plochy pak je

$$R^2 = 4 \, , \qquad R > 0 \, , \quad -\tfrac{1}{2}\pi < \theta < \tfrac{1}{2}\pi \, , \quad 0 < \varphi < 2\pi \, .$$

Proto je $R = 2$, a tedy $r = 2\cos\theta$, $z = 2\sin\theta$ a dostaneme parametrické rovnice plochy ve tvaru

$$x = 2\cos\theta\cos\varphi \, , \quad y = 2\cos\theta\sin\varphi \, , \quad z = 2\sin\theta \, , \qquad -\tfrac{1}{2}\pi < \theta < \tfrac{1}{2}\pi \, , \quad 0 < \varphi < 2\pi \, .$$

Pro element plochy $\mathrm{d}S$ dostaneme standardním způsobem

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}_\theta &= \big(-2\sin\theta\cos\varphi, -2\sin\theta\sin\varphi, 2\cos\theta\big) \, , \\
\boldsymbol{\tau}_\varphi &= \big(-2\cos\theta\sin\varphi, 2\cos\theta\cos\varphi, 0\big) \, , \\
\boldsymbol{\tau}_\theta \times \boldsymbol{\tau}_\varphi &= \big(-4\cos^2\theta\cos\varphi, -4\cos^2\theta\sin\varphi, -4\cos\theta\sin\theta\big) \, , \\
\mathrm{d}S &= \big\|\boldsymbol{\tau}_\theta \times \boldsymbol{\tau}_\varphi\big\| \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi = 4\sqrt{\cos^2\theta} \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi = 4\cos\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \, ,
\end{aligned}$$

protože $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$, a tedy $\cos\theta > 0$. Ze stejného důvodu je $\sqrt{x^2 + y^2} = 2\cos\theta$ a pro hmotnost plochy $\mathcal{S}$ dostaneme integrál

$$M = \iint_{\Omega} 2\cos\theta \, 4\cos\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi = 8 \iint_{\Omega} \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \, ,$$

kde Ω je obdélník $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Podle Fubuniovy věta je tedy

$$M = 8 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta = 8\pi^2.$$

Příklad 16.r. Najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose z homogenní plochy $\mathcal{S}$, která je dána vztahy $z = xy$, $x^2 + y^2 \le 1$ a x, $y > 0$.

Řešení. Moment setrvačnosti J_z plochy $\mathcal{S}$ (s hustotou $\rho = 1$) vzhledem k ose z je definován plošného integrálu $J_z = \int_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}S$. Protože rovnici plochy máme vyjádřenou jako graf funkce $z = z(x, y) = xy$, lze najít element plochy $\mathrm{d}S$ pomocí vztahu

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \sqrt{1 + y^2 + x^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$

Moment setrvačnosti J_z je tedy dán dvojným integrálem

$$J_z = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2)\sqrt{1 + x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,,$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je dá vztahy

$$x^2 + y^2 \le 1\,, \quad x > 0\,, \quad y > 0\,.$$

Tento integrál spočítáme pomocí polárních souřadnic

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \qquad r > 0\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,, \qquad J = r\,.$$

V polárních souřadnicích přejde oblast Ω na obdélník $\widehat{\Omega}$: $0 < r < 1$ a $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$. Proto je podle věty o substituci a Fubiniovy věty

$$J_z = \iint_{\widehat{\Omega}} r^3\sqrt{1 + r^2}\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 r^3\sqrt{1 + r^2}\, \mathrm{d}r = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^1 r^3\sqrt{1 + r^2}\, \mathrm{d}r\,.$$

Poslední integrál lze najít například substitucí

$$t = 1 + r^2 \implies \mathrm{d}t = 2r\, \mathrm{d}r \implies r^3\sqrt{1 + r^2}\, \mathrm{d}r \mapsto \tfrac{1}{2}(t - 1)\sqrt{t}\, \mathrm{d}t\,, \qquad 0 \mapsto 1\,, \quad 1 \mapsto 2\,.$$

Tedy

$$\int_0^1 r^3\sqrt{1 + r^2}\, \mathrm{d}r = \int_1^2 \tfrac{1}{2}(t - 1)\sqrt{t}\, \mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{5}t^{5/2} - \tfrac{1}{3}t^{3/2}\right]_1^2 = \tfrac{2}{15}\big(\sqrt{2} + 1\big)$$

a $J_z = \frac{\pi}{15}\big(\sqrt{2} + 1\big)$.

Příklad 17.r. Najděte dvojrozměrný obsah plochy $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^4$, která je dána rovnicemi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $x_1^2 + x_2^2 = x_4^2$ a $x_4 > 0$.

Řešení. Obsah P plochy $\mathcal{S}$ najdeme pomocí plošného integrálu $P = \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S$. Nejprve musíme najít nějaké parametrické rovnice plochy $\mathcal{S}$. První z rovnic, které popisují plochu lze popsat pomocí sférických souřadnic

$$x_1 = \cos\theta\cos\varphi\,, \quad x_2 = \cos\theta\sin\varphi\,, \quad x_3 = \sin\theta\,, \qquad -\tfrac{1}{2}\pi < \theta < \tfrac{1}{2}\pi\,, \quad 0 < \varphi < 2\pi\,.$$

Pro proměnnou x_4 dostaneme z duhé rovnice vztah $x_4^2 = \cos^2\theta$, a protože $x_4 > 0$, je $x_4 = \cos\theta$. Tak jsme dostali parametrické rovnice plochy $\mathcal{S}$ jako

$$x_1 = \cos\theta\cos\varphi\,, \quad x_2 = \cos\theta\sin\varphi\,, \quad x_3 = \sin\theta\,, \quad x_4 = \cos\theta\,, \qquad -\tfrac{1}{2}\pi < \theta < \tfrac{1}{2}\pi\,, \quad 0 < \varphi < 2\pi\,.$$

Element plochy $\mathrm{d}S$ najdeme standardním způsobem

$$\boldsymbol{\tau}_\theta = \bigl(-\sin\theta\cos\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta, -\sin\theta\bigr)\,, \qquad \boldsymbol{\tau}_\varphi = \bigl(-\cos\theta\sin\varphi, \cos\theta\cos\varphi, 0, 0\bigr)\,,$$

$$\boldsymbol{\tau}_\theta\cdot\boldsymbol{\tau}_\theta = 1+\sin^2\theta\,, \qquad \boldsymbol{\tau}_\theta\cdot\boldsymbol{\tau}_\varphi = \boldsymbol{\tau}_\varphi\cdot\boldsymbol{\tau}_\theta = 0\,, \qquad \boldsymbol{\tau}_\varphi\cdot\boldsymbol{\tau}_\varphi = \cos^2\theta\,,$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}_\theta\cdot\boldsymbol{\tau}_\theta & \boldsymbol{\tau}_\theta\cdot\boldsymbol{\tau}_\varphi \\ \boldsymbol{\tau}_\varphi\cdot\boldsymbol{\tau}_\theta & \boldsymbol{\tau}_\varphi\cdot\boldsymbol{\tau}_\varphi \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1+\sin^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta \end{pmatrix} = (1+\sin^2\theta)\cos^2\theta\,, \qquad \mathrm{d}S = \sqrt{1+\sin^2\theta}\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Tedy obsah dané plochy najdeme pomocí dvojného integrálu přes obdelník Ω: $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi, 0 < \varphi < 2\pi$

$$P = \iint_\Omega \sqrt{1+\sin^2\theta}\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1+\sin^2\theta}\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1+\sin^2\theta}\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Když v posledním integrálu substituci

$$t = \sin\theta \implies \mathrm{d}t = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,, \qquad -\tfrac{1}{2}\pi \mapsto -1\,, \quad \tfrac{1}{2}\pi \mapsto 1\,,$$

dostaneme

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1+\sin^2\theta}\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Tento integrál lze najít například pomocí metody integrace per partes. Ta dává

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \Bigl[t\sqrt{1+t^2}\Bigr]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}} = 2\sqrt{2} - \int_{-1}^{1}\frac{t^2+1-1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2\sqrt{2} - \int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}} = 2\sqrt{2} - \int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \Bigl[\ln\bigl(t+\sqrt{1+t^2}\bigr)\Bigr]_{-1}^{1}\,.$$

Tedy platí rovnost

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t + 2\bigl(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\bigr)\,, \quad \text{neboli} \quad \int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$$

a obsah dané plochy je $P = 2\pi\bigl(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\bigr)$.

Příklad 1. Najděte déklu křivky, která je dána parametrickými rovnicemi $x = \cos\varphi\sin\varphi$, $y = \sin^2\varphi$, kde $\varphi \in \langle 0, \pi\rangle$. $\bigl[\pi\,.\bigr]$

Příklad 2. Najděte x–ovou souřadnici těžiště homogenní křivky, která je dána parametrickými rovnicemi $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1 - \ln(\cos t)$, kde $0 \le t \le \frac{1}{3}\pi$.
$\left[x_T = \frac{\pi}{3\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}\,, \quad \ell = \ln\bigl(2+\sqrt{3}\bigr)\,.\right]$

Příklad 3. Najděte hmotnost křivky $\mathcal{C}$, která je dána parametrickými rovnicemi $x = t\cos t$, $y = t\sin t$ a $z = t$, kde $t \in \langle 0, 1\rangle$ a jejíž hustota $\rho = z$. $\left[\frac{1}{3}\bigl(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\bigr)\,.\right]$

Příklad 4. Najděte integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{C}}(x+y)\mathrm{e}^{y+z}\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C}$ je úsečka z bodu $A = [1; -1; 2]$ do bodu $B = [-1; 0; 1]$. $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}\,.\right]$

Příklad 5. Najděte hmotnost paraboly $y = \frac{1}{2}x^2$, kde $|x| \le 1$, jestliže je její hustota $\rho = |x|$. $\left[\frac{2}{3}\bigl(2\sqrt{2}-1\bigr)\,.\right]$

Příklad 6. Najděte x–ovou souřadnici těžiště homoenní křivky $\mathcal{C}$, která je hranice oblasti $x+y \geq 0$, $x-y \geq 0$ a $x^2+y^2=4$. $\Big[x_T = \frac{6\sqrt{2}}{4+\pi}\,, \quad \ell = 4+\pi\,.\Big]$

Příklad 7. Najděte délku křivky $\mathcal{C}$, která je dána jako průnik kulové plochy $x^2+y^2+z^2=6$ a roviny $y+z=2$. $\Big[4\pi\,.\Big]$

Příklad 8. Najdte obsah plochy dané parametrickými rovnicemi $x = u\cos v$, $y = u\sin v$ a $z = v$, kde $0 < v < u < 1$. $\Big[\frac{1}{3}\big(2\sqrt{2}-1\big)\,.\Big]$

Příklad 9. Najděte hmotnost plochy $\mathcal{S}$, která je dána parametrickými rovnicemi $x = r^2\cos\varphi$, $y = r^2\sin\varphi$, $z = r$, kde $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$ a $1 < r < 2$, a která má hustotu $\rho = \dfrac{1}{z}$.

$\Big[\frac{\pi}{24}\big(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\big)\,.\Big]$

Příklad 10. Najděte obsah části plochy $\mathcal{S}$, která je dána rovnicí $z = x^2+xy-y^2+4$ a leží uvnitř válce $x^2+y^2=2$. $\Big[\frac{2\pi}{15}\big(11\sqrt{11}-1\big)\,.\Big]$

Příklad 11. Najděte hmotnost plochy $\mathcal{S}$, která je dána vztahy $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $x^2+y^2 \leq 1$ a $x > 0$ a jejíž hustota je $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. $\Big[\frac{\pi}{3}\big(2\sqrt{2}-1\big)\,.\Big]$

Příklad 12. Najděte hmotnost kuželové plochy $z^2 = x^2+y^2$, $z \geq 0$, která má hustotu $\rho = \mathrm{e}^{-z}$. $\Big[2\sqrt{2}\,\pi\,.\Big]$

Příklad 13. Najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose z plochy $\mathcal{S}$, která je dána vztahy $4z^2 = x^2+y^2$, $0 \leq z \leq 2$. $\Big[64\sqrt{5}\,\pi\,.\Big]$

Příklad 14. Najděte z–ovou souřadnici těžiště homogenní plochy $\mathcal{S}$, která je dána vztahy $z^2 = x^2-y^2$, $y^2+z^2 \leq 2y$ a $x, z > 0$. $\Big[z_T = \frac{4}{3\pi}\,, \quad P = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.\Big]$

Příklad 15. Najděte souřadnice těžiště homogenního trojúhelníka s vrcholy v bodech $A = [2;0;0]$, $B = [0;3;0]$ a $C = [0;0;6]$. $\Big[x_T = \frac{2}{3}\,, \quad y_T = 1\,, \quad z_T = 2\,; \quad P = 3\sqrt{14}\,.\Big]$