Příklad 4– křivkové integrály

Najděte délku logaritmické spirály, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = \mathrm{e}^{-4\varphi}\cos 3\varphi\,, \quad y = \mathrm{e}^{-4\varphi}\sin 3\varphi\,, \qquad \varphi \in (0, \infty)\,.$$

$$\left[\tfrac{5}{4}\right]$$

Najděte délku křivky $\mathcal{C}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = \frac{t}{1+t^2}\,, \quad y = \frac{1}{1+t^2}\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

$$\left[\pi\right]$$

Najděte délku křivky $\mathcal{C}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = \cos\varphi\sin\varphi\,, \quad y = \sin^2\varphi\,, \qquad 0 \le \varphi \le \pi\,.$$

$$\left[\pi\right]$$

Najděte délku křivky $\mathcal{C}$, která je dána vztahy

$$x^2 + y^2 = 2y\,, \qquad y \le x\,.$$

$$\left[\tfrac{1}{2}\pi\right]$$

Najděte délku křivky $\mathcal{C}$, která je dána rovnicemi

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6\,, \qquad y + z = 2\,.$$

$$\left[4\pi\right]$$

Najděte délku křivky $\mathcal{C}$, která je dána rovnicemi

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25\,, \qquad x + 2y = 5\,.$$

$$\left[4\sqrt{5}\,\pi\right]$$

Najděte délku křivky $\mathcal{C}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = t - \sin t\,, \quad y = 1 - \cos t\,, \qquad 0 \le t \le 4\pi\,, \qquad \left(\text{Návod: Platí } 1 - \cos t = 2\sin^2\tfrac{t}{2}\right).$$

$$\left[16\right]$$

Najděte hmotnost křivky $\mathcal{C}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = t\cos t\,, \quad y = t\sin t\,, \quad z = t\,, \qquad 0 \le t \le \pi\,,$$

jestliže je její lineární hustota $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$. $\left[\frac{1}{3}\left((2+\pi)\sqrt{2+\pi} - 2\sqrt{2}\right)\right]$

Najděte hmotnost křivky $\mathcal{C}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = \mathrm{e}^{-t}\cos t\,, \quad y = \mathrm{e}^{-t}\sin t\,, \quad z = \mathrm{e}^{-t}\,, \qquad 0 < t < \infty\,,$$

jestliže je její lineární hustota $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$

Najděte hmotnost křivky $\mathcal{C}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = \cos t + t\sin t\,, \quad y = \sin t - t\cos t\,, \quad z = t\,, \qquad 0 \le t \le 1\,,$$

jestliže je její lineární hustota $\rho(x,y,z) = z$. $\left[\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\right]$

Najděte hmotnost křivky $\mathcal{C}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = t - \sin t\,, \quad y = 1 - \cos t\,, \qquad 0 \le t \le 2\pi\,,$$

jestliže je její lineární hustota $\rho(x,y) = \sqrt{y}$. $\left[2\sqrt{2}\,\pi\right]$

Najděte souřadnici z_T těžiště homogenní křivky $\mathcal{C}$, která je dána rovnicemi

$$2x^2 + z^2 = 2\,, \quad y = x\,, \quad z \ge 0\,,$$

jestliže víte, že její délka je $\sqrt{2}\,\pi$. $\left[z_T = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right]$

Najděte souřadnici x_T těžiště homogenní křivky $\mathcal{C}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = \cos t\,, \quad y = \sin t\,, \quad z = 1 - \ln\cos t\,, \qquad 0 \le t \le \tfrac{1}{3}\,\pi\,,$$

jestliže víte, že její délka je $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$. $\left[x_T = \frac{\pi}{3\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}\right]$

Najděte souřadnici y_T těžiště homogenní křivky $\mathcal{C}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = \cos t\,, \quad y = \sin t\,, \quad z = 1 - \ln\cos t\,, \qquad 0 \le t \le \tfrac{1}{3}\,\pi\,,$$

jestliže víte, že její délka je $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$. $\left[y_T = \frac{\ln 2}{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}\right]$

Najděte souřadnici y_T těžiště homogenní křivky $\mathcal{C}$, která je dána vztahy

$$x^2 + y^2 = 4x\,, \qquad y \le x\,,$$

jestliže víte, že její délka je 3π. $\left[y_T = -\frac{4}{3\pi}\right]$

Najděte souřadnici x_T těžiště homogenní křivky $\mathcal{C}$, která je dána vztahy

$$x^2 + y^2 = 4x\,, \qquad x \le y\,,$$

jestliže víte, že její délka je π. $\left[x_T = \frac{2\pi-4}{\pi}\right]$

Najděte souřadnici x_T těžiště homogenní křivky $\mathcal{C}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = \cos t + t\sin t\,, \quad y = \sin t - t\cos t\,, \quad z = t^2\,, \qquad 0 \le t \le 2\pi\,,$$

jestliže víte, že její délka je $2\sqrt{5}\,\pi^2$. $\left[x_T = -2\right]$

Najděte souřadnici y_T těžiště homogenní křivky $\mathcal{C}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = \cos t + t\sin t\,, \quad y = \sin t - t\cos t\,, \quad z = t^2\,, \qquad 0 \le t \le 2\pi\,,$$

jestliže víte, že její délka je $2\sqrt{5}\,\pi^2$. $\left[y_T = -\frac{3}{\pi}\right]$

Najděte souřadnici x_T těžiště homogenní křivky $\mathcal{C}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = \mathrm{e}^{-t}\cos t\,, \quad y = \mathrm{e}^{-t}\sin t\,, \quad z = \mathrm{e}^{-t}\,, \qquad 0 < t < \infty\,,$$

jestliže víte, že její délka je $\sqrt{3}$. $\left[x_T = \frac{2}{5}\right]$

Najděte souřadnici y_T těžiště homogenní křivky $\mathcal{C}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = \mathrm{e}^{-t}\cos t\,, \quad y = \mathrm{e}^{-t}\sin t\,, \quad z = \mathrm{e}^{-t}\,, \qquad 0 < t < \infty\,,$$

jestliže víte, že její délka je $\sqrt{3}$. $\left[y_T = -\frac{1}{5}\right]$

Najděte souřadnici x_T těžiště homogenní křivky $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$, která hranice oblasti

$$0 \le y \le x\,, \qquad x^2 + y^2 \le 4\,,$$

jestliže víte, že její délka je $4 + \frac{1}{2}\,\pi$. $\left[x_T = \frac{4+6\sqrt{2}}{8+\pi}\right]$

Najděte souřadnici y_T těžiště homogenní křivky $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$, která hranice oblasti

$$0 \le y \le x\,, \qquad x^2 + y^2 \le 4\,,$$

jestliže víte, že její délka je $4 + \frac{1}{2}\,\pi$. $\left[y_T = \frac{8+2\sqrt{2}}{8+\pi}\right]$

Najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose z úsečky $\mathcal{C}$ z bodu $A = [-1, 0, -2]$ do bodu $B = [1, 1, 0]$, jejíž hustota je rovna jedné, tj. integrál

$$J_z = \int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}s\,.$$

$\left[2\right]$

Najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose z křivky $\mathcal{C}$, která je dána rovnicemi

$$x = \cos t + t\sin t\,, \quad y = \sin t - t\cos t\,, \quad z = 4\,, \qquad 0 \le t \le 2\pi\,,$$

jejíž hustota je rovna jedné, tj. integrál

$$J_z = \int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}s\,.$$

$\left[2\pi^2\big(1 + 2\pi^2\big)\right]$

Najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose z křivky $\mathcal{C}$, která je dána rovnicemi

$$x = \sin t \cos t\,, \quad y = \sin^2 t\,, \quad z = t\,, \qquad 0 \le t \le \pi\,,$$

jejíž hustota je rovna jedné, tj. integrál

$$J_z = \int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}s\,.$$

$\left[\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right]$

Najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose z křivky $\mathcal{C}$, která je dána jako průnik hranice množiny

$$x + y \ge 0\,, \qquad x - y \ge 0\,, \qquad x^2 + y^2 \le 1$$

s rovinou $z = 0$ a jejíž hustota je rovna jedné, tj. integrál

$$J_z = \int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}s\,.$$

$\left[\frac{1}{6}\,(4 + 3\pi)\right]$

Najděte křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{y}}\,,$$

kde $\mathcal{C}$ je úsečka z bodu $A = [0, 4]$ do bodu $B = [3, 0]$. $\left[\frac{5}{2}\right]$

Najděte křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,,$$

kde $\mathcal{C}$ je křivka daná parametrickými rovnicemi

$$x = t \sin t + \cos t\,, \quad y = t \cos t - \sin t\,, \quad z = 2\,, \qquad 0 \le t \le 2\,.$$

$\left[3 - \sqrt{5}\right]$

Najděte křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{C}} (x + y)\mathrm{e}^{x+y+z}\,\mathrm{d}s\,,$$

kde $\mathcal{C}$ je úsečka z bodu $A = [1, 2, -3]$ do bodu $B = [3, 1, -1]$. $\left[\frac{1}{3}\left(11\mathrm{e}^3 - 8\right)\right]$

Najděte křivkový integrál $\oint_{\mathcal{C}} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$, kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná hranice elipsy $x^2 + 4y^2 \le 4$. $\left[4\pi\right]$

Najděte křivkový integrál $\int_{\mathcal{C}} (y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)$, kde $\mathcal{C}$ je křivka daná parametrickými rovnicemi

$$x = t - \sin t\,, \quad y = 1 - \cos t\,, \qquad 0 \le t \le 2\pi\,,$$

která je orientovaná ve směru rostoucího parametru. $\left[6\pi\right]$

Najděte křivkový integrál $\oint_{\mathcal{C}} \big((x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y\big)$, kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná hranice oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi

$$x + y \ge 0\,, \qquad x - y \ge 0\,, \qquad x^2 + y^2 \le 1\,.$$

$\left[\frac{1}{2}\,\pi\right]$

Najděte křivkový integrál $\int_{\mathcal{C}} (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z)$, kde $\mathcal{C}$ je křivka daná parametrickými rovnicemi

$$x = \mathrm{e}^{-\varphi}\cos\varphi\,, \quad y = \mathrm{e}^{-\varphi}\sin\varphi\,, \quad z = \varphi\mathrm{e}^{-\varphi}\,, \qquad \varphi \in (0, \infty)\,,$$

kterou probíháme ve směru rostoucího parametru φ. $\left[0\right]$

Najděte křivkový integrál $\int_{\mathcal{C}} (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}z)$, kde $\mathcal{C}$ je křivka daná parametrickými rovnicemi

$$x = t + \cos t\,, \quad y = \cos t\,, \quad z = t\,, \qquad t \in \langle 0, 2\pi\rangle\,,$$

kterou probíháme ve směru rostoucího parametru t. $\left[2\pi^2\right]$

Najděte křivkový integrál $\int_{\mathcal{C}} (z\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}z)$, kde $\mathcal{C}$ je křivka daná vztahy

$$x^2 + y^2 = z^2\,, \quad x^2 + y^2 = 2x\,, \quad z \ge 0$$

a orientovaná tak, že její tečný vektor má v bodě $[2, 0, 2]$ kladnou druhou složku. $\left[\frac{8}{3}\right]$

Najděte křivkový integrál $\int_{\mathcal{C}} (x\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y - 2y\,\mathrm{d}z)$, kde $\mathcal{C}$ je křivka daná rovnicemi

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1\,, \quad x^2 + y^2 = y\,,$$

která leží v prvním oktantu, tj. x, y, $z \ge 0$, a začíná v bodě $[0, 0, 1]$. $\left[2\right]$

Najděte křivkový integrál $\int_{\mathcal{C}} (y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z)$, kde $\mathcal{C}$ je křivka definovaná rovnicemi

$$x^2 + y^2 = 1\,, \quad x + z = 2\,,$$

která je orientována tak, že první složka vektoru její tečny je v bodě $[0,1,2]$ kladná. $\left[\pi\right]$

Najděte křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{C}} \left(\frac{\mathrm{d}x}{z-y} + \frac{\mathrm{d}y}{x-z} + \frac{\mathrm{d}z}{y-x} \right),$$

kde $\mathcal{C}$ je úsečka z bodu $A = [1,-5,4]$ do bodu $B = [-1,-2,5]$. $\left[\ln\frac{7}{2} - \frac{6}{5}\ln 3\right]$

Najděte křivkový inegrál

$$\oint_{\mathcal{C}} (z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z)\,,$$

kde $\mathcal{C}$ je trojúhelník s vrcholy $A = [1,0,0]$, $B = [0,2,0]$ a $C = [0,0,3]$, který probíháme ve směru $A \to B \to C \to A$. $\left[\frac{11}{2}\right]$

Nechť jsou $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, resp. $\mathbf{e}_3$ jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci silového pole $\mathbf{f} = z\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2 + y\mathbf{e}_3$ po úsečce s počátečním bodem $A = [-1,0,1]$ a koncovým bodem $B = [3,1,-1]$. $\left[0\right]$

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci silového pole $\mathbf{f} = xz\mathbf{i} - y\mathbf{k}$ po křivce dané parametrickými rovnicemi

$$\mathbf{x}(t) = 2\mathbf{i} + \mathrm{e}^t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}\,, \qquad 0 \le t \le 1\,,$$

která je orientovaná ve směru rostoucího parametru t. $\left[-2\right]$

Nechť jsou $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, resp. $\mathbf{e}_3$ jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci silového pole $\mathbf{f} = yz\mathbf{e}_1 - xz\mathbf{e}_2 + (x^2+y^2)\mathbf{e}_3$ po křivce $\mathcal{C}$ dané parametrickými rovnicemi

$$\mathbf{x}(t) = t\cos t\,\mathbf{e}_1 + t\sin t\,\mathbf{e}_2 + t^2\,\mathbf{e}_3\,, \qquad 0 \le t \le \pi\,,$$

která je orientovaná ve směru rostoucího parametru. $\left[\frac{1}{10}\pi^4(5-2\pi)\right]$

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci silového pole $\mathbf{f} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$ po křivce dané parametrickými rovnicemi

$$x = \ln t\,, \quad y = t\,, \quad z = \frac{1}{t}\,, \qquad 1 \le t \le 2\,,$$

která je orientovaná ve směru rostoucího parametru t. $\left[-\frac{1}{2}\right]$

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci silového pole $\mathbf{f} = z\mathbf{i} + y\mathbf{k}$ po křivce dané parametrickými rovnicemi

$$x = \cos t\,, \quad y = t - \sin t\,, \quad z = t\,, \qquad 0 \le t \le 2\pi\,,$$

která je orientovaná ve směru rostoucího parametru t. $\left[2\pi(\pi + 1)\right]$

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci silového pole $\mathbf{f} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$ po křivce dané parametrickými rovnicemi

$$x = t + \cos t\,, \quad y = t + \sin t\,, \quad z = \tfrac{1}{2}\,t^2\,, \qquad 0 \le t \le \pi\,,$$

která je orientovaná ve směru rostoucího parametru t. $\left[\frac{1}{3}\,\pi\big(2\pi^2 - 3\big)\right]$

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci silového pole $\mathbf{f} = (y + z)\mathbf{i} - (x + z)\mathbf{j}$ po křivce $\mathcal{C}$ dané parametrickými rovnicemi

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos t\,\mathbf{i} + \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathbf{j} + \mathrm{e}^{-t}\,\mathbf{k}\,, \qquad 0 \le t < \infty\,,$$

která je orientovaná ve směru rostoucího parametru. $\left[\frac{3}{10}\right]$

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci silového pole $\mathbf{f} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ po křivce dané rovnicemi

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 3\,, \qquad x = y\,,$$

která začíná v bodě $A = [1, 1, 0]$ a končí v bodě $B = [0, 0, 1]$ a která leží v prvním oktantu, tj. x, y, $z \ge 0$. $\left[-\frac{1}{2}\right]$

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci silového pole $\mathbf{f} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ po křivce dané rovnicemi

$$x^2 + y^2 = 1\,, \qquad xy = z\,,$$

která začíná v bodě $A = [1, 0, 0]$ a končí v bodě $B = [0, 1, 0]$ a která leží v prvním oktantu, tj. x, y, $z \ge 0$. $\left[-\frac{1}{2}\,\pi\right]$

Nechť jsou $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, resp. $\mathbf{e}_3$ jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci silového pole $\mathbf{f} = -y\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ po křivce $\mathcal{C}$, která je dána vztahy

$$x^2 + y^2 = 1\,, \qquad x^2 - y^2 = z\,, \qquad x,\, y \ge 0\,,$$

od bodu $A = [1, 0, 1]$ do bodu $B = [0, 1, -1]$. $\left[\frac{1}{2}\,\pi\right]$

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci silového pole $\mathbf{f} = z\mathbf{i} + y\mathbf{k}$ po křivce dané rovnicemi

$$x^2 + 4y^2 = 4\,, \qquad z = xy\,,$$

která je orientovaná tak, že tečný vektor má v bodě $A = [0, 1, 0]$ zápornou první složku.

$\Big[0\Big]$

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci silového pole $\mathbf{f} = y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ po křivce dané rovnicemi

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25\,, \qquad x + 2y = 0\,,$$

která je orientovaná tak, že tečný vektor má v bodě $A = [0, 0, 5]$ kladnou první složku.

$\Big[-10\sqrt{5}\,\pi\Big]$

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci silového pole $\mathbf{f} = (2x - y - z)\mathbf{i} + (2y - x - z)\mathbf{j} + (2z - x - y)\mathbf{k}$ po obvodu trojúhelníka v vrcholy $A = [1, 0, 0]$, $B = [0, 2, 0]$ a $C = [0, 0, 3]$, který probíháme ve směru $A \to B \to C \to A$.

$\Big[0\Big]$

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci silového pole $\mathbf{f} = y\mathrm{e}^z\,\mathbf{i} + z\mathrm{e}^x\,\mathbf{j} + x\mathrm{e}^y\,\mathbf{k}$ po úsečce s počátečním bodem $A = [-1, 2, 1]$ a koncovým bodem $B = [2, 3, -1]$.

$\Big[2\mathrm{e}^3 - \frac{73}{9}\,\mathrm{e}^2 + \frac{15}{4}\,\mathrm{e} - \frac{209}{36}\,\mathrm{e}^{-1}\Big]$

Ukažte, že křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{C}} \Big(x(3x + 2y)\,\mathrm{d}x + (x^2 - 2y + 3z)\,\mathrm{d}y + (3y - 2z + 1)\,\mathrm{d}z \Big)$$

nezávisí na integrační cestě a spočítejte jej po křivce $\mathcal{C}$, která začíná v bodě $A = [1, 1, 1]$ a končí v bodě $B = [-1, 2, 0]$.

$\Big[-7\Big]$

Ukažte, že křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{C}} \Big((2x + y - z)(y + z)\,\mathrm{d}x + (x + 2y + z)(x - z)\,\mathrm{d}y + (x - y - 2z)(x + y)\,\mathrm{d}z \Big)$$

nezávisí na integrační cestě a spočítejte jej po křivce $\mathcal{C}$, která začíná v bodě $A = [1, 2, 3]$ a končí v bodě $B = [3, 1, 2]$.

$\Big[42\Big]$

Ukažte, že křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{C}} \Big((\sin y - z \sin x)\,\mathrm{d}x + (\sin z + x \cos y)\,\mathrm{d}y + (\cos x + y \cos z)\,\mathrm{d}z \Big)$$

nezávisí na integrační cestě a spočítejte jej po křivce $\mathcal{C}$, která začíná v bodě $A = [0, \pi, 0]$ a končí v bodě $B = [\pi, 0, \pi]$.

$\Big[-\pi\Big]$

V oblasti $y^2 > z$ najděte potenciál vektorového pole

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \left(2x + yz,\ xz + \frac{2y}{\sqrt{y^2 - z}}\,,\ xy - \frac{1}{\sqrt{y^2 - z}} \right)$$

a pomocí toho spočítejte práci pole $\mathbf{f}$ po křivce $\mathcal{C}$, která začíná v bodě $A = [2, 1, 0]$, končí v bodě $B = [1, 3, 5]$ a leží v oblasti $y^2 > z$. $\left[U = x^2 + xyz + 2\sqrt{y^2 - z}\,; \quad 14\right]$

V prvním oktantu, tj. pro x, y, $z > 0$, najděte potenciál vektorového pole

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \left(\frac{y + x\ln z}{x}, \frac{z + y\ln x}{y}, \frac{x + z\ln y}{z}\right)$$

a pomocí toho spočítejte práci pole $\mathbf{f}$ po křivce $\mathcal{C}$, která leží v prvním oktantu, začíná v bodě $A = [1, 2, 1]$ a končí v bodě $B = [4, 1, 2]$. $\left[U = x\ln z + y\ln x + z\ln y\,; \quad 5\ln 2\right]$

Najděte potenciál vektorového pole

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right)$$

a pomocí toho spočítejte práci pole $\mathbf{f}$ po křivce $\mathcal{C}$, která začíná v bodě $A = [2, -1, 2]$, končí v bodě $B = [4, 0, -3]$ a neprochází počátkem souřadnic. $\left[U = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,; \quad \frac{2}{15}\right]$
