

Příklad 3 – Riemannův integrál v \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3

Najděte obsah oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je určena nerovnostmi

$$y - 2x^2 - 4x \geq 0, \quad 5x - y + 1 \geq 0.$$

$\left[\frac{9}{8}\right]$

Najděte obsah oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je určena nerovnostmi

$$8y^2 \leq x + y + 2, \quad x - 3y \leq 10.$$

$\left[\frac{125}{6}\right]$

Najděte obsah oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je určena nerovnostmi

$$x + y^2 - 2y + 2 \leq 0, \quad y^2 + 2 \leq x + 4y.$$

$\left[\frac{1}{3}\right]$

Najděte integrál $\iint_{\Omega} x \, dx \, dy$, kde oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je dána nerovnostmi

$$x^2 + y^2 \leq 9, \quad x^2 - y^2 \geq 1, \quad x \geq 0.$$

$\left[\frac{32}{3}\right]$

Najděte obsah oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovností

$$2x^2 + 3y^2 \leq 4x.$$

$\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\pi\right]$

Pomocí polárních souřadnic najděte obsah oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je určena nerovnostmi

$$(x^2 + y^2)^3 \leq 8xy(x^2 - y^2), \quad x, y \geq 0.$$

$\left[\frac{1}{2}\right]$

Pomocí substituce $x = r \cos^2 \varphi$, $y = r \sin^2 \varphi$, kde $r > 0$ a $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$, najděte obsah oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je určena nerovnostmi

$$(x + y)^4 \leq 4xy, \quad x, y \geq 0.$$

$\left[\frac{1}{3}\right]$

Pomocí substituce $u = xy$ a $v = \frac{y}{x}$ najděte integrál $\iint_{\Omega} \frac{x}{y} \, dx \, dy$, kde oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je dána nerovnostmi

$$1 \leq xy \leq 3, \quad x \leq 2y \leq 8x.$$

Najděte souřadnici x_T těžiště homogenní oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi

$$x^2 - 8x - 2y + 12 \leq 0, \quad x + y \leq 2,$$

jestliže víte, že její obsah je $\frac{2}{3}$.

$$\left[x_T = 3\right]$$

Najděte souřadnici y_T těžiště homogenní oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi

$$4y^2 - y - 2 + 2x \leq 0, \quad 2x + 3y + 6 \geq 0,$$

jestliže víte, že její obsah je 9.

$$\left[y_T = \frac{1}{2}\right]$$

Najděte souřadnici y_T těžiště homogenní oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi

$$y^2 + 2x + 4 \leq y, \quad y^2 + 2y \leq x + 5,$$

jestliže víte, že její obsah je $\frac{27}{4}$.

$$\left[y_T = -\frac{1}{2}\right]$$

Najděte souřadnici y_T těžiště homogenní oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi

$$4x^2 + 9y^2 \leq 8x, \quad y \geq 0,$$

jestliže víte, že její obsah je $\frac{1}{3}\pi$.

$$\left[y_T = \frac{8}{9\pi}\right]$$

Pomocí substituce $u = xy$ a $v = \frac{y}{x}$ najděte souřadnici x_T těžiště homogenní oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi

$$1 \leq xy \leq 4, \quad x \leq y \leq 9x,$$

jestliže víte, že její obsah je $3 \ln 3$.

$$\left[x_T = \frac{28}{27 \ln 3}\right]$$

Pomocí substituce $u = xy$ a $v = \frac{y}{x}$ najděte souřadnici y_T těžiště homogenní oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi

$$1 \leq xy \leq 4, \quad x \leq y \leq 9x,$$

jestliže víte, že její obsah je $3 \ln 3$.

$$\left[y_T = \frac{28}{9 \ln 3}\right]$$

Pomocí substituce $u = xy^2$ a $v = \frac{y}{x}$ najděte souřadnici x_T těžiště homogenní oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi

$$1 \leq xy^2 \leq 8, \quad x \leq 27y \leq 27x,$$

jestliže víte, že její obsah je 9.

$$\left[x_T = \frac{182}{27}\right]$$

Pomocí substituce $u = xy^2$ a $v = \frac{y}{x}$ najděte souřadnici y_T těžiště homogenní oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi

$$1 \leq xy^2 \leq 8, \quad x \leq 27y \leq 27x,$$

jestliže víte, že její obsah je 9.

$$\left[y_T = \frac{7}{9} \ln 3 \right]$$

Pomocí substituce $u = xy$ a $v = \frac{y^2}{x}$ najděte souřadnici y_T těžiště homogenní oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi

$$1 \leq xy \leq 4, \quad x \leq y^2 \leq 2x,$$

jestliže víte, že její obsah je $\ln 2$.

$$\left[y_T = \frac{3}{4 \ln 2} (4 \sqrt[3]{4} - 1)(\sqrt[3]{2} - 1) \right]$$

Na plochu $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi

$$x^2 + y^2 \leq 5, \quad y \geq x^2 + 1,$$

působí tlak $p(x, y) = y$. Najděte celkovou sílu F , která působí na plochu \mathcal{S} , tj. integrál

$$F = \iint_{\mathcal{S}} p(x, y) \, dx \, dy.$$

$$\left[F = \frac{14}{5} \right]$$

Na plochu $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi

$$3x^2 + 2y^2 \leq 6, \quad x^2 + 2 \leq 2y^2, \quad x, y > 0,$$

působí tlak $p(x, y) = 2y$. Najděte celkovou sílu F , která působí na plochu \mathcal{S} , tj. integrál

$$F = \iint_{\mathcal{S}} p(x, y) \, dx \, dy.$$

$$\left[F = \frac{4}{3} \right]$$

Na plochu $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi

$$9x^2 + 4y^2 \leq 36, \quad y > 0,$$

působí tlak $p(x, y) = y$. Najděte celkovou sílu F , která působí na plochu \mathcal{S} , tj. integrál

$$F = \iint_{\mathcal{S}} p(x, y) \, dx \, dy.$$

$$\left[F = 12 \right]$$

Nechť je $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$. Pak platí rovnost

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \iint_{\Omega} e^{-x^2-y^2} dx dy,$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je dána nerovnostmi $x, y > 0$.

Pomocí substituce do polárních souřadnic najděte integrál I .

$$\left[I = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \right]$$

Najděte objem tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + 4y^2 \leq z \leq 3.$$

$$\left[\frac{9}{4} \pi \right]$$

Najděte objem tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$0 \leq z \leq xy, \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad x, y > 0.$$

$$\left[2 \right]$$

Najděte objem tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad x^2 + y^2 - 2z^2 \geq 1.$$

$$\left[4\pi \right]$$

Najděte objem tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 \leq z, \quad 2x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 8.$$

$$\left[\frac{2}{3} \pi (8\sqrt{2} - 7) \right]$$

Najděte objem tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 \leq 4, \quad x + z \geq 0, \quad x - z \geq 0.$$

$$\left[\frac{32}{3} \right]$$

Najděte objem tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \quad -1 \leq z \leq 2, \quad x, y \geq 0.$$

$$\left[6\pi \right]$$

Najděte objem tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 5, \quad x^2 + y^2 \geq 1.$$

$$\left[\frac{32}{3} \pi \right]$$

Najděte objem tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 \geq 1, \quad x^2 + y^2 + 2 \leq 2z, \quad x^2 + y^2 + z \leq 4.$$

$$\left[\frac{3}{4} \pi \right]$$

Najděte objem tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad x^2 + y^2 \leq x.$$

$$\left[\frac{2}{9} (3\pi - 4) \right]$$

Najděte objem tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 \geq z^2, \quad x^2 + y^2 \leq 2y, \quad z \geq 0.$$

$$\left[\frac{32}{9} \right]$$

Najděte objem tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$9x^2 + 4y^2 \leq z^2, \quad 0 \leq z \leq 12, \quad x \geq 0.$$

$$\left[4\pi \right]$$

Najděte objem tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 \leq 2x, \quad y - z \geq 0, \quad z \geq 0.$$

$$\left[\frac{2}{3} \right]$$

Najděte objem tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$4z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2x.$$

$$\left[\frac{32}{9} \right]$$

Najděte objem tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$4z + x^2 + y^2 \leq 24, \quad x^2 + y^2 \leq 4z^2, \quad x, z \geq 0.$$

$$\left[\frac{32}{3} \pi \right]$$

Najděte objem tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 \leq 2z, \quad z - 4 \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\left[\frac{128}{3} \pi \right]$$

Pomocí substituce do sférických souřadnic najděte objem tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 \leq 12xyz, \quad x, y, z > 0.$$

$$\left[\frac{1}{2} \right]$$

Najděte souřadnici z_T homogenního tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + z^2 \leq 1, \quad y^2 + z^2 \leq 1, \quad z \geq 0,$$

jestliže víte, že jeho objem je $V = \frac{8}{3}$.

$$\left[z_T = \frac{3}{8} \right]$$

Najděte souřadnici z_T homogenního tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$0 \leq z \leq xy, \quad x + y \leq 1, \quad x, y \geq 0,$$

jestliže víte, že jeho objem je $V = \frac{1}{24}$.

$$\left[z_T = \frac{1}{15} \right]$$

Najděte souřadnici z_T homogenního tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \quad -1 \leq z \leq 2,$$

jestliže víte, že jeho objem je $V = 24\pi$.

$$\left[z_T = \frac{13}{32} \right]$$

Najděte souřadnici x_T homogenního tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 \leq 4, \quad x^2 + z^2 \leq 4, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

jestliže víte, že jeho objem je $V = \frac{44}{3}$.

$$\left[x_T = \frac{21}{44} \right]$$

Najděte souřadnici x_T homogenního tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 \leq 2x, \quad y - z \geq 0, \quad z \geq 0,$$

jestliže víte, že jeho objem je $V = \frac{2}{3}$.

$$\left[x_T = 1 \right]$$

Najděte souřadnici z_T homogenního tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + 4y^2 \leq z \leq 3,$$

jestliže víte, že jeho objem je $V = \frac{9}{4} \pi$.

$$\left[z_T = 2 \right]$$

Najděte souřadnici x_T homogenního tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$9x^2 + 4y^2 \leq z^2, \quad 0 \leq z \leq 3, \quad x \geq 0,$$

jestliže víte, že jeho objem je $V = \frac{3}{4} \pi$.

$$\left[x_T = \frac{3}{\pi} \right]$$

Hustota v tělese \mathcal{T} , které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad z \geq 0,$$

je $\rho(x, y, z) = z$. Najděte celkový hmotnost M tělesa \mathcal{T} , tj. integrál

$$M = \iiint_{\mathcal{T}} \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

$$\left[M = \frac{3}{4} \pi \right]$$

Hustota elektrického náboje v tělese \mathcal{T} , které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 + 4 \leq 2z, \quad x^2 + y^2 + z \leq 8, \quad x^2 + y^2 \geq 1,$$

je $\rho(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2}$. Najděte celkový náboj Q tělesa \mathcal{T} , tj. integrál

$$Q = \iiint_{\mathcal{T}} \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

$$\left[Q = \frac{3}{2} \pi (8 \ln 2 - 3) \right]$$

Hustota elektrického náboje v tělese \mathcal{T} , které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 \leq z^2, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad x, y \geq 0,$$

je $\rho(x, y, z) = xy$. Najděte celkový náboj Q tělesa \mathcal{T} , tj. integrál

$$Q = \iiint_{\mathcal{T}} \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

$$\left[Q = \frac{1}{40} \right]$$

Hustota elektrického náboje v tělese \mathcal{T} , které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 5, \quad -1 \leq z \leq 2, \quad x^2 + y^2 \geq 1,$$

je $\rho(x, y, z) = z$. Najděte celkový náboj Q tělesa \mathcal{T} , tj. integrál

$$Q = \iiint_{\mathcal{T}} \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

$$\left[Q = \frac{9}{4} \pi \right]$$

Najděte celkový náboj Q koule $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, jestliže je její hustota

$$\rho(x, y, z) = e^{-\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

$$\left[Q = 4\pi(2 - 5e^{-1}) \right]$$

Hustota v tělese \mathcal{T} , které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, \quad x \geq 0,$$

je $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Najděte celkovou hmotnost M tělesa \mathcal{T} , tj. integrál

$$M = \iiint_{\mathcal{T}} \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

$$\left[M = \frac{4}{5} \pi \right]$$

Najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose z tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 \leq 3z + 1, \quad x^2 + y^2 + z \leq 5,$$

s hustotou $\rho(x, y, z) = 1$, tj. integrál

$$J_z = \iiint_{\mathcal{T}} \rho(x, y, z)(x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz.$$

$$\left[J_z = \frac{128}{9} \pi \right]$$

Najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose z tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad x^2 + y^2 - 2z^2 \geq 1, \quad z \geq 0,$$

s hustotou $\rho(x, y, z) = z$, tj. integrál

$$J_z = \iiint_{\mathcal{T}} \rho(x, y, z)(x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz.$$

$$\left[J_z = 2\pi \right]$$

Najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose z tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, \quad x^2 + y^2 \geq 1,$$

s hustotou $\rho(x, y, z) = 1$, tj. integrál

$$J_z = \iiint_{\mathcal{T}} \rho(x, y, z)(x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz.$$

$$\left[J_z = \frac{28}{15} \pi \right]$$

Najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose z tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 \leq 4, \quad y + z \leq 2, \quad y - z \leq 2,$$

s hustotou $\rho(x, y, z) = 1$, tj. integrál

$$J_z = \iiint_{\mathcal{T}} \rho(x, y, z)(x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz.$$

$$\left[J_z = 32\pi \right]$$